Combinatoire algébrique des permutations et de leurs généralisations

V. Vong

Laboratoire d'Informatique Gaspard-Monge
Université Paris-Est Marne-la-Vallée

Thèse soutenue le
8 décembre 2014

Jury :

- Guo-Niu HAN, *rapporteur*
- Matthieu JOSUAT-VERGÈS, *examinateur*
- Jean-Gabriel LUQUE, *examinateur*
- Dominique MANCHON, *rapporteur*
- Cyril NICAUD, *examinateur*
- Jean-Christophe NOVELLI, *directeur*

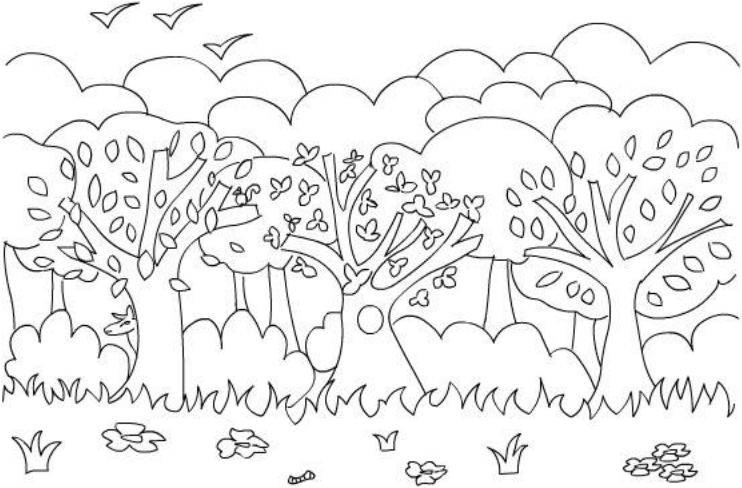
Introduction : qu'est-ce que la combinatoire ?

Introduction : qu'est-ce que la combinatoire ?

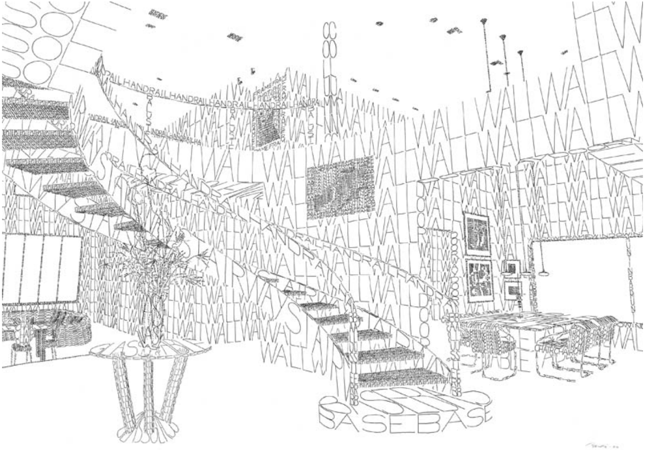
C'est l'art de compter des objets.

Introduction : que compter ?

Des arbres

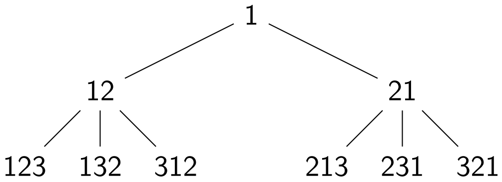


Des mots



Introduction : que compter ?

Des permutations



Introduction : qu'est-ce que la combinatoire algébrique ?

L'étude de lois d'assemblages sur des objets combinatoires.

Introduction : qu'est-ce que la combinatoire algébrique ?

L'étude de lois d'assemblages sur des objets combinatoires.

$$\begin{aligned} 312 \cdot_1 12 &= 31245. \\ 213 \cdot_2 21 &= 43521. \end{aligned}$$

Introduction : qu'est-ce que la combinatoire algébrique ?

L'étude de lois d'assemblages sur des objets combinatoires.

$$\begin{aligned} 312 \cdot_1 12 &= 31245. \\ 213 \cdot_2 21 &= 43521. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 312 \,\overline{\sqcup\!\sqcup}\, 12 &= 31245 + 31425 + 34125 + 43125 + 31452 \\ &+ 34152 + 43152 + 34512 + 43512 + 45312. \end{aligned}$$

Introduction : qu'est-ce que la combinatoire algébrique ?

Exemple :

$$\sum_{n\geq 0} n!t^n = \frac{1}{1-g(t)},$$

où $g(t) = \sum_{n\geq 1} g_n t^n$, $g_n \in \mathbb{N}$.

Exemple :

$$\sum_{n\geq 0} n!t^n = \frac{1}{1-g(t)},$$

où $g(t) = \sum_{n\geq 1} g_n t^n$, $g_n \in \mathbb{N}$.

Interprétation combinatoire des g_n ?

Exemple :

$$\sum_{n\geq 0} n!t^n = \frac{1}{1-g(t)},$$

où $g(t) = \sum_{n\geq 1} g_n t^n$, $g_n \in \mathbb{N}$.

Interprétation combinatoire des g_n ?

Les permutations connexes.

Introduction : qu'est-ce que la combinatoire algébrique ?

Exemple :

$$\sum_{n\geq 0} n!t^n = \frac{1}{1-g(t)},$$

où $g(t) = \sum_{n\geq 1} g_n t^n$, $g_n \in \mathbb{N}$.

Interprétation combinatoire des g_n ?

Les permutations connexes.

$$\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}} \sigma = \frac{1}{1-\sum_{\sigma\in\mathcal{C}} \sigma}.$$

Plan

- Définitions d'objets combinatoires

Plan

- Définitions d'objets combinatoires
- Combinatoire algébrique des permutations

1. Construction d'algèbres quotients
2. Polynômes eulériens et nombres d'Euler
3. Combinatoire des algèbres dendriformes

Plan

- Définitions d'objets combinatoires
- Combinatoire algébrique des permutations
  1. Construction d'algèbres quotients
  2. Polynômes eulériens et nombres d'Euler
  3. Combinatoire des algèbres dendriformes
- Perspectives

Objets combinatoires

- Les permutations

Objets combinatoires

- Les permutations
- Les arbres

Objets combinatoires

- Les permutations
- Les arbres
- Une bijection entre arbres binaires croissants et permutations

Objets combinatoires

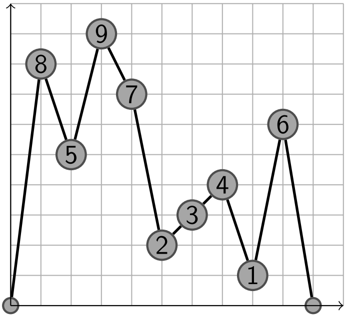
- Les permutations
- Les arbres
- Une bijection entre arbres binaires croissants et permutations
- Des statistiques classiques sur les permutations

Objets combinatoires

Définition

- *Permutation* de taille n : bijection sur $\{1, \cdots, n\}$.
- $\mathfrak{S}_n$: ensemble des permutations de taille n,
- $\mathfrak{S}$: $\sqcup_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{S}_n$.

Exemple : $\sigma = 859723416$



Objets combinatoires

Définition

- *Permutation* de taille n : bijection sur $\{1, \cdots, n\}$.
- $\mathfrak{S}_n$: ensemble des permutations de taille n,
- $\mathfrak{S}$: $\sqcup_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{S}_n$.

Nombre de permutations de taille n :

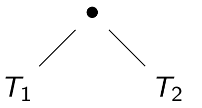
$$n!.$$

Définition

Un *arbre binaire* T est

- soit le vide $\emptyset$,
- soit un triplet $(\bullet, T_1, T_2)$ où T_1 et T_2 sont des arbres binaires.

On représente généralement un arbre binaire T sous la forme



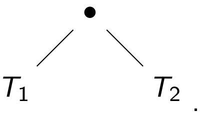
Objets combinatoires

Définition

Un *arbre binaire* T est

- soit le vide $\emptyset$,
- soit un triplet $(\bullet, T_1, T_2)$ où T_1 et T_2 sont des arbres binaires.

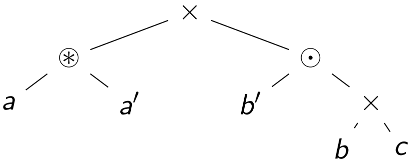
On représente généralement un arbre binaire T sous la forme

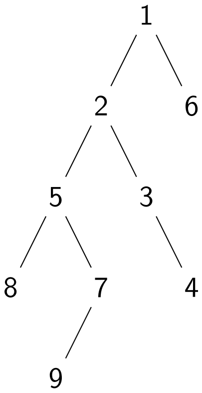


Nombre d'arbres ayant n nœuds (n^{e} nombre de Catalan) :

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Exemples d'arbres étiquetés :





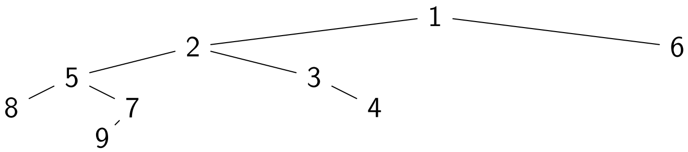
Objets combinatoires

Définition

Un *arbre binaire croissant* de taille n est un arbre binaire de taille n tel que :

- étiqueté par des entiers ;
- étiquettes des nœuds distinctes deux à deux ;
- un nœud a une étiquette strictement plus grande que celle de son père.

Exemple :



Une bijection

Arbre croissant d'une permutation

Pour $\sigma = uav$, où $a = \min(\sigma)$.

$$C(\sigma) = (a, C(u), C(v))\,.$$

Pour $\sigma = 859723416$, on a :

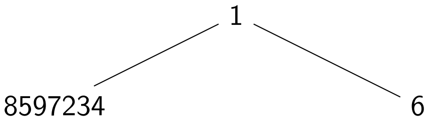
Une bijection

Arbre croissant d'une permutation

Pour $\sigma = uav$, où $a = \min(\sigma)$.

$$C(\sigma) = (a, C(u), C(v))\,.$$

Pour $\sigma = 859723416$, on a :



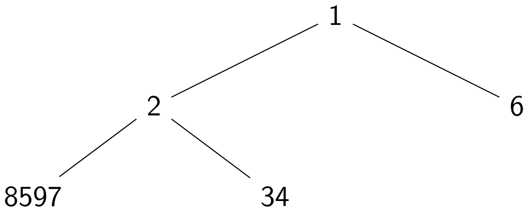
Une bijection

Arbre croissant d'une permutation

Pour $\sigma = uav$, où $a = \min(\sigma)$.

$$C(\sigma) = (a, C(u), C(v))\,.$$

Pour $\sigma = 859723416$, on a :



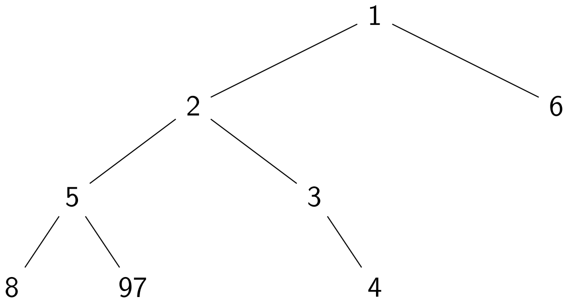
Une bijection

Arbre croissant d'une permutation

Pour $\sigma = uav$, où $a = \min(\sigma)$.

$$C(\sigma) = (a, C(u), C(v))\,.$$

Pour $\sigma = 859723416$, on a :



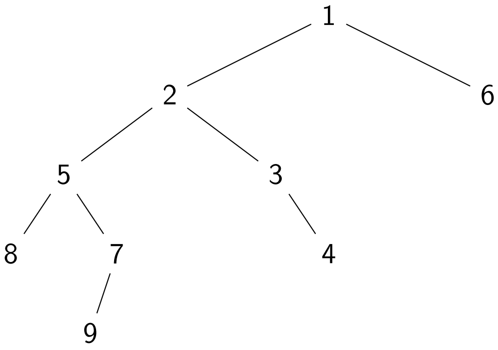
Une bijection

Arbre croissant d'une permutation

Pour $\sigma = uav$, où $a = \min(\sigma)$.

$$C(\sigma) = (a, C(u), C(v))\,.$$

Pour $\sigma = 859723416$, on a :



Une bijection

Lecture infixe d'un arbre

Lecture dans l'ordre suivant :

- fils gauche

Une bijection

Lecture infixe d'un arbre

Lecture dans l'ordre suivant :

- fils gauche
- racine

Une bijection

Lecture infixe d'un arbre

Lecture dans l'ordre suivant :

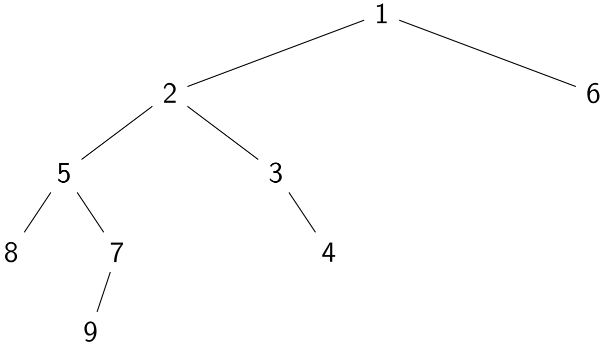
- fils gauche
- racine
- fils droit

Une bijection

Lecture infixe d'un arbre

Lecture dans l'ordre suivant :

- fils gauche
- racine
- fils droit

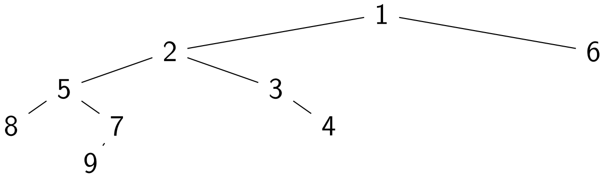


Une bijection

Lecture infixe d'un arbre

Lecture dans l'ordre suivant :

- fils gauche
- racine
- fils droit

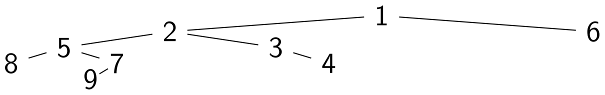


Une bijection

Lecture infixe d'un arbre

Lecture dans l'ordre suivant :

- fils gauche
- racine
- fils droit



Une bijection

Lecture infixe d'un arbre

Lecture dans l'ordre suivant :

- fils gauche
- racine
- fils droit

8 5 9 7 2 3 4 1 6

Une bijection

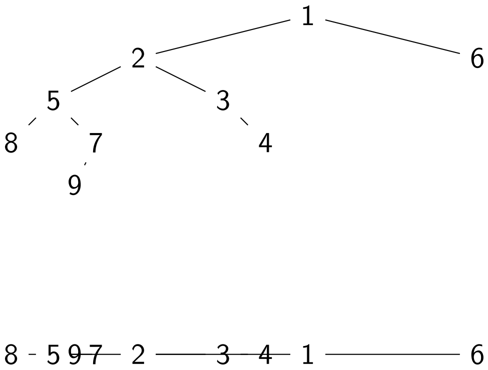
Lecture infixe d'un arbre

Lecture dans l'ordre suivant :

- fils gauche
- racine
- fils droit

859723416.

Une bijection

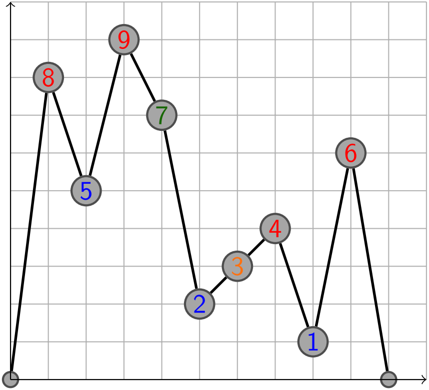


Quelques statistiques sur les permutations

Soit σ un élément de $\mathfrak{S}_n$. Par convention, $\sigma_0 = 0$ et $\sigma_{n+1} = 0$. Soit i un entier compris entre 1 et n. La valeur σ_i est un(e) :

Statistiques sur les permutations

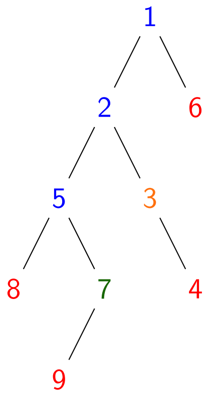
Exemple : $\sigma = 859723416$



$$
\begin{aligned}
P(\sigma) &= \{8, 9, 4, 6\} \\
V(\sigma) &= \{5, 2, 1\} \\
Dm(\sigma) &= \{3\} \\
Dd(\sigma) &= \{7\}
\end{aligned}
$$

Statistiques sur les arbres

Arbre binaire croissant de $\sigma = 859723416$:



pic	$\longleftrightarrow$	feuille
vallée	$\longleftrightarrow$	nœud avec deux enfants
double montée	$\longleftrightarrow$	nœud avec un enfant à droite
double descente	$\longleftrightarrow$	nœud avec un enfant à gauche

Problèmes algébriques

- Présentation de l'algèbre **FQSym**

Problèmes algébriques

- Présentation de l'algèbre **FQSym**
- Une traduction combinatoire d'un problème algébrique

Problèmes algébriques

- Présentation de l'algèbre **FQSym**
- Une traduction combinatoire d'un problème algébrique
- Construction d'ensembles quotients à partir de statistiques

FQSym

Définition (Malvenuto-Retenauer 1995)

On pose

$$\mathbf{FQSym} := \bigoplus_{n\geq 0} \mathbb{K}[\mathfrak{S}_n].$$

Dans la base des $\mathbf{F}_\sigma$ de **FQSym**, le produit est donné par le mélange décalé :

$$\mathbf{F}_\sigma \mathbf{F}_\tau = \sum_{s \in \sigma \overline{\sqcup\!\sqcup} \tau} \mathbf{F}_s$$

Mélange décalé

Définition

$v = v_1 \cdots v_m$, $w = w_1 \cdots w_n$

- $v \sqcup\!\sqcup\, w = v$ si $n = 0$;
- $v \sqcup\!\sqcup\, w = w$ si $m = 0$;
- $v \sqcup\!\sqcup\, w = (w \sqcup\!\sqcup\, v_1 \cdots v_{m-1})v_m + (w_1 \cdots w_{n-1} \sqcup\!\sqcup\, v)w_n$.

$v \,\overline{\sqcup\!\sqcup}\, w := v \sqcup\!\sqcup\, w[\max(v)]$, où $w[k] = (w_1 + k)(w_2 + k) \cdots (w_n + k)$.

Exemple avec $\sigma = 312$ et $\tau = 12$:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{312}\mathbf{F}_{12} \quad = \quad & \mathbf{F}_{31245} + \mathbf{F}_{31425} + \mathbf{F}_{34125} + \mathbf{F}_{43125} + \mathbf{F}_{31452} \\ & + \mathbf{F}_{34152} + \mathbf{F}_{43152} + \mathbf{F}_{34512} + \mathbf{F}_{43512} + \mathbf{F}_{45312}.\end{aligned}$$

Quotient d'espaces vectoriels

Des quotients pour une relation d'équivalence

- $\sim$: relation d'équivalence sur $\mathfrak{S}$.
- $\mathcal{I} := \mathrm{vect}\left((\mathbf{F}_\sigma - \mathbf{F}_\tau)_{\sigma\sim\tau}\right)$.
- $\mathcal{I} =$ idéal bilatère ?
- $\sigma \sim \tau$ et s, deux bijections

$$\phi_s : \sigma \,\overline{\sqcup\!\sqcup}\, s \to \tau \,\overline{\sqcup\!\sqcup}\, s \text{ telle que } \phi_s(p) \sim p,$$
$$\psi_s : s \,\overline{\sqcup\!\sqcup}\, \sigma \to s \,\overline{\sqcup\!\sqcup}\, \tau \text{ telle que } \psi_s(p) \sim p.$$

Relations d'équivalences

Exemples de relation d'équivalence

Notations	Définitions
(P,V, Dm $\cup$ Dd)	mêmes pics, vallées, et même réunion de doubles montées et de doubles descentes

Exemple : pour 4132 et 2413 on a

$$P = \{3, 4\},\ V = \{1\} \text{ et } Dm \cup Dd = \{2\}.$$

Relations d'équivalences

Exemples de relation d'équivalence

Notations	Définitions
$(\mathrm{P} \cup \mathrm{Dd}, \mathrm{V} \cup \mathrm{Dm})$	même réunion de pics et de doubles descentes, même réunion de vallées et de doubles descentes

Exemple : pour 35142 et 13542 on a

$$\mathrm{P} \cup \mathrm{Dd} = \{5, 4, 2\} \text{ et } \mathrm{V} \cup \mathrm{Dm} = \{1, 3\}.$$

Les différents ensembles quotients et leurs propriétés

Théorème (V. 2012)

Ensembles quotients	dimensions	algèbres quotients	algèbres libres
(P, V, Dm, Dd)	C_n	oui	oui
(P,V, Dm ∪ Dd)	M_{n-1}	oui	oui
(P,V ∪ Dm ∪ Dd)	$\binom{n-1}{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}$	non	non
(P ∪ V ∪ Dm, Dd)	2^{n-1}	non	non
(P ∪ V, Dm, Dd)	$\frac{3^{n-1}+1}{2}$	non	non
(P, Dm, V ∪ Dd)	A_{n-1}	non	non
(P ∪ V, Dm ∪ Dd)	2^{n-2}	non	non
(P ∪ Dd, V ∪ Dm)	2^{n-1}	oui	oui
(P ∪ V ∪ Dm ∪ Dd)	1	oui	oui

Éléments de démonstration

Que doit-on démontrer ?

- Étape 1 : bijection ϕ de $\sigma \,\overline{\sqcup\!\sqcup}\, s$ vers $\tau \,\overline{\sqcup\!\sqcup}\, s$ telle que $\phi(p) \sim p$.
- Étape 2 : bijection ψ de $s \,\overline{\sqcup\!\sqcup}\, \sigma$ vers $s \,\overline{\sqcup\!\sqcup}\, \tau$ telle que $\psi(p) \sim p$.

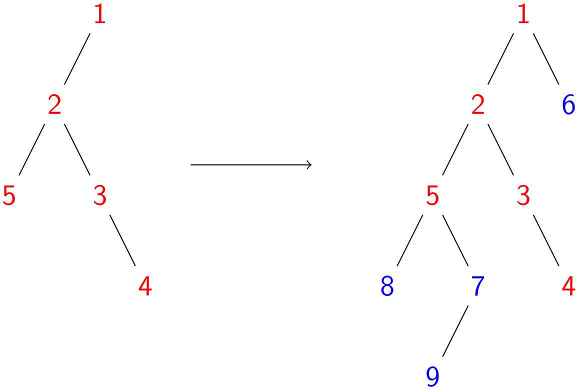
Étape 1

- Interprétation du mélange décalé en termes d'arbres croissants.
- Exemple de construction de la bijection.

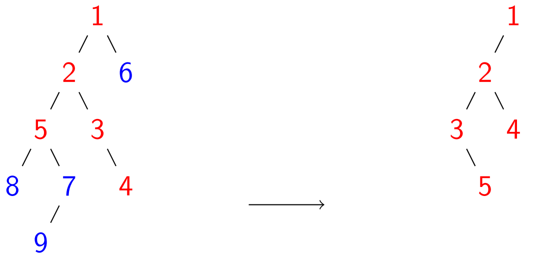
Étape 2

Mêmes arguments de preuve en prenant les arbres décroissants.

Pour $\sigma_1 = 52341$, $s = 3421$, $\sigma = 859723416 \in \sigma_1 \,\overline{\sqcup\!\sqcup}\, s$, on a



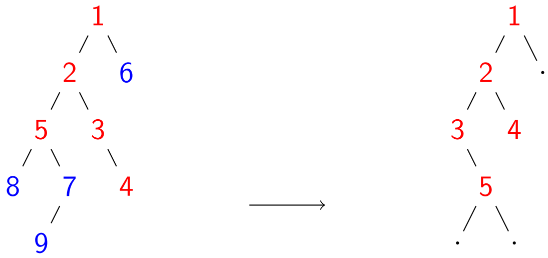
Pour $\sigma_1 = 52341$, $\sigma_2 = 35241$, et $s = 3421$:



$C(\sigma)$ $\qquad\qquad$ $C(\sigma_2)$

Construction de la bijection : exemple

Pour $\sigma_1 = 52341$, $\sigma_2 = 35241$, et $s = 3421$:



$C(\sigma)$ $\qquad$ $C(\phi(\sigma))$

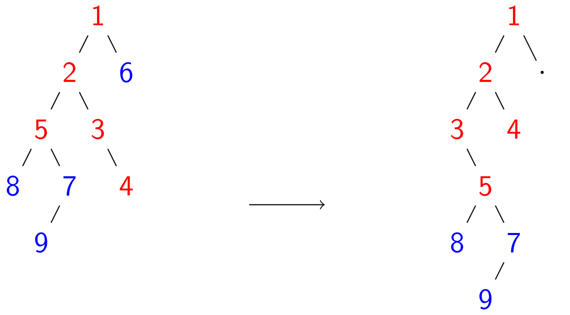
Construction de la bijection : exemple

Pour $\sigma_1 = 52341$, $\sigma_2 = 35241$, et $s = 3421$:

```
          1                                1
         / \                              / \
        2   6                            2   .
       / \                              / \
      5   3                            3   4
     / \   \                            \
    8   7   4        ------>             5
       /                                / \
      9                                8   .
```

$C(\sigma)$ $\qquad\qquad$ $C(\phi(\sigma))$

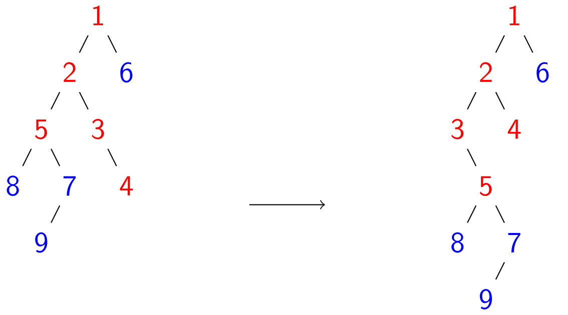
Pour $\sigma_1 = 52341$, $\sigma_2 = 35241$, et $s = 3421$:



$C(\sigma)$ $C(\phi(\sigma))$

Construction de la bijection : exemple

Pour $\sigma_1 = 52341$, $\sigma_2 = 35241$, et $s = 3421$:



$C(\sigma) \longrightarrow C(\phi(\sigma))$

Autres propriétés

Propriétés du quotient (V. 2012)

- Algèbre libre : grâce à la bijection de Françon-Viennot (1979) ;

Autres propriétés

Propriétés du quotient (V. 2012)

- Algèbre libre : grâce à la bijection de Françon-Viennot (1979) ;
- Un raffinement d'une base de **Sym** construite par Tevlin (2007).

Un problème classique combinatoire revisité

- Un autre produit sur **FQSym**
- Une statistique classique
- Polynômes eulériens et nombres d'Euler

Un autre produit sur les permutations

La base des G

En posant pour une permutation σ, $\mathbf{G}_\sigma = \mathbf{F}_{\sigma^{-1}}$, Le produit s'exprime dans cette base sous la forme :

$$\mathbf{G}_\sigma \mathbf{G}_\tau = \sum_{\substack{w=uv \\ std(u)=\sigma \\ std(v)=\tau}} \mathbf{G}_w.$$

Exemple :

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{312}\mathbf{G}_{21} \quad = \quad & \mathbf{G}_{31254} + \mathbf{G}_{41253} + \mathbf{G}_{41352} + \mathbf{G}_{42351} + \mathbf{G}_{51243} \\ & + \mathbf{G}_{51342} + \mathbf{G}_{52341} + \mathbf{G}_{51432} + \mathbf{G}_{52431} + \mathbf{G}_{53421}. \end{aligned}$$

Standardisation : exemple

Pour $w = kbabzevk$, on a :

$$k \quad b \quad a \quad b \quad z \quad e \quad v \quad k$$

Standardisation : exemple

Pour $w = kbabzevk$, on a :

$$\begin{array}{cccccccc} & & 1 & & & & & \\ k & b & a & b & z & e & v & k \end{array}$$

Standardisation : exemple

Pour $w = kbabzevk$, on a :

$$\begin{array}{cccccccc} & 2 & 1 & & & & & \\ k & b & a & b & z & e & v & k \end{array}$$

Standardisation : exemple

Pour $w = kbabzevk$, on a :

$$\begin{array}{cccccccc} & 2 & 1 & 3 & & & & \\ k & b & a & b & z & e & v & k \end{array}$$

Standardisation : exemple

Pour $w = kbabzevk$, on a :

$$\begin{array}{cccccccc} & 2 & 1 & 3 & & 4 & & \\ k & b & a & b & z & e & v & k \end{array}$$

Standardisation : exemple

Pour $w = kbabzevk$, on a :

$$\begin{array}{cccccccc} 5 & 2 & 1 & 3 & & 4 & & \\ k & b & a & b & z & e & v & k \end{array}$$

Standardisation : exemple

Pour $w = kbabzevk$, on a :

$$\begin{array}{cccccccc} 5 & 2 & 1 & 3 & & 4 & & 6 \\ k & b & a & b & z & e & v & k \end{array}$$

Standardisation : exemple

Pour $w = kbabzevk$, on a :

$$\begin{array}{cccccccc} 5 & 2 & 1 & 3 & & 4 & 7 & 6 \\ k & b & a & b & z & e & v & k \end{array}$$

Standardisation : exemple

Pour $w = kbabzevk$, on a :

$$\begin{matrix} 5 & 2 & 1 & 3 & 8 & 4 & 7 & 6 \\ k & b & a & b & z & e & v & k \end{matrix}$$

Standardisation : exemple

Pour $w = kbabzevk$, on a :

$$\begin{array}{cccccccc} 5 & 2 & 1 & 3 & 8 & 4 & 7 & 6 \\ k & b & a & b & z & e & v & k \end{array}$$

donc : $std(w) = 52138476.$

Une statistique classique : les descentes

Définition

$\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

- Position i = descente si $\sigma_i > \sigma_{i+1}$.
- Montée, sinon.

Pour $\sigma = 859723416$:

Une statistique classique : les descentes

Définition

$\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

- Position i = descente si $\sigma_i > \sigma_{i+1}$.
- Montée, sinon.

Pour $\sigma = 859723416$:

$$\boxed{8}$$

Une statistique classique : les descentes

Définition

$\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

- Position i = descente si $\sigma_i > \sigma_{i+1}$.
- Montée, sinon.

Pour $\sigma = 859723416$:

8
5

Une statistique classique : les descentes

Définition

$\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

- Position $i =$ descente si $\sigma_i > \sigma_{i+1}$.
- Montée, sinon.

Pour $\sigma = 859723416$:

$$\begin{array}{|c|c} \hline 8 & \\ \hline 5 & \multicolumn{1}{c|}{9} \\ \hline \end{array}$$

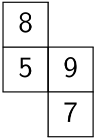
Une statistique classique : les descentes

Définition

$\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

- Position i = descente si $\sigma_i > \sigma_{i+1}$.
- Montée, sinon.

Pour $\sigma = 859723416$:



Définition

$\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

- Position i = descente si $\sigma_i > \sigma_{i+1}$.
- Montée, sinon.

Pour $\sigma = 859723416$:

8	
5	9
	7
	2

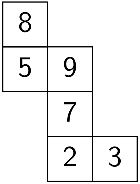
Une statistique classique : les descentes

Définition

$\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

- Position i = descente si $\sigma_i > \sigma_{i+1}$.
- Montée, sinon.

Pour $\sigma = 859723416$:



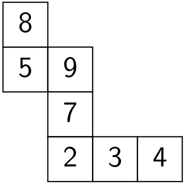
Une statistique classique : les descentes

Définition

$\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

- Position i = descente si $\sigma_i > \sigma_{i+1}$.
- Montée, sinon.

Pour $\sigma = 859723416$:



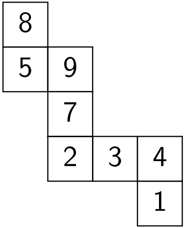
Une statistique classique : les descentes

Définition

$\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

- Position i = descente si $\sigma_i > \sigma_{i+1}$.
- Montée, sinon.

Pour $\sigma = 859723416$:



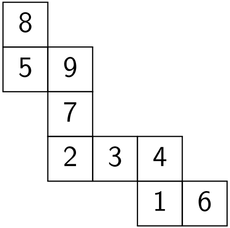
Une statistique classique : les descentes

Définition

$\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

- Position i = descente si $\sigma_i > \sigma_{i+1}$.
- Montée, sinon.

Pour $\sigma = 859723416$:



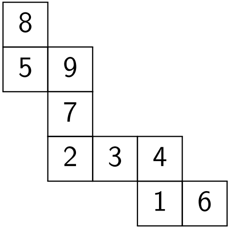
Une statistique classique : les descentes

Définition

$\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

- Position i = descente si $\sigma_i > \sigma_{i+1}$.
- Montée, sinon.

Pour $\sigma = 859723416$:



$$\mathrm{Des}(\sigma) = \{1, 3, 4, 7\}.$$

Les polynômes eulériens

Définition

Pour $n \geq 0$:

$$A_n(t) := \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} t^{\mathrm{des}(\sigma)}.$$

$$A(x,t) := \sum_{n \geq 0} A_n(t) \frac{x^n}{n!} = \frac{t-1}{t - \exp\left(x\left(t-1\right)\right)}.$$

A est la solution de l'équation

$$F(x) = 1 + t \int_0^x F(s)\left(F(s) - 1\right) ds + \int_0^x F(s) ds.$$

Une application bilinéaire

Dans $\mathbb{K}[[x]]$:

$$\mathrm{B}(f,g) := \int_0^x f(s)g(s)ds.$$

L'équation

$$F = 1 + t\int_0^x F(s)\left(F(s)-1\right)ds + \int_0^x F(s)ds.$$

devient

$$F = 1 + t\mathrm{B}\left(F, F-1\right) + \mathrm{B}\left(F, 1\right).$$

Nombres d'Euler

Définition

Série génératrice des nombres d'Euler :

$$\sum_{n\geq 0} E_n \frac{x^n}{n!} = \tan(x) + \frac{1}{\cos(x)}.$$

Équation fonctionnelle de tan :

$$F = x + \mathrm{B}(F, F).$$

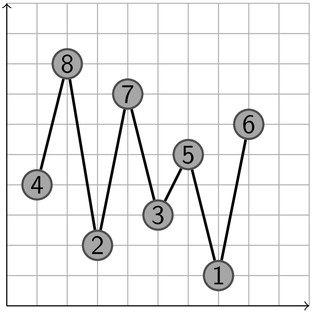
Nombres d'Euler

Définition

σ est *alternante* si

$$\sigma_1 < \sigma_2 > \cdots < \sigma_{2i} > \cdots > \sigma_{2j+1} < \cdots .$$

Exemple : $\sigma = 48273516$ est alternante.



Un théorème dû à Euler

Théorème (Euler)

Pour $n \geq 0$:

$$\begin{aligned} A_{2n+1}(-1) &= (-1)^n E_{2n+1}, \\ A_{2n+2}(-1) &= 0, \end{aligned}$$

De **FQSym** vers $\mathbb{K}[[x]]$

L'application $\mathbb{E}$

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On définit $\mathbb{E}$ par :

$$\mathbb{E}\left(\mathbf{G}_\sigma\right) = \frac{x^n}{n!}.$$

Proposition

L'application $\mathbb{E}$ est un morphisme d'algèbre surjectif de **FQSym** vers $\mathbb{K}[[x]]$.

De **FQSym** vers $\mathbb{K}[[x]]$

Démonstration :

De **FQSym** vers $\mathbb{K}[[x]]$

Démonstration :

$\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $\tau \in \mathfrak{S}_m$.

De **FQSym** vers $\mathbb{K}[[x]]$

Démonstration :

$\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $\tau \in \mathfrak{S}_m$.

$\mathbf{G}_\sigma \mathbf{G}_\tau$: $\binom{n+m}{n}$ termes. Donc, $\mathbb{E}\left(\mathbf{G}_\sigma \mathbf{G}_\tau\right) = \binom{n+m}{n} \frac{x^{n+m}}{(n+m)!}$.

De **FQSym** vers $\mathbb{K}[[x]]$

Démonstration :

$\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $\tau \in \mathfrak{S}_m$.

$\mathbf{G}_\sigma \mathbf{G}_\tau$: $\binom{n+m}{n}$ termes. Donc, $\mathbb{E}\left(\mathbf{G}_\sigma \mathbf{G}_\tau\right) = \binom{n+m}{n} \frac{x^{n+m}}{(n+m)!}$.

$$\mathbb{E}(\mathbf{G}_\sigma)\mathbb{E}(\mathbf{G}_\tau) = \frac{x^n}{n!}\frac{x^m}{m!} = \frac{(n+m)!}{n!m!}\frac{x^{n+m}}{(n+m)!} = \binom{n+m}{n}\frac{x^{n+m}}{(n+m)!}.$$

De **FQSym** vers $\mathbb{K}[[x]]$

Démonstration :

$\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $\tau \in \mathfrak{S}_m$.

$\mathbf{G}_\sigma \mathbf{G}_\tau$: $\binom{n+m}{n}$ termes. Donc, $\mathbb{E}\left(\mathbf{G}_\sigma \mathbf{G}_\tau\right) = \binom{n+m}{n}\frac{x^{n+m}}{(n+m)!}$.

$$\mathbb{E}(\mathbf{G}_\sigma)\mathbb{E}(\mathbf{G}_\tau) = \frac{x^n}{n!}\frac{x^m}{m!} = \frac{(n+m)!}{n!m!}\frac{x^{n+m}}{(n+m)!} = \binom{n+m}{n}\frac{x^{n+m}}{(n+m)!}.$$

Donc $\mathbb{E}\left(\mathbf{G}_\sigma \mathbf{G}_\tau\right) = \mathbb{E}(\mathbf{G}_\sigma)\mathbb{E}(\mathbf{G}_\tau)$.

Un relèvement de B

Application $\mathbf{B}_{\max}$ (Hivert, Novelli, Thibon 2008)

Pour σ et τ dans $\mathfrak{S}$. Posons :

$$\mathbf{B}_{\max}\left(\mathbf{G}_\sigma, \mathbf{G}_\tau\right) := \sum_{\substack{w=u(|\sigma|+|\tau|+1)v \\ std(u)=\sigma \\ std(v)=\tau}} \mathbf{G}_w.$$

Exemple :

$$\mathbf{B}_{\max}\left(\mathbf{G}_{312}, \mathbf{G}_{21}\right) = \mathbf{G}_{312654} + \mathbf{G}_{512643} + \mathbf{G}_{412653} + \cdots + \mathbf{G}_{534621}.$$

Remarque :

$$\mathbb{E}\left(\mathbf{B}_{\max}\left(\mathbf{G}_\sigma, \mathbf{G}_\tau\right)\right) = \mathrm{B}\left(\mathbb{E}(\mathbf{G}_\sigma), \mathbb{E}(\mathbf{G}_\tau)\right) = \int_0^x \frac{s^{|\sigma|+|\tau|}}{|\sigma|!|\tau|!} ds.$$

Un analogue non commutatif

L'équation

$$F = 1 + t\mathrm{B}\left(F, F - 1\right) + \mathrm{B}\left(F, 1\right).$$

admet donc comme analogue dans **FQSym** :

$$\mathbf{F} = 1 + t\mathbf{B}_{\mathsf{max}}\left(\mathbf{F}, \mathbf{F} - 1\right) + \mathbf{B}_{\mathsf{max}}\left(\mathbf{F}, 1\right)$$

La solution de cette équation est donnée par :

$$\mathbf{F} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}} t^{\mathrm{des}(\sigma)} \mathbf{G}_{\sigma}$$

Un autre analogue non commutatif

Pour $t = -1$, l'équation

$$F = 1 + t\mathrm{B}\left(F, F-1\right) + \mathrm{B}\left(F, 1\right)$$

admet un autre analogue dans **FQSym** :

$$\mathbf{F} = 1 - \mathbf{B}_{\mathsf{max}}\left(\mathbf{F}, \mathbf{F}-1\right) + \mathbf{B}_{\mathsf{max}}\left(1, \mathbf{F}\right).$$

La solution de cette équation est donnée par :

$$\mathbf{F} = 1 + \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_1} (-1)^{\frac{|\sigma|-1}{2}} \mathbf{G}_\sigma,$$

où $\mathcal{A}_1$ désigne l'ensemble des permutations alternantes impaires.

Récapitulatif

Construction (V. 2013)

FQSym $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\mathbb{K}[[x]]$

$$\mathbf{F} = 1 - \mathbf{B}_{\text{max}}(\mathbf{F}, \mathbf{F} - 1) + \mathbf{B}_{\text{max}}(1, \mathbf{F}) \xrightarrow{\mathbb{E}} F = 1 - \mathrm{B}(F, F-1) + \mathrm{B}(1, F)$$

$$\|$$

$$\mathbf{F} = 1 - \mathbf{B}_{\text{max}}(\mathbf{F}, \mathbf{F} - 1) + \mathbf{B}_{\text{max}}(\mathbf{F}, 1) \xrightarrow{\mathbb{E}} F = 1 - \mathrm{B}(F, F-1) + \mathrm{B}(F, 1)$$

Récapitulatif

Construction (V. 2013)

FQSym $\quad\quad\quad\quad$ $\mathbb{K}[[x]]$

$$\mathbf{F} = 1 - \mathbf{B}_{\max}(\mathbf{F}, \mathbf{F}-1) + \mathbf{B}_{\max}(1, \mathbf{F}) \xrightarrow{\mathbb{E}} F = 1 - \mathrm{B}(F, F-1) + \mathrm{B}(1, F)$$

$$\|$$

$$\mathbf{F} = 1 - \mathbf{B}_{\max}(\mathbf{F}, \mathbf{F}-1) + \mathbf{B}_{\max}(\mathbf{F}, 1) \xrightarrow{\mathbb{E}} F = 1 - \mathrm{B}(F, F-1) + \mathrm{B}(F, 1)$$

$$1 + \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_1} (-1)^{\frac{|\sigma|-1}{2}} \mathbf{G}_\sigma \xrightarrow{\mathbb{E}} 1 + \sum_{n \geq 0} (-1)^n E_{2n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\|$$

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}} (-1)^{\mathrm{des}(\sigma)} \mathbf{G}_\sigma \xrightarrow{\mathbb{E}} \sum_{n \geq 0} A_n (-1) \frac{x^n}{n!}$$

Récapitulatif

Corollaire (Euler)

Pour $n \geq 0$:

$$\begin{aligned} A_{2n+1}(-1) &= (-1)^n E_{2n+1}, \\ A_{2n+2}(-1) &= 0. \end{aligned}$$

Autres applications

- Relèvement non commutatif et interprétations combinatoires

Autres applications

- Relèvement non commutatif et interprétations combinatoires
- Relèvement non commutatif et bijection automatique

Algèbres dendriformes

- Définition et exemple
- À propos des algèbres dendriformes libres
- De la liberté de **FQSym**

Algèbres dendriformes

Définition (Loday 1998)

Une *algèbre dendriforme* $(\mathcal{A}, \succ, \prec)$:

- $\mathcal{A}$: $\mathbb{K}$-ev ;
- $\succ$ et $\prec$: applications bilinéaires ;
- relations :

$$\begin{cases} (a \prec b) \prec c & = & a \prec (b \prec c + b \succ c) & = a \prec (b \star c) \\ a \succ (b \succ c) & = & (a \star b) \succ c \\ (a \succ b) \prec c & = & a \succ (b \prec c) \end{cases}$$

Algèbres dendriformes

Définition (Loday 1998)

Une *algèbre dendriforme* $(\mathcal{A}, \succ, \prec)$:

- $\mathcal{A}$: $\mathbb{K}$-ev ;
- $\succ$ et $\prec$: applications bilinéaires ;
- relations :

$$\begin{cases} (a \prec b) \prec c & = & a \prec (b \prec c + b \succ c) & = a \prec (b \star c) \\ a \succ (b \succ c) & = & (a \star b) \succ c \\ (a \succ b) \prec c & = & a \succ (b \prec c) \end{cases}$$

Une manière de réécrire les relations :

$$(a \prec b) \prec c = a \prec (b \star c)\,,$$

$\longrightarrow$

$$(\prec) \prec = \prec (\star).$$

Algèbres dendriformes

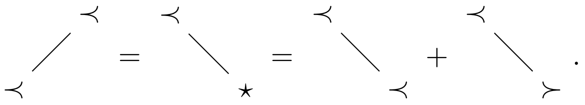
Définition (Loday 1998)

Une *algèbre dendriforme* $(\mathcal{A}, \succ, \prec)$:

- $\mathcal{A}$: $\mathbb{K}$-ev ;
- $\succ$ et $\prec$: applications bilinéaires ;
- relations :

$$\begin{cases} (a \prec b) \prec c & = & a \prec (b \prec c + b \succ c) & = a \prec (b \star c) \\ a \succ (b \succ c) & = & (a \star b) \succ c & \\ (a \succ b) \prec c & = & a \succ (b \prec c) & \end{cases}$$

Représentation en termes d'arbres d'évaluation :



Algèbres dendriformes

Structure dendriforme de **FQSym**

$$\mathbf{F}_\sigma \prec \mathbf{F}_\tau := \sum_{\substack{\gamma \in \sigma \overline{\sqcup\!\sqcup} \tau \\ \gamma_{n+m} = \sigma_n}} \mathbf{F}_\gamma,$$

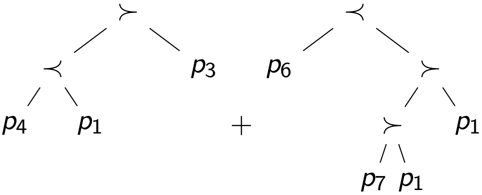
et

$$\mathbf{F}_\sigma \succ \mathbf{F}_\tau := \sum_{\substack{\gamma \in \sigma \overline{\sqcup\!\sqcup} \tau \\ \gamma_{n+m} = \tau_m[n]}} \mathbf{F}_\gamma.$$

Remarque : $\overline{\sqcup\!\sqcup} = \prec + \succ$.

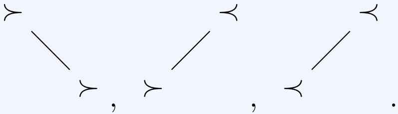
Algèbres dendriformes

Éléments de l'algèbre dendriforme $\mathcal{A}$ libre sur une famille de générateurs P :



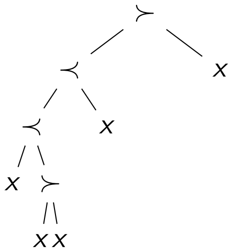
Théorème (Novelli 2014)

Base de $\mathcal{A}$: arbres binaires complets évitant les motifs suivants :

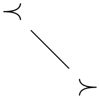


Arbres et motifs

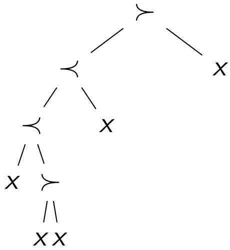
Exemple : l'arbre



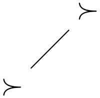
contient le motif



Exemple : l'arbre



et évite



.

Liberté de **FQSym**

Théorème (Foissy 2007)

FQSym est une algèbre dendriforme libre.

Théorème (V. 2014)

FQSym dendriforme libre $\approx$ théorème de factorisation.

Un théorème de factorisation sur les permutations

Définition

Produits réduits :

- $\sigma \prec' \tau = \sigma_1 \cdots \sigma_{n-1} \tau[n] \sigma_n$;
- $\sigma \succ' \tau = \sigma \tau[n]$.

Pour $\sigma = 31452$ et $\tau = 2431$, on a :

$$\sigma \prec' \tau = 314579862,$$

et

$$\sigma \succ' \tau = 314527986.$$

Un théorème de factorisation sur les permutations

Définition

$E \subset \{\prec', \succ'\}$. σ *E-connexe* si

$$(\forall \star \in E,\ \sigma = u \star v) \Longrightarrow (u = \sigma \text{ ou } v = \sigma).$$

Indécomposable : $\{\prec', \succ'\}$-connexe.

- 3412 : indécomposable ;
- 2341 : $\{\succ'\}$-connexe, mais pas $\{\prec'\}$-connexe.

$$2341 = 231 \prec' 1.$$

Un théorème de factorisation sur les permutations

Théorème (V. 2014)

Soit σ une permutation. Trois cas possibles :

- soit σ est indécomposable ;
- soit $\sigma = u \succ' v$, avec v $\{\succ'\}$-connexe ;
- soit $\sigma = u \prec' v$, avec u indécomposable,

  avec u et v uniques s'ils existent.

Pour 213675984, on obtient :

$$213675984 = 213 \succ' 342651.$$

Un théorème de factorisation sur les permutations

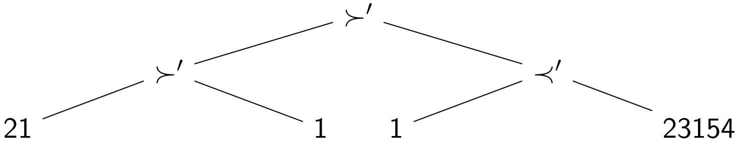
Pour 213675984 :

$$\succ'$$

213 342651

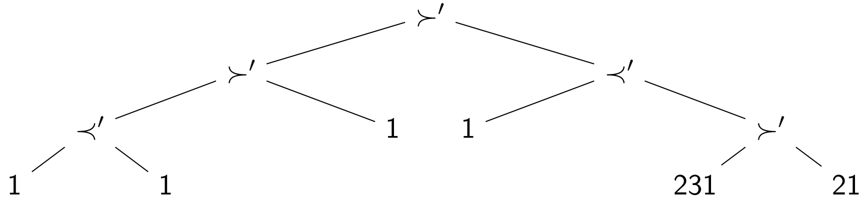
Un théorème de factorisation sur les permutations

Pour 213675984 :



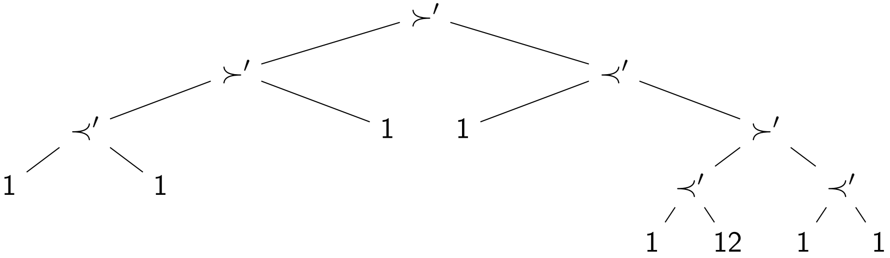
Un théorème de factorisation sur les permutations

Pour 213675984 :



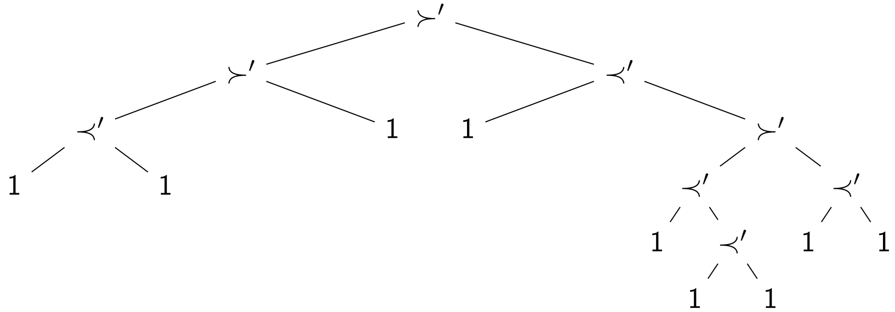
Un théorème de factorisation sur les permutations

Pour 213675984 :

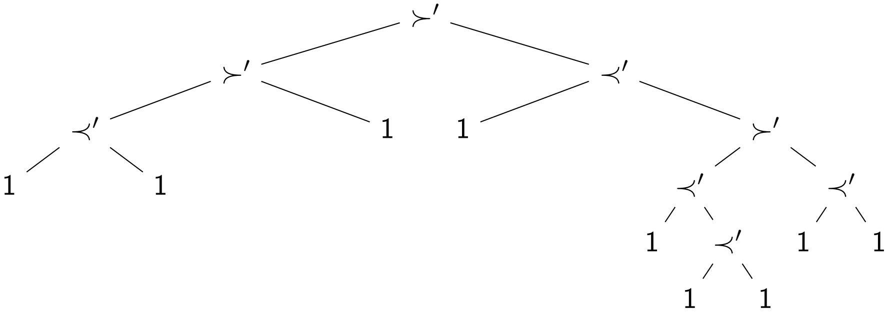


Un théorème de factorisation sur les permutations

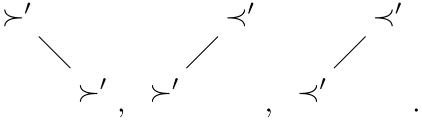
Pour 213675984 :



Pour 213675984 :



Pas de motif



Combinatoire des $\mathcal{P}$-algèbres

Théorème (V. 2014)

Type d'algèbres	algèbres	libre
dendriforme	**FQSym**	oui (Foissy 2007)
tridendriforme	**WQSym**	oui (Burgunder et Ronco 2010)
quadrialgèbre	2-permutations	oui (V. 2014)

Résumé

- Un quotient d'algèbre isomorphe à **PBT**.

Résumé

- Un quotient d'algèbre isomorphe à **PBT**.
- Équations fonctionnelles reliant les polynômes eulériens et les nombres d'Euler.

Résumé

- Un quotient d'algèbre isomorphe à **PBT**.
- Équations fonctionnelles reliant les polynômes eulériens et les nombres d'Euler.
- Méthode combinatoire appliquée à des problèmes de liberté.

Perspectives

À partir des statistiques : nouvelle base de **PBT**, la famille $(\mathbf{L}_T)$.

$$\begin{array}{lcl} \mathbf{FQSym} & \twoheadrightarrow & \mathbf{FQSym}/\sim \\ \mathbf{PBT} & \approx & \mathbf{FQSym}/\sim \end{array}$$

où $\sim$: (P,V,Dm,Dd).

Perspectives

À partir des statistiques : nouvelle base de **PBT**, la famille $(\mathbf{L}_T)$.

$$\begin{array}{lcl} \mathbf{FQSym} & \twoheadrightarrow & \mathbf{FQSym}/\sim \\ \mathbf{PBT} & \approx & \mathbf{FQSym}/\sim \end{array}$$

où $\sim$: (P,V,Dm,Dd).

- Calcul des coefficients de changement de base avec $(\mathbf{P}_T)$?

Perspectives

À partir des statistiques : nouvelle base de **PBT**, la famille $(\mathbf{L}_T)$.

$$\begin{array}{lcl} \mathbf{FQSym} & \twoheadrightarrow & \mathbf{FQSym}/\sim \\ \mathbf{PBT} & \approx & \mathbf{FQSym}/\sim \end{array}$$

où $\sim$: (P,V,Dm,Dd).

- Calcul des coefficients de changement de base avec $(\mathbf{P}_T)$?
- q-analogue de ces coefficients ?

Perspectives

À partir des statistiques : nouvelle base de **PBT**, la famille $(\mathbf{L}_T)$.

$$\begin{array}{lclcl}
\mathbf{FQSym} & \twoheadrightarrow & \mathbf{FQSym}/\sim & & \\
\mathbf{PBT} & \approx & \mathbf{FQSym}/\sim & \twoheadrightarrow & \mathbf{FQSym}/\equiv \\
\mathbf{Sym} & \hookrightarrow & \mathbf{FQSym}/\sim & \approx & \mathbf{FQSym}/\equiv
\end{array}$$

où $\sim$: (P,V,Dm,Dd) et $\equiv$: (P $\cup$ Dd, Dm $\cup$ V).

- Calcul des coefficients de changement de base avec $(\mathbf{P}_T)$?
- q-analogue de ces coefficients ?
- Lien avec les coefficients obtenus par Novelli, Thibon, Williams (2010) ?

Perspectives

Méthode non commutative pour obtenir des interprétations combinatoires.

Perspectives

Méthode non commutative pour obtenir des interprétations combinatoires.

- Calculs de nouveaux q-analogues ?

Perspectives

Méthode non commutative pour obtenir des interprétations combinatoires.

- Calculs de nouveaux q-analogues ?
- Constructions de nouvelles bijections ?

Perspectives

Arbres d'expressions et algèbres : preuves combinatoires de problèmes de liberté.

- Application de la méthode à d'autres types algèbres ?

Perspectives

Arbres d'expressions et algèbres : preuves combinatoires de problèmes de liberté.

- Application de la méthode à d'autres types algèbres ?
- Méthodes combinatoires pour d'autres constructions algébriques (ex : produit Manin) ?

Fin

Merci de votre attention.