PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

TEST DU 28 MARS 2018
DURÉE : 4 HEURES (14H-18H)

Instructions

- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en lettres capitales vos nom et prénom en haut à gauche ainsi que votre classe, et le numéro du problème en haut à droite.**
- On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
  Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le probléme.
  Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- Régles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.
- Le groupe B est constitué des élèves nés le 21 décembre 2002 au plus tôt. Le groupe A est constitué des autres élèves.
- Les exercices 1 à 4 ne sont à chercher que par les élèves du groupe B.
- Les exercices 5 à 7 ne sont à chercher que par les élèves du groupe A.

Préparation Olympique Française de Mathématiques
Animath
Institut Henri Poincaré
11-13 rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05

Exercices du groupe B – Énoncés et solutions

Exercice 1. Les entiers $1, 2, \ldots, 2018$ sont écrits au tableau. On effectue alors 2017 opérations comme suit : choisir deux nombres a et b, les effacer, et écrire $a + b + 2ab$ à la place. À la fin, il ne reste qu'un seul entier sur le tableau.
Quelles sont les valeurs que son chiffre des unités peut prendre ?

Solution de l'exercice 1 Puisqu'il y a 1009 nombres impairs entre 1 et 2018, on sait que la somme des entiers initialement inscrits au tableau est impaire. En outre, l'un de ces entiers est congru à $2 \pmod 5$. Une récurrence immédiate permet alors de montrer que, après chaque opération, la somme des entiers écrits sur le tableau reste impaire, et l'un de ces entiers est congru à $2 \pmod 5$. Par conséquent, le dernier entier écrit sur le tableau est congru à $1 \pmod 2$ et à $2 \pmod 5$, c'est-à-dire à $7 \pmod{10}$.

Exercice 2. Soit ABC un triangle isocèle en A, tel que $\widehat{BAC} = 100°$. Soit D le point d'intersection de (AC) et de la bissectrice de $\widehat{ABC}$.
Montrer que $BC = AD + BD$.

Solution de l'exercice 2 D'après la loi des sinus, notons que $BD \leqslant BC$ si et seulement si $\sin(\widehat{BCD}) \leqslant \sin(\widehat{BDC})$. Puisque $\widehat{BDC} = 130°$ et $\widehat{BCD} = 40°$, on a bien $BD \geqslant BC$. Soit E le point de $[BC]$ tel que $BD = BE$, et soit A' le symétrique de A par rapport à (AD).
La loi des sinus indique alors que

$$CE = \frac{\sin(\widehat{CDE})}{\sin(\widehat{ECD})} DE = \frac{\sin(\widehat{CDE})}{\sin(\widehat{ECD})} \times \frac{\sin(\widehat{EA'D})}{\sin(\widehat{A'ED})} A'D = \frac{\sin(40°)\sin(80°)}{\sin(40°)\sin(80°)} AD = AD.$$

On en déduit que $BC = CE + BE = AD + BD$.

Exercice 3. Trouver tous les entiers naturels non nuls k, ℓ tels que $2^k + 3^\ell$ soit un carré parfait.

Solution de l'exercice 3 Une première idée est de consiérer l'équation de l'énoncé modulo n, où n est un nombre pas trop grand tel que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ne contienne pas trop de résidus quadratiques. Dans ces conditions, $n = 3$ et $n = 8$ semblent de bons candidats, car les carrés modulo 3 sont 0 et 1, alors que les carrés modulo 8 sont 0, 1 et 4.
Puisque $k \geqslant 1$ et $\ell \geqslant 1$, on a donc $2^k \equiv 1 \pmod 3$ et $3^\ell \equiv 1 \pmod 8$, ce qui signifie que k et ℓ sont pairs. En posant $a = k/2$, $b = \ell/2$ et $c = \sqrt{2^k + 3^\ell}$, on remarque alors que $(c - 2^a)(c + 2^a) = c^2 - 2^k = 3^\ell$ est une puissance de 3.
Puisque $\mathrm{PGCD}(3, c - 2^a, c + 2^a)$ divise $\mathrm{PGCD}(3, 2^{a+1}) = 1$, l'un des facteurs $c - 2^a$ et $c + 2^a$ vaut nécessairement 3^ℓ, tandis que l'autre vaut 1. Le facteur $c + 2^a$ est le plus grand des deux, ce qui montre que $c - 2^a = 1$ et $c + 2^a = 3^\ell$, donc que $2^{a+1} = 3^\ell - 1 = 9^b - 1 = (3^b - 1)(3^b + 1)$.
De même, puisque $3^b - 1$ et $3^b + 1$ sont pairs et que $\mathrm{PGCD}(2, 3^b - 1, 3^b + 1)$ divise 2, l'un des facteurs $3^b - 1$ et $3^b + 1$ vaut nécessairement 2^a, tandis que l'autre vaut 2. Par conséquent, $3^b - 1 = 2$ et $3^b + 1 = 2^a$, ce qui montre que $a = 2$ et $b = 1$, ou encore $k = 4$ et $\ell = 2$.
Réciproquement, si $(k, \ell) = (4, 2)$, on a bien $2^k + 3^\ell = 2^4 + 3^2 = 16 + 9 = 25 = 5^2$. Ceci montre que la paire $(k, \ell) = (4, 2)$ est la seule solution du problème.

Exercice 4. Soit a, b, c, d des réels tels que $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant c \leqslant d$.
Montrer que
$$ab^3 + bc^3 + cd^3 + da^3 \geqslant a^2b^2 + b^2c^2 + c^2d^2 + d^2a^2.$$

Solution de l'exercice 4 Une première idée est de considérer les sommes « symétriques » l'une de l'autre $S_1 = ab^3 + bc^3 + cd^3 + da^3$ et $S_2 = a^3b + b^3c + c^3d + d^3a$. On constate alors que
$$S_1 - S_2 = (d^3 - b^3)(c - a) + (c^3 - a^3)(b - d) = (d - b)(c - a)(d^2 + bd + d^2 - c^2 - ac - a^2) \geqslant 0.$$
L'inégalité de Cauchy-Schwarz indique alors que $S_1^2 \geqslant S_1 S_2 \geqslant (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2d^2 + d^2a^2)^2$, ce qui conclut.

Exercices du groupe A – Énoncés et solutions

Exercice 5. Soit n un entier naturel impair, et soit $a_1, \ldots, a_n$ des entiers naturels non nuls. On note A le produit des entiers a_i, et d leur plus grand diviseur commun.
Montrer que
$$\mathrm{PGCD}(a_1^n + A, a_2^n + A, \ldots, a_n^n + A) \leqslant 2d^n.$$

Solution de l'exercice 5 Pour tout i, on pose $b_i = a_i/d$, de sorte que $\mathrm{PGCD}(b_1, \ldots, b_n) = 1$, et on pose également $B = b_1 \times \ldots \times b_n$ et $\Delta = \mathrm{PGCD}(b_1^n + B, b_2^n + B, \ldots, b_n^n + B)$. Alors $\mathrm{PGCD}(a_1^n + A, a_2^n + A, \ldots, a_n^n + A) = d^n \times \Delta$, et il reste à démontrer que $\Delta \leqslant 2$.
On considère alors un éventuel facteur premier p de Δ. Si p divise un des entiers b_i, alors il divise B également, donc il divise chaque entier b_j, ce qui est absurde. Par conséquent, p ne divise aucun des entiers b_i, et ne divise pas B non plus. Cela montre que Δ est premier avec B.
Or, puisque $b_1^n \equiv b_2^n \equiv \ldots \equiv b_n^n = -B \pmod{\Delta}$, alors $B^n \equiv b_1^n \times \ldots \times b_n^n \equiv (-1)^n B^n \equiv -B^n \pmod{\Delta}$. Par conséquent, Δ divise $2B^n$. On en déduit que Δ divise 2, ce qui conclut.

Exercice 6. Soit q un nombre réel. Margaret a écrit 10 nombres réels, deux à deux distincts, sur une ligne. Puis elle ajoute trois lignes comme suit :
- sur la 2^{nde} ligne, elle écrit tous les nombres de la forme $a - b$, où a et b sont deux réels (non nécessairement distincts) de la $1^{\text{ère}}$ ligne ;
- sur la $3^{\text{ème}}$ ligne, elle écrit tous les nombres de la forme qab, où a et b sont deux réels (non nécessairement distincts) de la 2^{nde} ligne ;
- sur la $4^{\text{ème}}$ ligne, elle écrit tous les nombres de la forme $a^2 + b^2 - c^2 - d^2$, où a, b, c et d sont des réels (non nécessairement distincts) de la 2^{nde} ligne.

Trouver tous les réels q tels que, quels que soient les 10 nombres écrits sur la $1^{\text{ère}}$ ligne, chaque nombre de la $3^{\text{ème}}$ ligne soit également sur la $4^{\text{ème}}$ ligne.

Solution de l'exercice 6 On va dire qu'un réel q est *bon* s'il a la propriété demandée dans l'énoncé. Tout d'abord, il est clair que, si q est bon, alors $-q$ l'est aussi, et réciproquement. D'autre part, $q = 0$ est manifestement bon. On cherche donc les bons réels $q > 0$, s'il y en a.
Soit λ un grand nombre réel et soit $\varepsilon = 1/\lambda$. On suppose que Margaret a écrit dix nombres $x_1, \ldots, x_{10}$ tels que $0 \leqslant x_1 < \ldots < x_8 \leqslant \varepsilon$, $x_9 = 1$ et $x_{10} = \lambda$. Alors la 2^{nde} ligne contient les nombres $\pm\lambda$, $\pm(\lambda - 1)$ et ± 1, ainsi que des éléments de l'ensemble $\Omega_2 = [0, 1] \cup [\lambda - \varepsilon, \lambda]$ et leurs opposés. En particulier, Margaret écrit donc les réels $q\lambda^2$ et $q\lambda$ sur la $3^{\text{ème}}$ ligne.

On considère alors un nombre de la $4^{\text{ème}}$ ligne, de la forme $z = a^2 + b^2 - c^2 - d^2$, et tel que $z \geqslant 0$. Chacun des réels a^2, b^2, c^2, d^2 appartient à l'ensemble $\{0, \lambda^2\} + \{-2\lambda, 0\} + [0, 2]$, donc z appartient à l'ensemble $\Omega_4 = \{0, \lambda^2, 2\lambda^2\} + \{-4\lambda, -2\lambda, 0, 2\lambda, 4\lambda\} + [-4, 4]$.
Si q est bon, alors $q\lambda^2$ et $q\lambda$ appartiennent à Ω_4, donc en faisant tendre λ vers $+\infty$ on en déduit respectivement que $q \in \{1, 2\}$ et que $q \in \{2, 4\}$. Cela montre que seul $q = 2$ est susceptible d'être bon.
Réciproquement, si $q = 2$, tout nombre de la $3^{\text{ème}}$ est de la forme $2(a - b)(c - d)$ avec a, b, c, d des réels de la $1^{\text{ère}}$ ligne. Puisque $2(a - b)(c - d) = (a - d)^2 + (b - c)^2 - (a - c)^2 - (b - d)^2$, ce nombre est figure également sur la $4^{\text{ème}}$ ligne. Par conséquent, les bons réels sont -2, 0 et 2.

Exercice 7. Soit ABC un triangle acutangle non isocèle. Soit O le centre du cercle circonscrit à ABC et H l'orthocentre de ABC. Soit P et Q les points d'intersection respectifs de (AO) avec (BH) et (CH).
Montrer que le centre du cercle circonscrit à PQH se situe sur une médiane du triangle ABC.

Solution de l'exercice 7 Soit Ω le cercle circonscrit à ABC, ω le cercle circonscrit à PQH, et X le centre de ω. Puisque B et C jouent des rôles symétriques, on va montrer que X se trouve sur la médiane issue de A. Soit alors M le point d'intersection des droites (AX) et (BC) : montrons que M est le milieu de $[BC]$, c'est-à-dire que $\widehat{CMO} = 90°$.
Tout d'abord, une simple chasse aux angles montre que $\widehat{QHP} = \widehat{CAB}$, $\widehat{HPQ} = \widehat{ABC}$ et $\widehat{PQH} = \widehat{PHA} = \widehat{BCA}$. Les triangles ABC et HPQ sont donc semblables, et il existe une similitude s telle que $s(A) = H$, $s(B) = P$, $s(C) = Q$ et $s(O) = X$.
D'autre part, puisque $\widehat{PQH} = \widehat{PHA}$ on sait que (AH) est tangente à ω en H. Par conséquent, si on pose $S = s^{-1}(A)$, alors on sait que S est le point d'intersection de (BC) et de la tangente à Ω en A. Puisque s envoie BSO sur PAX, on en déduit que $\widehat{MSO} = \widehat{BSO} = \widehat{XAP} = \widehat{MAO}$, donc que les points M, S, O et A sont cocycliques. Or, $\widehat{SAO} = 90°$. Il s'ensuit que $\widehat{SMO} = 90°$ également, ce qui conclut.