PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

TEST DU 28 MARS 2018
DURÉE : 4 HEURES (14H-18H)

Instructions

- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en lettres capitales vos nom et prénom en haut à gauche ainsi que votre classe, et le numéro du problème en haut à droite.**
- On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
  Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le probléme.
  Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- Régles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.
- Le groupe B est constitué des élèves nés le 21 décembre 2002 au plus tôt. Le groupe A est constitué des autres élèves.
- Les exercices 1 à 4 ne sont à chercher que par les élèves du groupe B.
- Les exercices 5 à 7 ne sont à chercher que par les élèves du groupe A.

Préparation Olympique Française de Mathématiques
Animath
Institut Henri Poincaré
11-13 rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05

Exercices du groupe B

Exercice 1. Les entiers $1, 2, \ldots, 2018$ sont écrits au tableau. On effectue alors 2017 opérations comme suit : choisir deux nombres a et b, les effacer, et écrire $a + b + 2ab$ à la place. À la fin, il ne reste qu'un seul entier sur le tableau.
Quelles sont les valeurs que son chiffre des unités peut prendre ?

Exercice 2. Soit ABC un triangle isocèle en A, tel que $\widehat{BAC} = 100°$. Soit D le point d'intersection de (AC) et de la bissectrice de $\widehat{ABC}$.
Montrer que $BC = AD + BD$.

Exercice 3. Trouver tous les entiers naturels non nuls k, ℓ tels que $2^k + 3^\ell$ soit un carré parfait.

Exercice 4. Soit a, b, c, d des réels tels que $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant c \leqslant d$.
Montrer que
$$ab^3 + bc^3 + cd^3 + da^3 \geqslant a^2b^2 + b^2c^2 + c^2d^2 + d^2a^2.$$

Exercices du groupe A

Exercice 5. Soit n un entier naturel impair, et soit $a_1, \ldots, a_n$ des entiers naturels non nuls. On note A le produit des entiers a_i, et d leur plus grand diviseur commun.
Montrer que
$$\mathrm{PGCD}(a_1^n + A, a_2^n + A, \ldots, a_n^n + A) \leqslant 2d^n.$$

Exercice 6. Soit q un nombre réel. Margaret a écrit 10 nombres réels, deux à deux distincts, sur une ligne. Puis elle ajoute trois lignes comme suit :

- ▷ sur la 2^{nde} ligne, elle écrit tous les nombres de la forme $a - b$, où a et b sont deux réels (non nécessairement distincts) de la $1^{\text{ère}}$ ligne ;
- ▷ sur la $3^{\text{ème}}$ ligne, elle écrit tous les nombres de la forme qab, où a et b sont deux réels (non nécessairement distincts) de la 2^{nde} ligne ;
- ▷ sur la $4^{\text{ème}}$ ligne, elle écrit tous les nombres de la forme $a^2 + b^2 - c^2 - d^2$, où a, b, c et d sont des réels (non nécessairement distincts) de la 2^{nde} ligne.

Trouver tous les réels q tels que, quels que soient les 10 nombres écrits sur la $1^{\text{ère}}$ ligne, chaque nombre de la $3^{\text{ème}}$ ligne soit également sur la $4^{\text{ème}}$ ligne.

Exercice 7. Soit ABC un triangle acutangle non isocèle. Soit O le centre du cercle circonscrit à ABC et H l'orthocentre de ABC. Soit P et Q les points d'intersection respectifs de (AO) avec (BH) et (CH).
Montrer que le centre du cercle circonscrit à PQH se situe sur une médiane du triangle ABC.