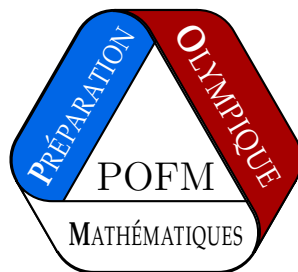


PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES



TEST DU 28 MARS 2018
DURÉE : 4 HEURES (14H-18H)

Instructions

- ▷ Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en lettres capitales vos nom et prénom en haut à gauche ainsi que votre classe, et le numéro du problème en haut à droite.
- ▷ On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie. Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème. Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- ▷ Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- ▷ Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits. Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.
- ▷ Le groupe B est constitué des élèves nés le 21 décembre 2002 au plus tôt. Le groupe A est constitué des autres élèves.
- ▷ Les exercices 1 à 4 ne sont à chercher que par les élèves du groupe B.
- ▷ Les exercices 5 à 7 ne sont à chercher que par les élèves du groupe A.

Préparation Olympique Française de Mathématiques
Animath
Institut Henri Poincaré
11-13 rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05

Exercices du groupe B

Exercice 1. Les entiers $1, 2, \dots, 2018$ sont écrits au tableau. On effectue alors 2017 opérations comme suit : choisir deux nombres a et b , les effacer, et écrire $a + b + 2ab$ à la place. À la fin, il ne reste qu'un seul entier sur le tableau.

Quelles sont les valeurs que son chiffre des unités peut prendre ?

Exercice 2. Soit ABC un triangle isocèle en A , tel que $\widehat{BAC} = 100^\circ$. Soit D le point d'intersection de (AC) et de la bissectrice de \widehat{ABC} .

Montrer que $BC = AD + BD$.

Exercice 3. Trouver tous les entiers naturels non nuls k, ℓ tels que $2^k + 3^\ell$ soit un carré parfait.

Exercice 4. Soit a, b, c, d des réels tels que $0 \leq a \leq b \leq c \leq d$.

Montrer que

$$ab^3 + bc^3 + cd^3 + da^3 \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2d^2 + d^2a^2.$$

Exercices du groupe A

Exercice 5. Soit n un entier naturel impair, et soit a_1, \dots, a_n des entiers naturels non nuls. On note A le produit des entiers a_i , et d leur plus grand diviseur commun.

Montrer que

$$\text{PGCD}(a_1^n + A, a_2^n + A, \dots, a_n^n + A) \leq 2d^n.$$

Exercice 6. Soit q un nombre réel. Margaret a écrit 10 nombres réels, deux à deux distincts, sur une ligne. Puis elle ajoute trois lignes comme suit :

- ▷ sur la 2nde ligne, elle écrit tous les nombres de la forme $a - b$, où a et b sont deux réels (non nécessairement distincts) de la 1^{ère} ligne ;
- ▷ sur la 3^{ème} ligne, elle écrit tous les nombres de la forme qab , où a et b sont deux réels (non nécessairement distincts) de la 2nde ligne ;
- ▷ sur la 4^{ème} ligne, elle écrit tous les nombres de la forme $a^2 + b^2 - c^2 - d^2$, où a, b, c et d sont des réels (non nécessairement distincts) de la 2nde ligne.

Trouver tous les réels q tels que, quels que soient les 10 nombres écrits sur la 1^{ère} ligne, chaque nombre de la 3^{ème} ligne soit également sur la 4^{ème} ligne.

Exercice 7. Soit ABC un triangle acutangle non isocèle. Soit O le centre du cercle circonscrit à ABC et H l'orthocentre de ABC . Soit P et Q les points d'intersection respectifs de (AO) avec (BH) et (CH) .

Montrer que le centre du cercle circonscrit à PQH se situe sur une médiane du triangle ABC .