Olympiade Francophone de Mathématiques

Deuxième édition

Épreuve Senior

27 mars 2021

Durée : 4 heures et demie.
Difficulté : Les exercices *ne sont pas* classés selon leur difficulté.
Points : Chaque exercice vaut 7 points.

1. Soient $a_1, a_2, a_3, \ldots$ et $b_1, b_2, b_3, \ldots$ deux suites de nombres entiers strictement positifs telles que $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ et $b_{n+2} = b_{n+1} + b_n$ pour tout $n \geqslant 1$. On suppose que a_n divise b_n pour une infinité d'entiers $n \geqslant 1$. Montrer qu'il existe un nombre entier c tel que $b_n = ca_n$ pour tout $n \geqslant 1$.

2. Albert et Béatrice jouent à un jeu. On a posé 2021 cailloux sur une table. En alternance et en commençant par Albert, ils vont retirer un certain nombre de cailloux de la table en respectant la règle suivante. Au tour $n \geqslant 1$, le joueur dont c'est le tour, c'est-à-dire Albert si n est impair et Béatrice si n est pair, peut retirer un nombre de cailloux entre 1 et n. Au premier tour, Albert doit donc retirer 1 caillou ; au deuxième tour, Béatrice peut retirer 1 ou 2 cailloux ; au troisième tour, Albert peut en retirer 1, 2 ou 3, et ainsi de suite. Celui qui retire le dernier caillou de la table perd la partie. Déterminer lequel des deux joueurs a une stratégie pour gagner à coup sûr.

3. Soit $ABCD$ un carré et Γ son cercle inscrit. Soit M le milieu du segment $[CD]$. Soit P un point sur le segment $[AB]$ différent de B. La droite parallèle à la droite (DP) passant par M coupe Γ une deuxième fois en E. Les droites (CP) et (AD) se coupent en F. Montrer que la droite (EF) est tangente au cercle Γ.

4. On note $\mathbb{N}_{\geqslant 1}$ l'ensemble des entiers supérieurs ou égaux à 1. Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{N}_{\geqslant 1} \to \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ telles que les trois conditions suivantes soient satisfaites pour tous les entiers $m \geqslant 1$ et $n \geqslant 1$:

(a) $n = (f(2n) - f(n))(2f(n) - f(2n))$,

(b) $f(m)f(n) - f(mn) = (f(2m) - f(m))(2f(n) - f(2n)) + (f(2n) - f(n))(2f(m) - f(2m))$,

(c) $m - n$ divise $f(2m) - f(2n)$ si m et n sont deux nombres premiers impairs distincts.