Olympiade Francophone de Mathématiques – Édition 2020

Épreuve Junior

Chaque problème est noté sur 7 points
Les problèmes ne sont *pas* classés par ordre de difficulté

Problème 1

Soit ABC un triangle tel que $AB < AC$, ω son cercle inscrit et Γ son cercle circonscrit. Soit également ω_b le cercle exinscrit relatif au sommet B, c'est-à-dire le cercle tangent aux droites (AB), (BC), (CA) et séparé de B par la droite (AC), puis B' le point de tangence entre ω_b et (AC). De même, soit le cercle ω_c le cercle exinscrit relatif au sommet C, c'est-à-dire le cercle tangent aux droites (AB), (BC), (CA) et séparé de C par la droite (AB), puis C' le point de tangence entre ω_c et (AB). Enfin, soit I le centre de ω et X le point de Γ tel que $\widehat{XAI}$ soit un angle droit.

Démontrer que les triangles XBC' et XCB' sont isométriques, c'est-à-dire que $XB = XC$, $BC' = CB'$ et $C'X = B'X$.

Problème 2

L'empereur Zorg souhaite fonder une colonie sur une nouvelle planète. Chacune des n villes qu'il y établira devra parler exactement une des 2020 langues officielles de l'empire. Certaines villes de la colonie seront reliées par une liaison aérienne directe, chaque liaison pouvant être empruntée dans les deux sens. L'empereur a fixé le coût du billet de chaque liaison à 1 crédit galactique. Il souhaite que, étant données deux villes quelconques parlant la même langue, il soit toujours possible de voyager de l'une à l'autre via ces liaisons aériennes, et que le voyage le moins cher entre ces deux villes coûte exactement 2020 crédits galactiques.

Pour quelles valeurs de n l'empereur Zorg peut-il réaliser son rêve ?

Problème 3

Soit n un entier supérieur ou égal à 1. Trouver, en fonction de n, le plus petit entier $k \geqslant 2$ tel que, parmi k nombres réels quelconques, il en existe nécessairement deux dont la différence, en valeur absolue, est soit strictement inférieure à $1/n$, soit strictement supérieure à n.

Problème 4

Trouver tous les entiers x, y et z supérieurs ou égaux à 0 tels que

$$2^x + 9 \times 7^y = z^3.$$

Durée de l'épreuve : 4 heures et demie