Mathématiques pour l'informatique
IMAC première année
- *Soutien* -

1 Nombres complexes

Rappels 1.
- Un nombre complexe z admet plusieurs représentations :
  - *représentation vectorielle* $z = (a,\ b)$ où $a,\ b \in \mathbb{R}$;
  - *représentation algébrique* $z = a + ib$ où $a,\ b \in \mathbb{R}$;
  - *représentation trigonométrique* $z = \rho \times (\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ où $\rho = |z|$ et $\theta = \arg(z)$;
  - *représentation exponentielle* $z = \rho \times \exp(i\theta)$ où $\rho = |z|$ et $\theta = \arg(z)$.
- Le *module* $|z|$ d'un nombre complexe $z = a + bi$ est le nombre réel $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- L'*argument* $\arg(z)$ d'un nombre complexe $z = a + ib$ est la valeur de l'angle formé par les droites de vecteurs directeurs $(1,\ 0)$ et $(a,\ b)$ du plan complexe.
- Le *conjugué* $\bar{z}$ de $z = a + bi$ est le nombre complexe $\bar{z} = a - bi$.

Exercice 1. (Nombres complexes) Soit le nombre complexe $z = (2 + 2i)^7$.

1. Écrire z sous forme algébrique.
2. Écrire z sous forme trigonométrique.
3. Écrire z sous forme exponentielle.
4. Calculer z^{-1}, l'inverse de z.
5. Calculer le module et l'argument de z^{-1}.

2 Suites

Rappels 2.
- Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R}$. La suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge* s'il existe un réel a tel que pour tout réel $\epsilon > 0$ il existe un entier n_0 tel que

$$n > n_0 \Longrightarrow |\alpha_n - a| < \epsilon. \tag{1}$$

  Le réel a est la *limite* de la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- Si une suite ne converge pour aucun réel, elle est dite *divergente*.
- Si $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui convergent respectivement vers les réels a et b, alors

$$\lim_{n\to\infty}(\lambda \times \alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} = \lambda \times a \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}; \tag{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha_n + \beta_n)_{n\in\mathbb{N}} = a + b; \tag{3}$$

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha_n \times \beta_n)_{n\in\mathbb{N}} = a \times b; \tag{4}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\alpha_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \frac{1}{a} \text{ si pour tout } n \in \mathbb{N}, \alpha_n \neq 0 \text{ et } a \neq 0. \tag{5}$$

Exercice 2. (Limites de suites)

1. Montrer les égalités (2), (3) et (4).

2. Montrer que toute suite convergente admet une limite unique.

3. Montrer que toute suite convergente est bornée.

Exercice 3. (Calcul de limites) Soit la suite réelle

$$\alpha_n = \frac{1}{\frac{n^2}{2+4n^2} \times \frac{1}{n^3+1} + 3} + \frac{7n^2+n+5}{3n^2-n+1}. \tag{6}$$

1. Décomposer l'expression de α_n en une expression faisant intervenir plusieurs suites dont la convergence est facile à étudier.

2. Étudier les convergences des suites intervenant dans l'expression donnée.

3. Utiliser les résultats de l'exercice précédent pour déterminer la limite de la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 4. (Étude de suites) Pour chacune des suites suivantes, dire si elles sont monotones, convergentes ou divergentes et donner leur limite.

1. $\alpha_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$;

2. $\alpha_n = \dfrac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n}$ pour $n \geq 1$;

3. $\alpha_n = \dfrac{1}{n} + (-1)^n$ pour $n \geq 1$;

4. $\alpha_n = \dfrac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$;

5. $\alpha_n = \dfrac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$;

6. $\alpha_n = \dfrac{n \times \sin(n)}{n^2+1}$.

3 Limites de fonctions

Rappels 3. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction d'une variable réelle.

- La *limite* de f au point a est le réel ℓ si pour tout réel $\epsilon > 0$ il existe un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout point $x \in D$ on a
$$|x-a| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon. \tag{7}$$
- On dit que $+\infty$ est limite de f au point a si pour tout réel positif y, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que
$$|x-a| < \alpha \Longrightarrow f(x) > y. \tag{8}$$
- On dit que $-\infty$ est limite de f au point a si pour tout réel négatif y, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que
$$|x-a| < \alpha \Longrightarrow f(x) < y. \tag{9}$$

Exercice 5. (Calcul de limites de fonctions) Calculer les limites suivantes aux points indiqués.

1. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+x-2}{x-1}$;

2. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{2-\sqrt{x}}{x-4}$;

3. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^4+x^2+1}{x^3-2}$;

4. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3+3x^2-3x-1}{x^2+x-2}$;

5. $\lim\limits_{x\to 0} x+1+|x|$;

6. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x\sqrt{x}+x}{x^2+4x+1}$;

7. $\lim\limits_{x\to +\infty} x - \sqrt{x^2-x}$;

8. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$;

9. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{1-x^3}$;

10. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1}$;

11. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$, où a est un réel strictement positif quelconque.

4 Continuité

Rappels 4. • Soit f une fonction réelle définie sur une partie D de $\mathbb{R}$. La fonction f est continue au point $a \in D$ si pour tout réel $\epsilon > 0$, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in I$ on ait

$$|x - a| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon. \tag{10}$$

• De manière équivalente, la fonction réelle f est continue au point a si $\lim_{h \to 0} f(a + h) = f(a)$.

Exercice 6. (Continuité) Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes, le prolonger par continuité si possible, puis étudier leur continuité.

1. $f(x) = 2x^3 + x^2 - 2x + 2$;
2. $f(x) = \dfrac{1}{1 - x}$;
3. $f(x) = \dfrac{2x^2 + x - 1}{\sqrt{x + 1}}$;
4. $f(x) = \dfrac{2x^3 + 2x^2 - x - 1}{|x + 1|}$;
5. $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + x}{2|x|} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{sinon ;} \end{cases}$$
6. $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x}{\sqrt{x^2 - 2x + 1}} & \text{si } x \neq 1, \\ 1 & \text{sinon ;} \end{cases}$$
7. $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{\dfrac{1}{x} + x} - \sqrt{\dfrac{1}{x} - x}}{x + |x|} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{sinon ;} \end{cases}$$
8. $$f(x) = \begin{cases} 4\sqrt{x^2 + 1} & \text{si } x \leq 1, \\ \dfrac{x^2 - 1}{\sqrt{x^2 + a^2} - \sqrt{x + a^2}} & \text{sinon,} \end{cases}$$

   où a est un réel quelconque.

5 Dérivabilité

Rappels 5. • Soit f une fonction d'une variable réelle. La dérivée de f est la fonction f' définie par :

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \tag{11}$$

- Une fonction f est dite *dérivable* au point a si sa dérivée est définie au point a.
- Voici quelques règles de dérivation usuelles. f et g sont deux fonctions d'une variable réelles.

$$(f+g)' = f' + g'; \tag{12}$$
$$(f \times g)' = f' \times g + f \times g'; \tag{13}$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{g \times f' - g' \times f}{g^2}; \tag{14}$$
$$(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'. \tag{15}$$

- Voici une liste des dérivées de fonctions usuelles ($\lambda,\ n \in \mathbb{R}$) :

$$f(x) = \lambda \quad , \quad f'(x) = 0; \tag{16}$$
$$f(x) = \lambda \times x \quad , \quad f'(x) = \lambda; \tag{17}$$
$$f(x) = \frac{1}{x} \quad , \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2}; \tag{18}$$
$$f(x) = \sqrt{x} \quad , \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}; \tag{19}$$
$$f(x) = x^n \quad , \quad f'(x) = n \times x^{n-1}; \tag{20}$$
$$f(x) = \cos(x) \quad , \quad f'(x) = -\sin(x); \tag{21}$$
$$f(x) = \sin(x) \quad , \quad f'(x) = \cos(x); \tag{22}$$
$$f(x) = \ln(x) \quad , \quad f'(x) = \frac{1}{x}; \tag{23}$$
$$f(x) = \exp(x) \quad , \quad f'(x) = \exp(x). \tag{24}$$

- Si f est une fonction d'une variable réelle dérivable au point a alors f est continue en a. La réciproque est fausse.
- Soit f une fonction d'une variable réelle, f' sa dérivée et I un intervalle où f et f' sont toutes deux définies.
  - Si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$, alors f est croissante sur l'intervalle I.
  - Si $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$, alors f est décroissante sur l'intervalle I.
  - Si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$, alors f est constante sur l'intervalle I.

Exercice 7. (Étude de fonctions) Pour chacune des fonctions réelles suivantes, donner son intervalle de définition, étudier sa dérivabilité, sa continuité, et donner son tableau de variations :

1. $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$;
2. $f(x) = \sqrt{x} - \ln(x)$;
3. $f(x) = \dfrac{x^2 + \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$;
4. $f(x) = \ln\left(\dfrac{1}{x-1}\right) \times \dfrac{1}{x-2}$;
5. $f(x) = \ln(x) \times \exp(-x)$.

6 Comparaison de fonctions

Rappels 6. Soient $\alpha > 0$ un réel et f et g deux fonctions définies sur l'intervalle $[a-\alpha,\ a+\alpha]$.

- f est *négligeable* devant g au point a si pour tout réel $\epsilon > 0$ il existe un réel α tel que pour tout $x \in [a-\alpha,\ a+\alpha]$ on a $|f(x)| \leq \epsilon \times |g(x)|$.
  S'il existe un réel α tel que la fonction g ne s'annule pas dans l'intervalle $[a-\alpha,\ a+\alpha]$, cette propriété est satisfaite si et seulement si $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.
  Cette propriété est notée $f \ll_a g$.
- f est *équivalente* à g au point a si $f - g \ll_a g$.
  S'il existe un réel α tel que la fonction g ne s'annule pas dans l'intervalle $[a-\alpha,\ a+\alpha]$, cette propriété est satisfaite si et seulement si $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.
  Cette propriété est notée $f\ \sim_a\ g$.
  Voici quelques propriétés de cette relation (λ réel non nul) :

$$f \sim_a g \implies \lambda \times f \sim_a \lambda \times g \tag{25}$$

$$f_1 \sim_a g_1 \text{ et } f_2 \sim_a g_2 \implies f_1 \times f_2 \sim_a g_1 \times g_2 \tag{26}$$

$$f \sim_a g \implies \frac{1}{f} \sim_a \frac{1}{g} \tag{27}$$

Exercice 8. (Équivalence et additivité) On souhaite construire un contre-exemple pour montrer que la relation $\sim_a$ n'est pas compatible avec l'addition de fonctions.

1. Montrer la relation $-1 \sim_0 -1$.
2. Montrer la relation $x^2 + 1 \sim_0 x + 1$.
3. Montrer la relation $x^2 \nsim_0 x$.
4. En déduire que la relation $\sim_a$ n'est pas compatible avec l'addition de fonction : $f_1 \sim_a g_1$ et $f_2 \sim_a g_2$ n'implique pas $f_1 + f_2 \sim_a g_1 + g_2$.

Exercice 9. (Équivalence de fonctions) Affirmer ou infirmer les assertions suivantes :

1. $\sin(x) \sim_0 \tan(x)$;
2. $x^3 \sim_0 x^4$;
3. $x^2 + x^3 \sim_0 x^2 + x^4$;
4. $\exp(x) - 1 \sim_0 x$;
5. $x^3 + 2x - 6 \sim_{+\infty} x^3 - 3x^{5/2}$.

Exercice 10. (Comparaison de fonctions) Remplacer le symbole de relation $\mathcal{R}$ par $\ll_a$ ou $\gg_a$ dans les expressions suivantes :

1. $x^2\ \mathcal{R}\ x^3$, $a = 0$;
2. $x^n\ \mathcal{R}\ x^m$, $n,\ m \in \mathbb{N}$, $a = 0$;
3. $\dfrac{1}{x^2}\ \mathcal{R}\ \dfrac{1}{x^3}$, $a = 0$;
4. $\dfrac{1}{x^n}\ \mathcal{R}\ \dfrac{1}{x^m}$, $n,\ m \in \mathbb{N}$, $a = 0$;
5. $1 - \cos(x)\ \mathcal{R}\ x^2$, $a = 0$;
6. $x^2\ \mathcal{R}\ x^3$, $a = +\infty$;
7. $x^n\ \mathcal{R}\ x^m$, $n,\ m \in \mathbb{N}$, $a = +\infty$;
8. $x\ \mathcal{R}\ \ln(x)$, $a = +\infty$;
9. $x\ \mathcal{R}\ \exp(x)$, $a = +\infty$.

7 Développements limités

Rappels 7.
- Les développements limités permettent d'approximer une fonction en un point au moyen d'un polynôme.
- Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction d'une variable réelle et a un point. La fonction f admet un développement limité d'ordre n en a s'il existe un n-uplet $(\alpha_0,\ \alpha_1,\ ...,\ \alpha_n)$ de réels et une fonction $r : D \to \mathbb{R}$ telle que
$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \alpha_2(x-a)^2 + ... + \alpha_n(x-a)^n + r(x) \tag{28}$$
avec
$$\lim_{x\to a} \frac{r(x)}{(x-a)^n} = 0. \tag{29}$$
De manière équivalente, étant donné que la fonction $r(x)$ est négligeable devant $(x-a)^n$, l'expression (28) se réécrit en
$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \alpha_2(x-a)^2 + ... + \alpha_n(x-a)^n + o((x-a)^n). \tag{30}$$
- Si $f : D \to \mathbb{R}$ est dérivable n fois au point a, alors le développement limité d'ordre n de f en a est
$$f(x) = \sum_{0\le k\le n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n). \tag{31}$$
- Les développements limités sont compatibles avec la multiplication par un réel, la somme et le produit. Si les fonctions f et g admettent les développements limités $f(x) = P(x) + o(x^n)$ et $g(x) = Q(x) + o(x^n)$ au point 0 à l'ordre n, alors :
  - le développement limité de la fonction $\lambda \times f$ est $(\lambda \times f)(x) = \lambda \times P(x) + o(x^n)$;
  - le développement limité de la fonction $f + g$ est $(f+g)(x) = P(x) + Q(x) + o(x^n)$;
  - le développement limité de la fonction $f \times g$ est $(f\times g)(x) = S(x) + o(x^n)$ où $S(x)$ est le polynôme $P(x)\times Q(x)$ où ses termes de degrés strictement supérieurs à n sont supprimés.
- Voici quelques développements limités usuels au point 0 ($\lambda \in \mathbb{R}$) :
$$\lambda^x = 1 + x\ln(\lambda) + \frac{x^2\ln(\lambda)^2}{2} + \frac{x^3\ln(\lambda)^3}{3!} + \ ...\ + \frac{x^n\ln(\lambda)^n}{n!} + o(x^n) \tag{32}$$
$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \ ...\ + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \tag{33}$$
$$(1+x)^\lambda = 1 + \lambda x + \frac{\lambda(\lambda-1)}{2}x^2 + \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)}{3!}x^3 + \ ...\ + \frac{\lambda(\lambda-1)...(\lambda-n+1)}{n!}x^n + o(x^n) \tag{34}$$
$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \ ...\ + (-1)^n\frac{1.3...(2n-3)}{2.4...2n}x^n + o(x^n) \tag{35}$$
$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ ...\ + x^n + o(x^n) \tag{36}$$
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ ...\ + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n) \tag{37}$$
$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ ...\ + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \tag{38}$$
$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \ ...\ + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \tag{39}$$

Exercice 11. (Calcul de développements limités) Calculer les développements limités au point a à l'ordre n des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{1}{4-x}$, $n = 5$, $a = 3$;
2. $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$, $n = 4$, $a = 0$;
3. $f(x) = 5x^3 + 2x^2 + 8x + 7$, $n = 2$, $a = 0$;
4. $f(x) = 5x^3 + 2x^2 + 8x + 7$, $n = 3$, $a = 0$;
5. $f(x) = 5x^3 + 2x^2 + 8x + 7$, $n = 4$, $a = 0$;
6. $f(x) = \dfrac{2x+3}{x^2+5x+2}$, $n = 3$, $a = 0$;
7. $f(x) = \sqrt{2+x}$, $n = 3$, $a = 0$;
8. $f(x) = \ln(1 + \sin(x))$, $n = 2$, $a = 0$;
9. $f(x) = \tan(x)$, $n = 4$, $a = 0$;
10. $f(x) = \tan(x)^2$, $n = 3$, $a = 0$.

Exercice 12. (Application des développements limités aux calculs de limites) Utiliser les développements limités pour calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^3}{\sin(x) - x}$;
2. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x \times \sin(x)}{1 - \cos(x)}$;
3. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\exp(x) - 1 - x}{\sin(x)}$;
4. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\exp(x)}{\sin(x)^2} - \dfrac{1}{x}$;
5. $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)^{\dfrac{1}{x}}$;
6. $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{1 - \tan(x)}{\cos(2x)}$.

8 Intégrales

Rappels 8. • Voici quelques règles usuelles de calcul de primitives. f et g sont deux fonctions d'une variable réelle et λ un réel.

$$\begin{aligned}
\int f + g \, \mathrm{d}x &= \int f \, \mathrm{d}x + \int g \, \mathrm{d}x && (40)\\
\int \lambda \times f \, \mathrm{d}x &= \lambda \times \int f \, \mathrm{d}x && (41)\\
\int f \times g' \, \mathrm{d}x &= \int (f \times g)' \, \mathrm{d}x - \int f' \times g \, \mathrm{d}x && (42)\\
\int f(x) \, \mathrm{d}x &= \int f(g(t)) \times g'(t) \, \mathrm{d}t && (43)
\end{aligned}$$

• Voici quelques primitives usuelles (λ, n, $c \in \mathbb{R}$) :

$$\begin{aligned}
\int \lambda \, \mathrm{d}x &= \lambda \times x + c && (44)\\
\int x^n \, \mathrm{d}x &= \frac{x^{n+1}}{n+1} + c,\ n \neq -1 && (45)\\
\int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x &= \ln(|x|) + c && (46)\\
\int \ln(x) \, \mathrm{d}x &= x\ln(x) - x + c && (47)\\
\int \exp(x) \, \mathrm{d}x &= \exp(x) + c && (48)\\
\int \lambda^x \, \mathrm{d}x &= \frac{\lambda^x}{\ln(\lambda)} + c,\ \lambda > 0 && (49)\\
\int \sin(x) \, \mathrm{d}x &= -\cos(x) + c && (50)\\
\int \cos(x) \, \mathrm{d}x &= \sin(x) + c && (51)
\end{aligned}$$

Exercice 13. (Calcul de primitives) Calculer les primitives suivantes :

1. $\int 3x^2 + x - 1 \, \mathrm{d}x$;
2. $\int 6x^3 + 2x^2 - x - 3 \, \mathrm{d}x$;
3. $\int \dfrac{5}{x^2 + 6x + 9} \, \mathrm{d}x$;
4. $\int \dfrac{1}{1 - x} \, \mathrm{d}x$;
5. $\int \dfrac{x^2 + 1}{x^3 + 3x + 7} \, \mathrm{d}x$;
6. $\int \dfrac{x}{x^2 + 9} \, \mathrm{d}x$;
7. $\int \dfrac{x}{x^2 + \dfrac{1}{4}} \, \mathrm{d}x$;
8. $\int \dfrac{1}{x \times \ln(x)} \, \mathrm{d}x$;

9. $\int \sqrt{x^2-1}\ \mathrm{d}\,x$;
10. $\int (x+1)\times\exp(x)\ \mathrm{d}\,x$;
11. $\int x^n \times \ln(x)\ \mathrm{d}\,x, n\in\mathbb{N}$;
12. $\int x\times\ln(x-1)\ \mathrm{d}\,x$;
13. $\int \sin(x)^2\ \mathrm{d}\,x$;
14. $\int \sin(x)^3\ \mathrm{d}\,x$;
15. $\int \sin(x)^4\ \mathrm{d}\,x$;
16. $\int \cos(x)\times\sin(x)\ \mathrm{d}\,x$.

Exercice 14. (Calcul d'intégrales) Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_2^9 x^3+3x^2+7\ \mathrm{d}\,x$;
2. $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{7}} \frac{1}{1-x}\ \mathrm{d}\,x$;
3. $\int_0^1 \exp(x)\ \mathrm{d}\,x$;
4. $\int_e^{2e} \ln(x)\ \mathrm{d}\,x$;
5. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(x)\ \mathrm{d}\,x$;
6. $\int_0^1 (2x+1)\exp(x)\ \mathrm{d}\,x$;
7. $\int_0^{\pi} (x+2)\sin(x)\ \mathrm{d}\,x$.

9 Équations différentielles

Rappels 9.

- La résolution d'une équation différentielle d'ordre 1 par la méthode de *séparation des variables* consiste à écrire l'équation différentielle sous la forme :

$$y'\times f(y) = g(x) \tag{52}$$

où y est la fonction inconnue, y' sa dérivée, f une fonction de y et g une fonction de x. Comme $y' := \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}$, l'équation (52) se réécrit en

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}\times f(y) = g(x) \tag{53}$$
$$\mathrm{d}\,y\times f(y) = \mathrm{d}\,x\times g(x) \tag{54}$$
$$\int f(y)\ \mathrm{d}\,y = \int g(x)\ \mathrm{d}\,x + c \tag{55}$$

où $c\in\mathbb{R}$ est la constante d'intégration. En posant respectivement F et G les primitives des fonctions f et g, on obtient la solution :

$$y = F^{-1}(G(x)+c). \tag{56}$$

- Une *équation différentielle d'ordre 1 linéaire homogène* est une équation différentielle de la forme :

$$y' - y\times f(x) = 0. \tag{57}$$

Cette équation se réécrit en

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} - y\times f(x) = 0 \tag{58}$$
$$\frac{1}{y}\ \mathrm{d}\,y = f(x)\ \mathrm{d}\,x \tag{59}$$
$$\int \frac{1}{y}\ \mathrm{d}\,y = \int f(x)\ \mathrm{d}\,x + c \tag{60}$$

où $c\in\mathbb{R}$ est la constante d'intégration. En posant F la primitive de la fonction f, on obtient la solution :

$$y = c\times\exp(F(x)) \tag{61}$$

Exercice 15. (Résolution d'équations différentielles d'ordre 1 par séparation des variables) Résoudre les équations différentielles suivantes par la méthode de séparation des variables. Déterminer l'intervalle de définition des solutions.

1. $y' \times 3y = 0$;
2. $y' \times 5(y + x) = 0$;
3. $y' \times \dfrac{1}{y} = x^2$;
4. $x \times y' \times \ln(x) = (3\ln(x) + 1) \times y$.

Exercice 16. (Résolution d'équations différentielles d'ordre 1 linéaires homogènes) Résoudre les équations différentielles suivantes. Déterminer l'intervalle de définition des solutions.

1. $y' + y = 0$;
2. $y' + 2y = 0$;
3. $y' + y^3 = 0$;
4. $y' + x \times y = 0$;
5. $y' + \frac{1}{x^2} y^4 = 0$;
6. $y' + \exp(x) \times y = 0$;
7. $y' - \exp(x) \times y^3 = 0$;
8. $y' + \cos(x) \times y^2 = 0$.