

## Relations d'ordre – démonstration 2

Soit l'énoncé

« Pour tout ensemble  $E$ , la relation binaire  $\subset$  sur  $\mathcal{P}(E)$  est une relation d'ordre. ».

**Démonstration** : montrons que  $\subset$  est réflexive. Soit  $F \in \mathcal{P}(E)$ . Comme tout ensemble est inclus dans lui-même, on a bien  $F \subset F$ . Ainsi,  $\subset$  est **réflexive**.

Montrons maintenant que  $\subset$  est antisymétrique. Soient  $F, G \in \mathcal{P}(E)$  tels que  $F \subset G$  et  $G \subset F$ . Alors, par le **théorème de la double inclusion**, on a  $F = G$ . Ceci entraîne que  $\subset$  est **antisymétrique**.

Montrons finalement que  $\subset$  est transitive. Soient  $F, G, H \in \mathcal{P}(E)$  tels que  $F \subset G$  et  $G \subset H$ . Ainsi, pour tout  $x \in F$ , on a  $x \in G$  et pour tout  $x \in G$ , on a  $x \in H$ . Ceci montre que pour tout  $x \in F$ , on a aussi  $x \in H$ . Ceci entraîne que  $F \subset H$ . La relation binaire  $\subset$  est donc **transitive**.

En conclusion,  $\subset$  est réflexive, antisymétrique et transitive. C'est donc une **relation d'ordre**.