Mathématiques discrètes
Fiche de TD 5

DUT 1 Informatique 2020–2021

Fonctions et applications

Exercice 1. ■ (Domaines, fonctions et applications)

Exprimer le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes et précisez celles qui sont des applications :

1. la fonction $f : \{0,1,2,3\} \to \{0,1,2,3,4\}$ définie par $f(x) := x + 1$;
2. la fonction $f : \{0,1,2,3\} \to \{0,1,2\}$ définie par $f(x) := x + 1$;
3. la fonction $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ définie par $f(x) := \frac{1}{x}$;
4. la fonction f de $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ définie par $f := \{(x, -x) : x \in \mathbb{N}\}$;
5. la fonction f de $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par

$$f(x) := \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x \text{ est pair,} \\ x + 1 & \text{sinon ;} \end{cases}$$

6. la fonction $f : \mathscr{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$ définie par $f(x) := \#x$.

Exercice 2. ■ (Images)

Exprimer l'image de chacune des fonctions suivantes :

1. la fonction $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ définie par $f(x) := 2x$;
2. la fonction $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$ définie par $f((x, y)) := (x + y, y)$;
3. la fonction $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ définie par $f((x, y)) := x + y + 1$;
4. la fonction $f : \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^2$ définie par $f((x, y)) := (y, x)$;
5. la fonction $f : \mathscr{P}(E) \to \mathscr{P}(E)$ définie par $f(x) := x \cup \{0\}$ où E est l'ensemble $\{0,1,2\}$;
6. la fonction $f : \mathscr{P}(\mathbb{Z}) \to \mathscr{P}(\mathbb{Z})$ définie par $f(x) := \mathscr{C}_{\mathbb{Z}}(x)$;
7. la fonction $f : \mathscr{P}(\mathbb{N})^2 \to \mathscr{P}(\mathbb{N})$ définie par $f((x, y)) := x \,\Delta\, y$.

Exercice 3. ■ **(Constructions)**

1. Construire un exemple d'application injective et non surjective
   (a) de $\{1,5,6\}$ dans $\{4,10,22,31\}$;
   (b) de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

   Dessiner les représentations matricielles des applications construites (avec éventuellement des points de suspension).

2. Construire un exemple d'application surjective et non injective
   (a) de $\mathbb{N}$ dans $\{1,2\}$;
   (b) de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

   Dessiner les représentations matricielles des applications construites (avec éventuellement des points de suspension).

3. Construire un exemple d'application bijective
   (a) de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$;
   (b) de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$;
   (c) □ de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Q}$.

   Dessiner les représentations matricielles des applications construites (avec éventuellement des points de suspension).

Exercice 4. ■ **(Injections et surjections)**

Parmi les applications suivantes, préciser en le démontrant, lesquelles sont injectives, surjectives et/ou bijectives :

1. la fonction $f : \{1,\dots,6\} \to \{3,\dots,8\}$ définie par $f(x) := 9 - x$;
2. la fonction $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ définie par $f(x) := 2x + 1$;
3. la fonction $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$ définie par $f((x,y)) := (x+1, y+2)$;
4. la fonction $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$ définie par $f((x,y)) := (x, 2y)$;
5. la fonction $f : \mathcal{P}([\![0,6]\!]) \to [\![0,6]\!]$ définie par $f(x) := \#x$.

Exercice 5. ■ **(Croissance stricte)**

Une application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est *strictement croissante* quand pour tous $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $n < m$, on a $f(n) < f(m)$.

1. Donner un exemple d'application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante.
2. Démontrer que toute application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante est injective.
3. Infirmer le fait que toute application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante est surjective.
4. Soient $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ deux applications strictement croissantes. Démontrer que la composée $f \circ g$ est strictement croissante.

Exercice 6. ⊡ **(Images et opérations)**

Soient A et B deux ensembles, $f : A \to B$ une fonction et X et Y deux sous-ensembles de A. Montrer les propriétés suivantes :

1. $f(X) \subset f(Y)$ lorsque $X \subset Y$;
2. $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$;
3. $f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y)$;
4. $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$ lorsque f est injective ;
5. $\complement_B(f(A)) = \emptyset$ lorsque f est surjective.

Exercice 7. ⊡ **(Compositions)**

Exprimer la composée $f \circ g$ pour chacune des définitions dans chacun des cases suivants :

1. la fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $f(x) := 3x$ et la fonction $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $g(x) := x + 1$;
2. la fonction $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^3$ définie par $f(x) := (-x, x, -x)$ et la fonction $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ définie par $g(x) := -x$;
3. la fonction $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^2$ définie par $f(x) := (x, -x)$ et la fonction $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ définie par $g(x) := x$ si x est pair et $g(x) := -x$ si x est impair ;
4. la fonction $f : \mathscr{P}(E) \to \mathbb{N}$ définie par $f(x) := \#x$ et la fonction $g : \mathscr{P}(E) \to \mathscr{P}(E)$ définie par $g(x) := x \cup \{0\}$ où E est l'ensemble $\{0, 1, 2, 3\}$.

Exercice 8. □ **(Composition et propriétés)**

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$.

1. On suppose $g \circ f$ injective. Montrer que f est nécessairement injective. Montrer que g n'est pas nécessairement injective.
2. On suppose $g \circ f$ surjective. Montrer que g est nécessairement surjective. Montrez que f n'est pas nécessairement surjective.

Exercice 9. ■ **(Applications et relations d'équivalence)**

Soient A et B deux ensembles et $f : A \to B$ une application. On construit à partir de f la relation binaire $\mathscr{R}_f$ sur A de la manière suivante. Pour tous $x, y \in A$, on a $x \mathscr{R}_f y$ si $f(x) = f(y)$.

1. Considérons (uniquement pour cette question) le cas particulier où $A := \mathbb{N}$, $B := \mathbb{N}$ et f est l'application définie par $f(x) := x \pmod 3$ pour tout $x \in \mathbb{N}$ (où $x \pmod 3$ est le reste de la division euclidienne de x par 3). Donner quatre exemples d'éléments en relation par $\mathscr{R}_f$.
2. Démontrer en toute généralité que $\mathscr{R}_f$ est une relation d'équivalence.

3. Considérons (uniquement pour cette question) le cas particulier où $A := \mathbb{Z}^2$, $B := \mathbb{N}$ et f est l'application définie par $f((x, y)) := x^2 + y^2$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$. Donner la classe d'équivalence de $(3, 4)$.

4. Considérons (uniquement pour cette question) le cas particulier où $A := \mathscr{P}([\![0, 9]\!])$, $B := \mathbb{N}$ et f est l'application définie par $f(E) := \#E$. Donner, en le justifiant soigneusement, le cardinal de l'ensemble $\{[E]_{\mathscr{R}_f} : E \in A\}$.

5. Démontrer en toute généralité que f est injective si et seulement si pour tout $x \in A$, la classe d'équivalence $[x]_{\mathscr{R}_f}$ est un singleton.