

Mathématiques discrètes

Fiche de TD 4

DUT 1 Informatique 2020–2021

Relations binaires

Exercice 1. ■ (Représentations sagittales)

Dessiner les représentations sagittales des relations binaires suivantes :

1. la relation binaire « x divise y », x étant un entier compris entre 2 et 4 et y un entier compris entre 1 et 9;
2. la relation binaire « $2x \leq y$ », x et y étant tous deux des entiers compris entre 0 et 10;
3. la relation binaire $\mathcal{R}$ entre $\llbracket -2, 2 \rrbracket \setminus \{0\}$ et $\{-1, 1\}$ définie par

$$\mathcal{R} := \{(-2, -1), (-1, -1), (1, 1), (2, 1)\};$$

4. la relation binaire $\mathcal{R}$ sur $\llbracket 1, 6 \rrbracket$ définie par

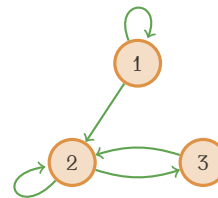
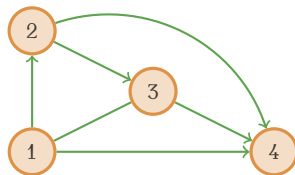
$$\mathcal{R} := \{(x, y) : x \in \{y, y - 1\}\};$$

5. la relation binaire $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{P}(\{0, 1, 2\})$ définie par

$$\mathcal{R} := \{(E, F) : \#E = \#F\}.$$

Exercice 2. ■ (Généralités)

1. Lister les propriétés principales que peuvent vérifier les relations binaires.
2. Indiquer les propriétés vérifiées par les relations binaires définies par les graphes orientés suivants :



3. □ Donner les représentations matricielles des relations binaires définies par les trois graphes orientés précédents.
4. Donner les représentations en graphes orientés des relations binaires définies par les quatre matrices suivantes :

3	×	×	
2	×	×	
1			
	1	2	3

4	×		×	×
3		×	×	×
2		×		×
1	×	×		×
	1	2	3	4

- Indiquer les propriétés vérifiées par les relations binaires définies par les représentations matricielles précédentes.
- Expliquer comment lire sur les représentations matricielles les propriétés de réflexivité, irreflexivité et symétrie des relations binaires.

Exercice 3. □ (Arithmétique et géométrie)

Déterminer les propriétés vérifiées par les relations binaires suivantes :

- la relation d'orthogonalité sur l'ensemble des droites du plan cartésien ;
- la relation de parallélisme sur l'ensemble des droites du plan cartésien ;
- la relation « a un côté de même longueur que » sur l'ensemble des triangles ;
- la relation « est le carré de » sur les nombres entiers ;
- la relation « est le double de » sur les nombres entiers positifs ;
- la relation de colinéarité sur l'ensemble des vecteurs du plan cartésien.

Exercice 4. □ (Exemples)

Construire (définir rigoureusement) une relation binaire qui soit :

- réflexive mais pas symétrique ;
- ni réflexive ni irreflexive ;
- antisymétrique mais pas irreflexive ;
- symétrique et transitive mais pas réflexive ;
- symétrique et réflexive mais pas transitive ;
- symétrique et antisymétrique.

Exercice 5. □ (Erreur de raisonnement)

Expliquer ce qui est faux dans le raisonnement suivant.

« Montrons que toute relation binaire à la fois symétrique et transitive est réflexive. En effet, comme $a \mathcal{R} b$ entraîne $b \mathcal{R} a$ par symétrie, et comme la transitivité donne alors $a \mathcal{R} a$, la relation $\mathcal{R}$ est bien réflexive. »

Exercice 6. ■ (Encerclés)

Soit $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^2$ définie par

$$(x, y) \mathcal{R} (z, t) \quad \text{si} \quad x^2 + y^2 = z^2 + t^2.$$

1. Donner des exemples d'éléments en relation par $\mathcal{R}$.
2. Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
3. Donner une interprétation géométrique de $\mathcal{R}$.
4. Exprimer la classe d'équivalence de $(1, 1)$.
5. Expliquer comment représenter les classes d'équivalences de $\mathcal{R}$.
6. Exprimer l'inverse de $\mathcal{R}$.
7. Exprimer le complémentaire de $\mathcal{R}$.

Exercice 7. ■ (Différence symétrique)

Soit E un ensemble fini et $\mathcal{R}$ la relation binaire sur $\mathcal{P}(E)$ définie par

$$A \mathcal{R} B \quad \text{si} \quad \#A \Delta B \text{ est pair.}$$

1. Construire des exemples d'éléments en relation par $\mathcal{R}$.
2. Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
3. En posant $E := \llbracket 1, 5 \rrbracket$, exprimer la classe d'équivalence de $\{2, 3\}$.
4. Si on change la définition de $\mathcal{R}$ en remplaçant le mot « pair » par « impair », déterminer si l'on obtient une relation d'équivalence.

Exercice 8. □ (De quatre en quatre)

Soit $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence sur $\mathbb{N}$ définie par

$$x \mathcal{R} y \quad \text{si} \quad x \bmod 4 = y \bmod 4,$$

où $a \bmod b$ désigne le reste de la division euclidienne de a par b .

1. Donner des exemples d'éléments en relation par $\mathcal{R}$.
2. Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
3. Exprimer les classes d'équivalence de 0, de 2 et de 4.

Exercice 9. ■ (Damier)

On dispose d'un damier qui contient n rangées et m colonnes. On appelle $E_{n,m}$ l'ensemble des cases de ce damier. Soit la relation $\mathcal{R}$ sur $E_{n,m}$ où $c \mathcal{R} c'$ si l'on peut aller de la case c à la case c' en se déplaçant de gauche à droite, puis de bas en haut (les déplacements peuvent être nuls).

1. Donner un codage de $E_{n,m}$.
2. Démontrer ou infirmer le fait que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre.
3. Si $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre, démontrer ou infirmer le fait qu'elle est totale.
4. Exprimer l'inverse de $\mathcal{R}$.
5. Exprimer le complémentaire de $\mathcal{R}$.

Exercice 10. □ (Un nouvel ordre)

Soit E un ensemble sur lequel est définie une relation d'ordre $\mathcal{Q}$. On définit sur E^2 la relation binaire $\mathcal{R}$ par

$$(x, y) \mathcal{R} (x', y') \quad \text{si} \quad \begin{cases} x = x' \text{ et } y \mathcal{Q} y' \\ \text{ou} \\ x \neq x' \text{ et } x \mathcal{Q} x'. \end{cases}$$

1. Montrez que $\mathcal{R}$ est une relation ordre.
2. Sous l'hypothèse que $\mathcal{Q}$ est une relation d'ordre totale, déterminer si $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre totale.
3. Exprimer l'inverse de $\mathcal{R}$.
4. Exprimer le complémentaire de $\mathcal{R}$.

Exercice 11. ■ (Pré-ordres et implication)

Soit E l'ensemble des formules logiques sans quantificateur sur les variables atomiques P , Q et R . Par exemple, les formules P , $P \rightarrow (P \wedge Q)$ et $(\neg R) \rightarrow (P \vee (Q \rightarrow R))$ sont des éléments de E .

Soit la relation binaire $\mathcal{R}$ sur E définie, pour tous $F_1 \in E$ et $F_2 \in E$, par

$$F_1 \mathcal{R} F_2 \quad \text{si la formule } F_1 \rightarrow F_2 \text{ est valide.}$$

On appelle *pré-ordre* toute relation binaire réflexive et transitive (et donc pas nécessairement antisymétrique).

1. Définir deux formules F_1 et F_2 de E telles que $F_1 \mathcal{R} F_2$.
2. Définir deux formules F_1 et F_2 de E telles que $F_1 \not\mathcal{R} F_2$.
3. Démontrer que $\mathcal{R}$ n'est pas une relation binaire symétrique.
4. Démontrer que $\mathcal{R}$ est un pré-ordre.
5. Démontrer que $\mathcal{R}$ n'est pas une relation antisymétrique.

Exercice 12. □ (Stabilité)

Déterminer et justifier si

1. l'inverse d'une relation d'ordre reste une relation d'ordre ;
2. l'inverse d'une relation d'équivalence reste une relation d'équivalence ;
3. le complémentaire d'une relation d'ordre reste une relation d'ordre ;
4. le complémentaire d'une relation d'équivalence reste une relation d'équivalence ;
5. la composée de deux relations d'ordre produit une relation d'ordre ;
6. la composée de deux relations d'équivalence produit une relation d'équivalence.

Exercice 13. □ (Compositions)

1. Exprimer la composée de $\leq_{\mathbb{N}}$ avec $\geq_{\mathbb{N}}$.
2. Soit E un ensemble fini. Exprimer la composée de $\subseteq$ sur $\mathcal{P}(E)$ avec $\mathcal{R}$ où $\mathcal{R}$ est la relation binaire définie dans l'exercice 7.