Mathématiques discrètes
Fiche de TD 3

DUT 1 Informatique 2020–2021

Ensembles — 2ᵉ approche

Exercice 1. ■ (Diagrammes de Venn)

Dessiner les diagrammes de Venn pour chacune des définitions des ensembles A, B et C suivantes :

1. $A := \{1, 2\}$, $B := \{2, 3\}$, $C := \{4\}$;
2. $A := \{1, 2\}$, $B := \{1, 2, 3, 4\}$, $C := \{3, 4\}$;
3. $A := \{2x : x \in \mathbb{N}\}$, $B := \{3x : x \in \mathbb{N}\}$, $C := \mathbb{N}$;
4. $A := \mathbb{N}$, $B := \mathbb{Z}$, $C := \mathbb{Q}$;
5. $A := \emptyset$, $B := \{\emptyset\}$, $C := \{\{\emptyset\}\}$;
6. $A := \{\emptyset\}$, $B := \{A\}$, $C := \{B, 7\}$.

Exercice 2. ■ (Calcul ensembliste)

On considère les sous-ensembles de $\mathbb{Z}$ suivants :

$$A := \{0, 1, 2, 3, 4\}, \qquad B := \{-2, -1, 0, 1\}, \qquad C := \{2n : n \in \mathbb{Z}\}.$$

Calculer les résultats des expressions suivantes en les exprimant par une notation ensembliste au choix de sorte à avoir une réponse la plus simple possible.

1. $A \cup B$;
2. $A \cap B$;
3. $A \setminus B$;
4. $B \setminus A$;
5. $C \setminus A$;
6. $A \times B$;
7. $C \times B$;
8. $\complement_{\mathbb{Z}}(C)$;
9. $B \cap \complement_{\mathbb{Z}}(C)$;
10. $A \,\Delta\, B$;
11. $(B \setminus A) \cup (C \setminus A)$;
12. $\mathscr{P}(B)$.

Exercice 3. ■ (Mises en relation)

Dans cet exercice, A, B et C désignent des sous-ensembles d'un ensemble E. Mettre en relation, avec $\subset$, $\supset$ ou $=$ et lorsque cela est possible, les paires d'ensembles suivantes et justifier :

1. $\{1, 2, 3\}$ et $\{1, 2, 4\}$;
2. $\{1, 2, 3\}$ et $\{3, 2, 1\}$;
3. $\{1, 3, 1\}$ et $\{1, 3\}$;
4. $\{1, 2\} \times \{2\}$ et $\{1, 2\}^2$;
5. $\{1, 2\}^2$ et $\{1, 2\}^3$;
6. $\emptyset$ et $\mathbb{N}$;
7. $\{\emptyset\}$ et $\emptyset$;
8. $\{\emptyset\}$ et $\{\{\emptyset\}\}$.

Exercice 4. ■ (Double inclusion)

Soit A, B, C et D quatre ensembles tels que $A \subset D$ et $B \subset D$. Démontrer, par le théorème de la double inclusion, les égalités

1. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
2. $\complement_D(A \cup B) = \complement_D(A) \cap \complement_D(B)$;
3. $\mathscr{P}(A \cap B) = \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$;
4. $(A \setminus B)^2 = A^2 \setminus \big((A \times B) \cup (B \times A) \cup B^2\big)$.

Discuter si une démonstration par diagrammes de Venn (au lieu de la double inclusion) peut être possible et pour quels cas. En déduire l'intérêt de la démonstration par double inclusion.

Exercice 5. ■ (Cardinaux)

En supposant que A, B, C et D sont des ensembles tels que $\#A = 3$, $\#B = 2$, $\#C = 1$ et $\#D = 0$, déterminer les cardinaux des ensembles suivants :

1. A^4 ;
2. $A \times B \times C \times B$;
3. $A^3 \times B^4$;
4. $\mathscr{P}(A)$;
5. $\mathscr{P}(C)$;
6. $\mathscr{P}(A \times B)$
7. $A^{1024} \times D \times B^{65536}$;
8. $\mathscr{P}(D)$.

Exercice 6. ⊡ (Parties d'ensembles)

1. Donner quatre exemples d'éléments de $\mathscr{P}(\mathbb{N})$.
2. Calculer $\mathscr{P}(\{1, 2\})$.
3. Calculer $\mathscr{P}(\{\mathbb{N}\})$.
4. Calculer $\mathscr{P}(\emptyset)$.
5. Calculer $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\emptyset))$.
6. Calculer $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathscr{P}(\emptyset)))$.

Exercice 7. ⊡ (Ensembles cofinis)

Soit E un ensemble infini. Un sous-ensemble A de E est dit *cofini* si le complémentaire $\complement_E(A)$ est un ensemble fini.

1. Si $E = \mathbb{N}$, déterminer si le sous-ensemble $A := \{x \in E : 3x - 25 \geqslant 0\}$ est cofini.
2. Si $E = \mathbb{Z}$, déterminer si le sous-ensemble $A := \{x \in E : 3x - 25 \geqslant 0\}$ est cofini.
3. Lorsque $E = \mathbb{N}$, construire un exemple d'un sous-ensemble qui ne soit ni fini, ni cofini.
4. Montrez que si A et B sont deux sous-ensembles de E et que $A \subset B$, alors $\complement_E(B) \subset \complement_E(A)$.
5. Démontrer ou bien infirmer la phrase suivante :

   « L'union de deux ensembles cofinis est un ensemble cofini. ».
6. Démontrer ou bien infirmer la phrase suivante :

   « L'intersection de deux ensembles cofinis est un ensemble cofini. ».

Exercice 8. $\boxdot$ **(Intervalles d'entiers)**

Pour tous $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$, on rappelle que $[\![a, b]\!]$ désigne l'ensemble

$$\{c \in \mathbb{Z} : a \leqslant c \leqslant b\}.$$

Dans cet exercice, les stratégies pour les démonstrations demandées sont libres. Il est en revanche important de faire preuve de rigueur.

1. Démontrer que pour tous $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$, $a' \in \mathbb{Z}$ et $b' \in \mathbb{Z}$ tels quel $a \leqslant a' \leqslant b \leqslant b'$,

$$[\![a, b]\!] \cup [\![a', b']\!] = [\![a, b']\!].$$

2. Démontrer que pour tous $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$, $a' \in \mathbb{Z}$ et $b' \in \mathbb{Z}$ tels quel $a \leqslant a' \leqslant b \leqslant b'$,

$$[\![a, b]\!] \cap [\![a', b']\!] = [\![a', b]\!].$$

3. Démontrer que pour tous $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$, $a' \in \mathbb{Z}$ et $b' \in \mathbb{Z}$ tels quel $a \leqslant a' \leqslant b \leqslant b'$,

$$[\![a, b]\!] \setminus [\![a', b']\!] = [\![a, a' - 1]\!].$$

4. Démontrer que pour tous $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$, $a' \in \mathbb{Z}$ et $b' \in \mathbb{Z}$ tels quel $a \leqslant a' \leqslant b \leqslant b'$,

$$[\![a, b]\!] \,\Delta\, [\![a', b']\!] = [\![a, a' - 1]\!] \cup [\![b + 1, b']\!].$$