Mathématiques discrètes
Fiche de TD 2

DUT 1 Informatique 2020–2021

Logique

Exercice 1. ■ (Un ou un)

Dans chacune des phrases suivantes, le mot « un » possède un sens ambigu en français mais un sens mathématique bien précis. En effet, dans certains cas, « un » signifie « pour tout » et dans d'autres, « il existe ». Lever cette ambiguïté pour chacune des phrases suivantes.

1. « Horace suit **un** cours. »
2. « **Un** Malgache a été champion olympique de tir à l'arc. »
3. « **Un** entier naturel est pair ou impair. »
4. « **Un** enseignant-chercheur a toujours **un** nouveau sujet à étudier. »
5. « Dans **un** triangle isocèle, **une** médiane est également hauteur. »
6. « Dans **un** triangle équilatéral, **une** médiane est également hauteur. »
7. « **Un** être humain a besoin d'avoir **un** idéal. »
8. « **Un** entier est premier si **un** entier le divisant est **un** ou est lui-même. »
9. « **Un** carré est **un** rectangle mais **un** rectangle n'est pas **un** carré. »

Exercice 2. ■ (Formuler des formules)

Pour chacune des expressions suivantes, dire s'il s'agit d'une formule logique. Quand cela n'est pas le cas, en donner la raison.

1. $\neg P$;
2. $\wedge Q$;
3. $\neg\neg P$;
4. $(\neg P)\neg Q$;
5. $\neg P \to Q$;
6. $P \to \neg Q$;
7. $((P \wedge (Q)))$;
8. $(\neg R) \leftrightarrow (((\neg P) \to Q) \to P)$;
9. $P \wedge Q \vee R$;
10. R.

Exercice 3. ■ (Évaluations)

Évaluer pas à pas les formules

1. $(\neg(P \to P)) \to (P \to Q)$;
2. $Q \wedge (Q \to (P \vee (\neg P)))$;

sous les affectations $\{P \mapsto 1, Q \mapsto 1\}$ et $\{P \mapsto 0, Q \mapsto 1\}$.

Exercice 4. ■ (Tables de vérité)

Dresser les tables de vérité des formules suivantes et lister leurs propriétés (satisfiable, falsifiable, valide, contradictoire).

1. $(P \to (P \to P)) \to P$;
2. $(R \wedge (Q \wedge P)) \leftrightarrow R$.

Exercice 5. ■ (Implications, conditions nécessaires, conditions suffisantes)

Soient P, Q et R des formules atomiques. Exprimer les phrases suivantes par des formules.

1. « P implique Q. » ;
2. « Si P alors Q. » ;
3. « P si Q. » ;
4. « P seulement si Q. » ;
5. « P est une condition nécessaire pour que Q soit vraie. » ;
6. « P est une condition suffisante pour que Q soit vraie. » ;
7. « P si et seulement si Q. » ;
8. « Si P alors Q sinon R. ».

Intéressons-nous plus en détail aux conditions nécessaires et suffisantes en nous appuyant sur des exemples concrets.

8. En supposant qu'il existe dans le monde une unique ville nommée « Paris » et qui est située en France, « être à Paris » est-elle une condition nécessaire ou suffisante pour « être en France » ? Articuler ces deux phrases à l'aide d'une implication.
9. En supposant que la loi interdit aux mineurs de conduire, « avoir plus de 18 ans » est-elle une condition nécessaire ou suffisante pour « avoir le droit de conduire » ? Articuler ces deux phrases à l'aide d'une implication.
10. En supposant nous situer dans une filière dans laquelle pour valider son année, une moyenne générale minimale de 10/20 est requise, « avoir au moins 10/20 de moyenne » est-elle une condition nécessaire ou suffisante pour « réussir son année » ? Articuler ces deux phrases à l'aide d'une ou plusieurs implications et éventuellement d'autres connecteurs logiques.

Exercice 6. ■ **(Avec des si)**

Déterminer la véracité de chacune des phrases suivantes.

1. « Si $1 \leqslant 8$ alors $1 \leqslant 8$. »
2. « Si $1 \leqslant 8$ alors $0 \in \mathbb{N}$. »
3. « Si $4 \leqslant 2$ alors $0 \in \mathbb{N}$. »
4. « Si $4 \leqslant 2$ alors $0 \notin \mathbb{N}$. »

Exercice 7. ⊡ **(Du code)**

Dans le pseudo-code ci-contre, `p`, `q` et `r` sont des booléens.

Présenter de manière claire ce qu'affichent ces instructions en tenant en compte toutes les valeurs possibles que peuvent prendre les variables `p`, `q` et `r`.

```
if (p or q) or ((not p) and r) :
    print("a")
else :
    print("b")
if p :
    if not q :
        print("c")
    else :
        print("d")
else :
    print("e")
```

Exercice 8. ■ **(Réciproque et contraposée)**

1. Écrire la réciproque et la contraposée de chacune des formules sous forme d'implications suivantes.

   (a) $P \to (\neg Q)$; (b) $(\neg P) \to Q$; (c) $(P \vee R) \to (P \to Q)$.

2. Démontrer qu'une formule en forme d'implication est toujours équivalente à sa contraposée.
3. Démontrer qu'en général, une formule en forme d'implication n'est pas équivalente à sa réciproque.
4. Exprimer la contraposée de la phrase « Si j'obtiens une moyenne d'au moins 17/20 en mathématiques discrètes, j'offre un gâteau à toute la promotion. ».
5. Exprimer la contraposée de la phrase « Si x est un nombre premier, alors les seuls diviseurs de x sont 1 et x lui-même. ».

Exercice 9. ■ **(Connecteur complet)**

La *barre de Sheffer* $|$ est le connecteur logique admettant la table de vérité

P	Q	$P \mid Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

1. Dresser la table de vérité de la formule $P \mid P$. Que peut-on remarquer ?
2. Déduire de la question précédente une formule utilisant uniquement le connecteur $\mid$ et équivalente à $P \wedge Q$.
3. Déduire des deux questions précédentes et de l'une des lois de De Morgan une formule utilisant uniquement le connecteur $\mid$ et équivalente à $P \vee Q$.
4. Déduire des questions précédentes et de la reformulation de l'implication à partir des connecteurs $\neg$ et $\vee$ une formule utilisant uniquement le connecteur $\mid$ et équivalente à $P \to Q$.
5. Déduire des questions précédentes une formule utilisant uniquement le connecteur $\mid$ et équivalente à $P \leftrightarrow Q$.

Un connecteur d'arité 2 qui permet de retrouver le « non » logique, le « ou » logique et le « et » logique est dit *complet*. Nous avons montré que la barre de Sheffer est ainsi un connecteur complet.

6. □ Parmi les 16 connecteurs logiques d'arité 2 deux à deux non équivalents, déterminer ceux qui sont complets.

Exercice 10. ■ (Interprétations de formules)

Soient P un symbole de relation d'arité 2 et Q un symbole de relation d'arité 1. Soient les formules avec quantificateurs suivantes :

(a) $\forall x \forall y (P(x, y) \wedge Q(x))$; (b) $(\exists x P(x, x)) \vee (\forall x \neg P(x, x))$.

1. Donner pour chacune d'elles, dans la mesure du possible, une interprétation qui la rend vraie et une autre qui la rend fausse.

Soit l'interprétation I de domaine $D := \mathbb{N}$, telle que pour tous $x \in D$ et $y \in D$, $P(x, y)$ est vrai si et seulement $x < y$ et telle que pour tout $x \in D$, $Q(x)$ est vrai si et seulement si x est pair.

2. Proposer une formule close rendue vraie sous l'interprétation I.
3. Proposer une formule close rendue fausse sous l'interprétation I.

Exercice 11. ■ (Loups colorés)

Dans notre univers, il existe des loups qui peuvent être verts, bleus ou rouges (remarquons que rien ne garantit qu'il y ait au moins un loup de chaque couleur). De plus, ces loups peuvent être malades ou en bonne santé. Chaque loup possède exactement une couleur parmi les trois données et un état parmi les deux présentés. Finalement, les lois physiques de notre univers virtuel imposent qu'un loup vert est forcément malade et qu'un loup en bonne santé est toujours rouge.

Considérons à présent les phrases suivantes.

(a) « Si un loup est vert alors il est malade. »

(b) « Si un loup est malade alors il est vert. »

(c) « Un loup en bonne santé n'est pas vert. »

(d) « Si un loup est rouge et vert alors il est malade et en bonne santé. »

(e) « Si un loup n'est ni rouge ni vert alors il est bleu. »

(f) « Si un loup est bleu, alors soit il est rouge, soit il n'est pas rouge. »

(g) « Un loup bleu est malade. »

(h) « Un loup est rouge ou malade. »

(i) « Un loup est soit vert soit en bonne santé. »

1. Pour chacune des phrases énoncées, dire si elle est intuitivement vraie ou fausse et le justifier.
2. Modéliser la situation générale par un diagramme de Venn et vérifier les intuitions de la questions précédente.
3. Définir un ensemble de symboles de relation qui permettent d'exprimer ces phrases en formules logiques.
4. Traduire ces phrases en formules avec quantificateurs, en utilisant les symboles de relation précédents.