

Mathématiques discrètes

Fiche de TD 1

DUT 1 Informatique 2020–2021

Ensembles — 1^{re} approche

Exercice 1. ■ (Différentes égalités)

Rappelons que le symbole « = » s'utilise pour établir une propriété exprimant l'égalité de ses deux membres, tandis que le symbole « := » s'utilise pour définir le membre gauche par l'expression située à sa droite.

Dans les phrases mathématiques suivantes, remplacer le symbole « $\odot$ » par « = » ou par « := » de manière appropriée.

1. « Nous avons $2 + 8 \odot 10$. »;
2. « Soit $x \odot 21$. Alors, x est divisible par 3. »;
3. « Pour tout entier positif n , $1 + 2 + \dots + n \odot \frac{n(n+1)}{2}$. »;
4. « Pour tous entiers relatifs x et y , si $x \leq y$ et $y \leq x$, alors $x \odot y$. »;
5. Nous supposons ici que x est un nombre complexe préalablement défini.
« Soit $\alpha \odot x$. Nous avons alors $\alpha \odot x$. »;
6. Nous supposons ici que f est une fonction d'une variable réelle particulière et que x et x' sont des réels préalablement définis.
« Soient $\alpha_1 \odot f(x)$ et $\alpha_2 \odot f(x')$. Alors, $\alpha_1 \alpha_2 \odot f(xx')$. ».

Il existe en PYTHON les opérateurs « = » et « == ». L'un est utilisé pour l'affectation d'une valeur à une variable, l'autre pour tester l'égalité entre deux valeurs.

7. Quel est l'analogue PYTHON du symbole mathématique « = » ?
8. Quel est l'analogue PYTHON du symbole mathématique « := » ?
9. Donner deux exemples clairs d'utilisation pour chacun de ces deux symboles en PYTHON.

Exercice 2. ■ (Existence et propriétés d'ensembles)

1. Existe-t-il un ensemble contenant à la fois l'élément 0 et l'élément 1 ?
2. Existe-t-il un ensemble contenant à la fois l'élément 0 et l'élément $\{1\}$?
3. Existe-t-il un ensemble contenant à la fois l'élément 0 et un élément qui est un ensemble qui contient l'élément 0 ?
4. Existe-t-il un ensemble qui contient tous les nombres qui sont multiples de 7 ?
5. Existe-t-il un ensemble qui a des ensembles comme éléments ?
6. Existe-t-il un ensemble qui contient deux fois un même élément ?
7. Existe-t-il un ensemble E et un élément x tels que $x \in E$ et $x \notin E$?
8. Un même élément peut-il appartenir à deux ensembles différents ?
9. Intuitivement, que signifie être différents pour deux ensembles ?
10. Quelle est la propriété principale de l'ensemble vide ?
11. L'ensemble vide peut-il être un élément d'un autre ensemble ?
12. Que peut-on dire des ensembles $\{0, 1, 2\}$ et $\{2, 0, 1\}$?
13. Quelle est la propriété principale d'un ensemble fini ?
14. Quelle est la propriété principale d'un ensemble infini ?
15. Un ensemble peut-il être l'un de ses propres éléments ?
16. ☐ Existe-t-il un ensemble qui contient tous les ensembles ?

Exercice 3. ■ (Définitions exactes ou ambiguës)

Pour chacune des descriptions suivantes d'ensembles, donner en notation par extension un ensemble qui la vérifie. Dire également si ces descriptions définissent un ensemble de manière unique sans ambiguïté.

1. « Un ensemble qui ne contient aucun élément. »
2. « Un ensemble qui contient trois éléments. »
3. « Un ensemble qui contient l'ensemble vide. »
4. « Un ensemble qui contient uniquement l'ensemble vide. »
5. « Un ensemble qui contient uniquement : l'ensemble vide et l'ensemble qui contient l'ensemble vide. »
6. « Un ensemble qui n'est pas fini. »

Exercice 4. ■ (Des notations)

1. Décrire en utilisant la notation par extension les ensembles suivants.
 - (a) L'ensemble des entiers compris entre 1 et 4.
 - (b) L'ensemble des entiers pairs compris entre -7 et 7777 .
 - (c) L'ensemble des entiers négatifs compris entre -89 et 89 .
 - (d) L'ensemble des entiers supérieurs à 9.
 - (e) L'ensemble qui contient comme élément l'ensemble vide.
2. Décrire en utilisant la notation par compréhension les ensembles suivants.
 - (a) L'ensemble des nombres entiers positifs inférieurs à 10.
 - (b) L'ensemble des nombres entiers strictement inférieurs à 10.
 - (c) L'ensemble des nombres entiers pairs.
 - (d) L'ensemble des rationnels négatifs.
 - (e) L'ensemble des nombres complexes de partie imaginaire égale à -1 .
3. Décrire en utilisant la notation par formule les ensembles suivants.
 - (a) L'ensemble des nombres entiers pairs.
 - (b) L'ensemble des nombres multiples de 3.
 - (c) L'ensemble des nombres positifs multiples de 3.
 - (d) L'ensemble des puissances entières de 2.
 - (e) L'ensemble des nombres rationnels x qui s'expriment comme $x = \frac{p}{3q}$ où p est un entier et q est un entier non nul.
4. Pour chacun des ensembles considérés dans les questions suivantes, dire s'ils sont finis. Dans ce cas, donner leur cardinal.

Exercice 5. ■ (Géométrie)

On appelle *plan cartésien* l'ensemble des couples à coordonnées réelles. Un *couple à coordonnées réelles* étant un objet noté (x, y) avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, et est appelé *point*. Les x et y sont des *coordonnées* du point (x, y) .

Nous verrons plus tard en cours une définition plus rigoureuse de la notion de couple et de plan cartésien.

Décrire, en utilisant une des notations ensemblistes vues au choix, les ensembles suivants.

1. L'ensemble des points du plan cartésien.
2. L'ensemble des points du plan cartésien situés sur la droite de pente 1 passant par l'origine.
3. L'ensemble des points du plan cartésien situés sur la droite de pente k passant par l'origine, où k est un nombre réel quelconque.
4. L'ensemble des points du plan cartésien situés à une distance de 1 par rapport à l'origine.

Le *plan cartésien discret* est l'ensemble des points du plan cartésien à coordonnées entières.

5. Exprimer le plan cartésien discret en notation par compréhension en utilisant le plan cartésien.
6. Le sous-ensemble du plan cartésien formé par les points situés dans le rectangle défini par ses coins $(3, 0)$, $(3, 2)$, $(7, 2)$, $(7, 0)$ est-il fini ? Si oui, donner son cardinal.
7. Même question que la précédente mais en considérant le plan cartésien discret à la place du plan cartésien.