Classes d'équivalence

Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E.

Classes d'équivalence

Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E.

Soit x un élément de E.

Classes d'équivalence

Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E.

Soit x un élément de E.

La classe d'équivalence de x, notée $[x]_{\mathcal{R}}$, est l'ensemble des éléments de E qui sont équivalents à x. En d'autres termes

$$[x]_{\mathcal{R}} := \{y \in E : x \,\mathcal{R}\, y\}.$$

Classes d'équivalence

Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E.

Soit x un élément de E.

La classe d'équivalence de x, notée $[x]_{\mathcal{R}}$, est l'ensemble des éléments de E qui sont équivalents à x. En d'autres termes

$$[x]_{\mathcal{R}} := \{y \in E : x \,\mathcal{R}\, y\}.$$

Remarque : $[x]_{\mathcal{R}}$ est un sous-ensemble de E.

Classes d'équivalence

Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E.

Soit x un élément de E.

La classe d'équivalence de x, notée $[x]_{\mathcal{R}}$, est l'ensemble des éléments de E qui sont équivalents à x. En d'autres termes

$$[x]_{\mathcal{R}} := \{y \in E : x \, \mathcal{R} \, y\}.$$

Remarque : $[x]_{\mathcal{R}}$ est un sous-ensemble de E.

Remarque : si $x \, \mathcal{R} \, y$, alors $[x]_{\mathcal{R}} = [y]_{\mathcal{R}}$.

Classes d'équivalence

Exemple

Soit $\mathcal{R}$ la relation binaire sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ telle que l'on a $(x, y)\,\mathcal{R}\,(x', y')$ si $x + y = x' + y'$.

Classes d'équivalence

Exemple

Soit $\mathcal{R}$ la relation binaire sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ telle que l'on a $(x, y) \, \mathcal{R} \, (x', y')$ si $x + y = x' + y'$.

On a

$$[(1,2)]_{\mathcal{R}} = \{(0,3), (1,2), (2,1), (3,0)\},$$

Classes d'équivalence

Exemple

Soit $\mathcal{R}$ la relation binaire sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ telle que l'on a $(x, y) \, \mathcal{R} \, (x', y')$ si $x + y = x' + y'$.

On a

$$[(1,2)]_{\mathcal{R}} = \{(0,3), (1,2), (2,1), (3,0)\},$$
$$[(0,3)]_{\mathcal{R}} = \{(0,3), (1,2), (2,1), (3,0)\},$$

Classes d'équivalence

Exemple

Soit $\mathcal{R}$ la relation binaire sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ telle que l'on a $(x, y) \, \mathcal{R} \, (x', y')$ si $x + y = x' + y'$.

On a

$$[(1,2)]_{\mathcal{R}} = \{(0,3), (1,2), (2,1), (3,0)\},$$
$$[(0,3)]_{\mathcal{R}} = \{(0,3), (1,2), (2,1), (3,0)\},$$
$$[(1,1)]_{\mathcal{R}} = \{(0,2), (1,1), (2,0)\}.$$

Classes d'équivalence

Exemple

Soit $\mathcal{R}$ la relation binaire sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ telle que l'on a $(x, y)\,\mathcal{R}\,(x', y')$ si $x + y = x' + y'$.

On a

$$
\begin{aligned}
[(1,2)]_{\mathcal{R}} &= \{(0,3),(1,2),(2,1),(3,0)\},\\
[(0,3)]_{\mathcal{R}} &= \{(0,3),(1,2),(2,1),(3,0)\},\\
[(1,1)]_{\mathcal{R}} &= \{(0,2),(1,1),(2,0)\}.
\end{aligned}
$$

Exemple

Soit $\mathcal{R} := \{(x, y) : x, y \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ et x et y ont le même signe$\}$.

Classes d'équivalence

Exemple

Soit $\mathcal{R}$ la relation binaire sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ telle que l'on a $(x, y) \, \mathcal{R} \, (x', y')$ si $x + y = x' + y'$.

On a

$$\begin{aligned}
[(1,2)]_{\mathcal{R}} &= \{(0,3),(1,2),(2,1),(3,0)\}, \\
[(0,3)]_{\mathcal{R}} &= \{(0,3),(1,2),(2,1),(3,0)\}, \\
[(1,1)]_{\mathcal{R}} &= \{(0,2),(1,1),(2,0)\}.
\end{aligned}$$

Exemple

Soit $\mathcal{R} := \{(x, y) : x, y \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ et x et y ont le même signe$\}$.

On a

$$[1]_{\mathcal{R}} = \{1, 2, 3, \ldots\},$$

Classes d'équivalence

Exemple

Soit $\mathcal{R}$ la relation binaire sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ telle que l'on a $(x, y) \, \mathcal{R} \, (x', y')$ si $x + y = x' + y'$.

On a

$$\begin{aligned} [(1,2)]_{\mathcal{R}} &= \{(0,3),(1,2),(2,1),(3,0)\}, \\ [(0,3)]_{\mathcal{R}} &= \{(0,3),(1,2),(2,1),(3,0)\}, \\ [(1,1)]_{\mathcal{R}} &= \{(0,2),(1,1),(2,0)\}. \end{aligned}$$

Exemple

Soit $\mathcal{R} := \{(x, y) : x, y \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ et x et y ont le même signe$\}$.

On a

$$\begin{aligned} [1]_{\mathcal{R}} &= \{1, 2, 3, \ldots\}, \\ [-1]_{\mathcal{R}} &= \{\ldots, -3, -2, -1\}. \end{aligned}$$

Relations d’équivalence et partitions ensemblistes

Il existe un lien très concret entre les relations d’équivalence et les partitions ensemblistes.

En effet, à partir de l’une, il est possible de construire l’autre et réciproquement, comme l’illustre le théorème suivant.

Relations d'équivalence et partitions ensemblistes

Il existe un lien très concret entre les relations d'équivalence et les partitions ensemblistes.

En effet, à partir de l'une, il est possible de construire l'autre et réciproquement, comme l'illustre le théorème suivant.

Théorème

Soit E un ensemble.

Si $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur E, alors l'ensemble

$$\{[x]_{\mathcal{R}} : x \in E\}$$

forme une partition ensembliste de E.

Relations d'équivalence et partitions ensemblistes

Il existe un lien très concret entre les relations d'équivalence et les partitions ensemblistes.

En effet, à partir de l'une, il est possible de construire l'autre et réciproquement, comme l'illustre le théorème suivant.

Théorème

Soit E un ensemble.

Si $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur E, alors l'ensemble

$$\{[x]_{\mathcal{R}} : x \in E\}$$

forme une partition ensembliste de E.

Réciproquement, si $\{F_1, \ldots, F_n\}$ est une partition ensembliste de E, la relation binaire $\mathcal{R}$ vérifiant $x \, \mathcal{R} \, y$ s'il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $x \in F_i$ et $y \in F_i$ est une relation d'équivalence.

Relations d'équivalence et partitions ensemblistes

Exemple

Soit $\mathcal{R}$ la relation binaire sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ telle que l'on a $(x, y)\,\mathcal{R}\,(x', y')$ si $x + y = x' + y'$.

Relations d'équivalence et partitions ensemblistes

Exemple

Soit $\mathcal{R}$ la relation binaire sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ telle que l'on a $(x, y)\,\mathcal{R}\,(x', y')$ si $x + y = x' + y'$.

D'après le théorème précédent, l'ensemble $\{F_0, F_1, F_2, \ldots\}$ défini par

$$F_n := \{(x, y) : x, y \in \mathbb{N} \text{ et } x + y = n\}$$

est une partition ensembliste de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Relations d'équivalence et partitions ensemblistes

Exemple

Soit $\mathcal{R}$ la relation binaire sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ telle que l'on a $(x, y)\,\mathcal{R}\,(x', y')$ si $x + y = x' + y'$.

D'après le théorème précédent, l'ensemble $\{F_0, F_1, F_2, \ldots\}$ défini par

$$F_n := \{(x, y) : x, y \in \mathbb{N} \text{ et } x + y = n\}$$

est une partition ensembliste de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Exemple

Soit $\{F_0, F_1\}$ la partition ensembliste de $\mathbb{Z}$ où F_0 est l'ensemble des entiers pairs et F_1 est l'ensemble des entiers impairs.

Relations d'équivalence et partitions ensemblistes

Exemple

Soit $\mathcal{R}$ la relation binaire sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ telle que l'on a $(x, y)\,\mathcal{R}\,(x', y')$ si $x + y = x' + y'$.

D'après le théorème précédent, l'ensemble $\{F_0, F_1, F_2, \ldots\}$ défini par

$$F_n := \{(x, y) : x, y \in \mathbb{N} \text{ et } x + y = n\}$$

est une partition ensembliste de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Exemple

Soit $\{F_0, F_1\}$ la partition ensembliste de $\mathbb{Z}$ où F_0 est l'ensemble des entiers pairs et F_1 est l'ensemble des entiers impairs.

D'après le théorème précédent, la relation binaire $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{Z}$ vérifiant $x\,\mathcal{R}\,y$ si x et y ont la même parité est une relation d'équivalence.

Plan

Inverse d'une relation binaire

Soient E et F deux ensembles et $\mathcal{R} \subset E \times F$ une relation binaire entre E et F.

Inverse d'une relation binaire

Soient E et F deux ensembles et $\mathcal{R} \subset E \times F$ une relation binaire entre E et F.

On note $\mathcal{R}^{-1}$ la relation binaire entre F et E dans laquelle $y \in F$ est en relation avec $x \in E$ si $x \,\mathcal{R}\, y$.

Inverse d'une relation binaire

Soient E et F deux ensembles et $\mathcal{R} \subset E \times F$ une relation binaire entre E et F.

On note $\mathcal{R}^{-1}$ la relation binaire entre F et E dans laquelle $y \in F$ est en relation avec $x \in E$ si $x \, \mathcal{R} \, y$.

En d'autres termes,

$$\mathcal{R}^{-1} := \{(y, x) \in F \times E : (x, y) \in \mathcal{R}\}.$$

Inverse d'une relation binaire

Soient E et F deux ensembles et $\mathcal{R} \subset E \times F$ une relation binaire entre E et F.

On note $\mathcal{R}^{-1}$ la relation binaire entre F et E dans laquelle $y \in F$ est en relation avec $x \in E$ si $x \,\mathcal{R}\, y$.

En d'autres termes,

$$\mathcal{R}^{-1} := \{(y, x) \in F \times E : (x, y) \in \mathcal{R}\}.$$

On appelle $\mathcal{R}^{-1}$ l'inverse de $\mathcal{R}$.

Inverse d'une relation binaire

Soient E et F deux ensembles et $\mathcal{R} \subset E \times F$ une relation binaire entre E et F.

On note $\mathcal{R}^{-1}$ la relation binaire entre F et E dans laquelle $y \in F$ est en relation avec $x \in E$ si $x \, \mathcal{R} \, y$.

En d'autres termes,

$$\mathcal{R}^{-1} := \{(y, x) \in F \times E : (x, y) \in \mathcal{R}\}.$$

On appelle $\mathcal{R}^{-1}$ l'inverse de $\mathcal{R}$.

Exemple

- L'inverse de la relation binaire $\leqslant_{\mathbb{Z}}$ est la relation binaire $\geqslant_{\mathbb{Z}}$.

Inverse d'une relation binaire

Soient E et F deux ensembles et $\mathcal{R} \subset E \times F$ une relation binaire entre E et F.

On note $\mathcal{R}^{-1}$ la relation binaire entre F et E dans laquelle $y \in F$ est en relation avec $x \in E$ si $x \,\mathcal{R}\, y$.

En d'autres termes,

$$\mathcal{R}^{-1} := \{(y, x) \in F \times E : (x, y) \in \mathcal{R}\}.$$

On appelle $\mathcal{R}^{-1}$ l'inverse de $\mathcal{R}$.

Exemple

- L'inverse de la relation binaire $\leqslant_{\mathbb{Z}}$ est la relation binaire $\geqslant_{\mathbb{Z}}$.
- L'inverse de la relation binaire $<_{\mathbb{Z}}$ est la relation binaire $>_{\mathbb{Z}}$.

Inverse d'une relation binaire

Soient E et F deux ensembles et $\mathcal{R} \subset E \times F$ une relation binaire entre E et F.

On note $\mathcal{R}^{-1}$ la relation binaire entre F et E dans laquelle $y \in F$ est en relation avec $x \in E$ si $x \,\mathcal{R}\, y$.

En d'autres termes,

$$\mathcal{R}^{-1} := \{(y, x) \in F \times E : (x, y) \in \mathcal{R}\}.$$

On appelle $\mathcal{R}^{-1}$ l'inverse de $\mathcal{R}$.

Exemple

- L'inverse de la relation binaire $\leqslant_{\mathbb{Z}}$ est la relation binaire $\geqslant_{\mathbb{Z}}$.
- L'inverse de la relation binaire $<_{\mathbb{Z}}$ est la relation binaire $>_{\mathbb{Z}}$.
- Soit E un ensemble. L'inverse de $=_E$ est $=_E$.

Inverse d'une relation binaire

Soient E et F deux ensembles et $\mathcal{R} \subset E \times F$ une relation binaire entre E et F.

On note $\mathcal{R}^{-1}$ la relation binaire entre F et E dans laquelle $y \in F$ est en relation avec $x \in E$ si $x \,\mathcal{R}\, y$.

En d'autres termes,

$$\mathcal{R}^{-1} := \{(y, x) \in F \times E : (x, y) \in \mathcal{R}\}.$$

On appelle $\mathcal{R}^{-1}$ l'inverse de $\mathcal{R}$.

Exemple

- L'inverse de la relation binaire $\leqslant_{\mathbb{Z}}$ est la relation binaire $\geqslant_{\mathbb{Z}}$.
- L'inverse de la relation binaire $<_{\mathbb{Z}}$ est la relation binaire $>_{\mathbb{Z}}$.
- Soit E un ensemble. L'inverse de $=_E$ est $=_E$.
- Soit E un ensemble. L'inverse de $\neq_E$ est $\neq_E$.

Complémentaire d'une relation binaire

Soient E et F deux ensembles et $\mathcal{R} \subset E \times F$ une relation binaire entre E et F.

Complémentaire d'une relation binaire

Soient E et F deux ensembles et $\mathcal{R} \subset E \times F$ une relation binaire entre E et F.

On note $\overline{\mathcal{R}}$ la relation binaire entre E et F dans laquelle $x \in E$ est en relation avec $y \in F$ si $x \not\mathcal{R} y$.

Complémentaire d'une relation binaire

Soient E et F deux ensembles et $\mathcal{R} \subset E \times F$ une relation binaire entre E et F.

On note $\overline{\mathcal{R}}$ la relation binaire entre E et F dans laquelle $x \in E$ est en relation avec $y \in F$ si $x \not{\mathcal{R}} y$.

En d'autres termes,

$$\overline{\mathcal{R}} := \{(x, y) \in E \times F : (x, y) \notin \mathcal{R}\}.$$

Complémentaire d'une relation binaire

Soient E et F deux ensembles et $\mathcal{R} \subset E \times F$ une relation binaire entre E et F.

On note $\overline{\mathcal{R}}$ la relation binaire entre E et F dans laquelle $x \in E$ est en relation avec $y \in F$ si $x \not\mathcal{R} y$.

En d'autres termes,

$$\overline{\mathcal{R}} := \{(x, y) \in E \times F : (x, y) \notin \mathcal{R}\}.$$

On appelle $\overline{\mathcal{R}}$ le complémentaire de $\mathcal{R}$.

Complémentaire d'une relation binaire

Soient E et F deux ensembles et $\mathcal{R} \subset E \times F$ une relation binaire entre E et F.

On note $\overline{\mathcal{R}}$ la relation binaire entre E et F dans laquelle $x \in E$ est en relation avec $y \in F$ si $x \not\mathcal{R} y$.

En d'autres termes,

$$\overline{\mathcal{R}} := \{(x, y) \in E \times F : (x, y) \notin \mathcal{R}\}.$$

On appelle $\overline{\mathcal{R}}$ le complémentaire de $\mathcal{R}$.

Remarque : en termes d'opérations sur les ensembles, $\overline{\mathcal{R}} = \mathcal{C}_{E \times F}(\mathcal{R})$.

Complémentaire d'une relation binaire

Soient E et F deux ensembles et $\mathcal{R} \subset E \times F$ une relation binaire entre E et F.

On note $\overline{\mathcal{R}}$ la relation binaire entre E et F dans laquelle $x \in E$ est en relation avec $y \in F$ si $x \not\mathcal{R} y$.

En d'autres termes,

$$\overline{\mathcal{R}} := \{(x, y) \in E \times F : (x, y) \notin \mathcal{R}\}.$$

On appelle $\overline{\mathcal{R}}$ le complémentaire de $\mathcal{R}$.

Remarque : en termes d'opérations sur les ensembles, $\overline{\mathcal{R}} = \mathcal{C}_{E\times F}(\mathcal{R})$.

Exemple

- Soit E un ensemble. Le complémentaire de $=_E$ est $\neq_E$.

Complémentaire d'une relation binaire

Soient E et F deux ensembles et $\mathcal{R} \subset E \times F$ une relation binaire entre E et F.

On note $\overline{\mathcal{R}}$ la relation binaire entre E et F dans laquelle $x \in E$ est en relation avec $y \in F$ si $x \not\mathcal{R} y$.

En d'autres termes,

$$\overline{\mathcal{R}} := \{(x, y) \in E \times F : (x, y) \notin \mathcal{R}\}.$$

On appelle $\overline{\mathcal{R}}$ le complémentaire de $\mathcal{R}$.

Remarque : en termes d'opérations sur les ensembles, $\overline{\mathcal{R}} = \mathcal{C}_{E \times F}(\mathcal{R})$.

Exemple

- Soit E un ensemble. Le complémentaire de $=_E$ est $\neq_E$.
- Soit E un ensemble. Le complémentaire de $\neq_E$ est $=_E$.

Complémentaire d'une relation binaire

Soient E et F deux ensembles et $\mathcal{R} \subset E \times F$ une relation binaire entre E et F.

On note $\overline{\mathcal{R}}$ la relation binaire entre E et F dans laquelle $x \in E$ est en relation avec $y \in F$ si $x \not\mathcal{R} y$.

En d'autres termes,

$$\overline{\mathcal{R}} := \{(x, y) \in E \times F : (x, y) \notin \mathcal{R}\}.$$

On appelle $\overline{\mathcal{R}}$ le complémentaire de $\mathcal{R}$.

Remarque : en termes d'opérations sur les ensembles, $\overline{\mathcal{R}} = \mathcal{C}_{E \times F}(\mathcal{R})$.

Exemple

- Soit E un ensemble. Le complémentaire de $=_E$ est $\neq_E$.
- Soit E un ensemble. Le complémentaire de $\neq_E$ est $=_E$.
- Le complémentaire de la relation binaire $\leqslant_{\mathbb{Z}}$ est la relation binaire $>_{\mathbb{Z}}$.

Complémentaire d'une relation binaire

Soient E et F deux ensembles et $\mathcal{R} \subset E \times F$ une relation binaire entre E et F.

On note $\overline{\mathcal{R}}$ la relation binaire entre E et F dans laquelle $x \in E$ est en relation avec $y \in F$ si $x \not\mathcal{R} y$.

En d'autres termes,

$$\overline{\mathcal{R}} := \{(x, y) \in E \times F : (x, y) \notin \mathcal{R}\}.$$

On appelle $\overline{\mathcal{R}}$ le complémentaire de $\mathcal{R}$.

Remarque : en termes d'opérations sur les ensembles, $\overline{\mathcal{R}} = \mathcal{C}_{E \times F}(\mathcal{R})$.

Exemple

- Soit E un ensemble. Le complémentaire de $=_E$ est $\neq_E$.
- Soit E un ensemble. Le complémentaire de $\neq_E$ est $=_E$.
- Le complémentaire de la relation binaire $\leqslant_{\mathbb{Z}}$ est la relation binaire $>_{\mathbb{Z}}$.
- Le complémentaire de la relation binaire $\geqslant_{\mathbb{Z}}$ est la relation binaire $<_{\mathbb{Z}}$.

Composée de deux relations binaires

Soient E, F et G trois ensembles et $\mathcal{R} \subset E \times F$ et $\mathcal{S} \subset F \times G$ deux relations binaires.

Composée de deux relations binaires

Soient E, F et G trois ensembles et $\mathcal{R} \subset E \times F$ et $\mathcal{S} \subset F \times G$ deux relations binaires.

On note $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ la relation binaire entre E et G dans laquelle $x \in E$ est en relation avec $z \in G$ s'il existe $y \in F$ tel que $x \, \mathcal{R} \, y$ et $y \, \mathcal{S} \, z$.

Composée de deux relations binaires

Soient E, F et G trois ensembles et $\mathcal{R} \subset E \times F$ et $\mathcal{S} \subset F \times G$ deux relations binaires.

On note $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ la relation binaire entre E et G dans laquelle $x \in E$ est en relation avec $z \in G$ s'il existe $y \in F$ tel que $x \,\mathcal{R}\, y$ et $y \,\mathcal{S}\, z$.

En d'autres termes,

$$\mathcal{S} \circ \mathcal{R} := \{(x, z) \in E \times G : \text{il existe } y \in F \text{ tel que } x \,\mathcal{R}\, y \text{ et } y \,\mathcal{S}\, z\}.$$

Composée de deux relations binaires

Soient E, F et G trois ensembles et $\mathcal{R} \subset E \times F$ et $\mathcal{S} \subset F \times G$ deux relations binaires.

On note $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ la relation binaire entre E et G dans laquelle $x \in E$ est en relation avec $z \in G$ s'il existe $y \in F$ tel que $x \,\mathcal{R}\, y$ et $y \,\mathcal{S}\, z$.

En d'autres termes,

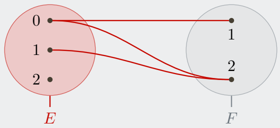
$$\mathcal{S} \circ \mathcal{R} := \{(x, z) \in E \times G : \text{il existe } y \in F \text{ tel que } x \,\mathcal{R}\, y \text{ et } y \,\mathcal{S}\, z\}.$$

On appelle $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ la composée de $\mathcal{R}$ par $\mathcal{S}$.

Composée de deux relations binaires

Exemple

Soit $\mathcal{R}$ la relation binaire entre $E := \{0, 1, 2\}$ et $F := \{1, 2\}$ vérifiant $0 \,\mathcal{R}\, 1$, $0 \,\mathcal{R}\, 2$ et $1 \,\mathcal{R}\, 2$.

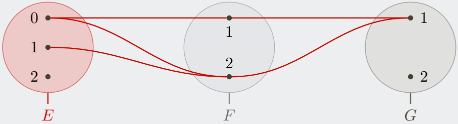


Composée de deux relations binaires

Exemple

Soit $\mathcal{R}$ la relation binaire entre $E := \{0, 1, 2\}$ et $F := \{1, 2\}$ vérifiant $0 \, \mathcal{R} \, 1$, $0 \, \mathcal{R} \, 2$ et $1 \, \mathcal{R} \, 2$.

Soit $\mathcal{S}$ la relation binaire entre F et $G := \{1, 2\}$ vérifiant $1 \, \mathcal{S} \, 1$ et $2 \, \mathcal{S} \, 1$.



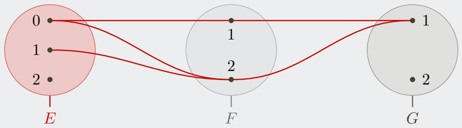
Composée de deux relations binaires

Exemple

Soit $\mathcal{R}$ la relation binaire entre $E := \{0, 1, 2\}$ et $F := \{1, 2\}$ vérifiant $0 \,\mathcal{R}\, 1$, $0 \,\mathcal{R}\, 2$ et $1 \,\mathcal{R}\, 2$.

Soit $\mathcal{S}$ la relation binaire entre F et $G := \{1, 2\}$ vérifiant $1 \,\mathcal{S}\, 1$ et $2 \,\mathcal{S}\, 1$.

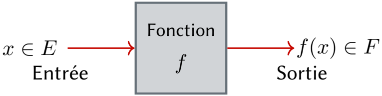
Alors, $\mathcal{T} := \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ est une relation binaire entre E et G qui vérifie $0 \,\mathcal{T}\, 1$ et $1 \,\mathcal{T}\, 1$.



Plan

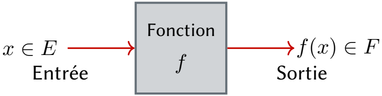
Introduction

Les fonctions et les applications sont des objets mathématiques qui permettent de transformer des éléments d'un ensemble E en des éléments d'un ensemble F.



Introduction

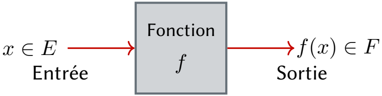
Les fonctions et les applications sont des objets mathématiques qui permettent de transformer des éléments d'un ensemble E en des éléments d'un ensemble F.



Tout comme les relations binaires, elles permettent d'établir des liens entre deux ensembles.

Introduction

Les fonctions et les applications sont des objets mathématiques qui permettent de transformer des éléments d'un ensemble E en des éléments d'un ensemble F.



Tout comme les relations binaires, elles permettent d'établir des liens entre deux ensembles.

Dans ce chapitre, nous définissons la notion de fonction et d'application. Nous étudions certaines propriétés des applications comme l'injectivité et la surjectivité. Nous terminons ce chapitre par l'étude d'opérations sur les applications.

Plan

Fonctions

Soient E et F deux ensembles.

Une fonction de E dans F est une relation binaire entre E et F telle que pour tout $x \in E$, il existe **au plus un** élément $y \in F$ tel que x est en relation avec y.

Fonctions

Soient E et F deux ensembles.

Une fonction de E dans F est une relation binaire entre E et F telle que pour tout $x \in E$, il existe **au plus un** élément $y \in F$ tel que x est en relation avec y.

Une fonction est notée par une lettre minuscule

$$f, g, h, \textit{etc.}$$

Fonctions

Soient E et F deux ensembles.

Une fonction de E dans F est une relation binaire entre E et F telle que pour tout $x \in E$, il existe **au plus un** élément $y \in F$ tel que x est en relation avec y.

Une fonction est notée par une lettre minuscule

$$f, g, h, \textit{etc.}$$

De plus, on note

$$f : E \to F$$

le fait que f est une fonction de E dans F.

Fonctions

Soient E et F deux ensembles.

Une fonction de E dans F est une relation binaire entre E et F telle que pour tout $x \in E$, il existe **au plus un** élément $y \in F$ tel que x est en relation avec y.

Une fonction est notée par une lettre minuscule

$$f, g, h, \textit{etc.}$$

De plus, on note

$$f : E \to F$$

le fait que f est une fonction de E dans F.

Soit $x \in E$. Lorsqu'il existe un élément de F avec lequel x est en relation par f, on note $f(x)$ cet élément.

Fonctions

Soient E et F deux ensembles.

Une fonction de E dans F est une relation binaire entre E et F telle que pour tout $x \in E$, il existe **au plus un** élément $y \in F$ tel que x est en relation avec y.

Une fonction est notée par une lettre minuscule

$$f, g, h, \textit{etc.}$$

De plus, on note

$$f : E \to F$$

le fait que f est une fonction de E dans F.

Soit $x \in E$. Lorsqu'il existe un élément de F avec lequel x est en relation par f, on note $f(x)$ cet élément. On dit alors que $f(x)$ est **l'**image de x et que x est **un** antécédent de $f(x)$.

Fonctions — exemples

Exemple

La relation binaire f sur $\mathbb{N}$ définie par

$$f := \{(n, n+1) : n \in \mathbb{N}\}$$

est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. On a donc $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Fonctions — exemples

Exemple

La relation binaire f sur $\mathbb{N}$ définie par

$$f := \{(n, n+1) : n \in \mathbb{N}\}$$

est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. On a donc $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'image de n est $n + 1$.

Fonctions — exemples

Exemple

La relation binaire f sur $\mathbb{N}$ définie par

$$f := \{(n, n+1) : n \in \mathbb{N}\}$$

est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. On a donc $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'image de n est $n + 1$.

La fonction f vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = n + 1$.

Fonctions — exemples

Exemple

La relation binaire f sur $\mathbb{N}$ définie par

$$f := \{(n, n+1) : n \in \mathbb{N}\}$$

est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. On a donc $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'image de n est $n + 1$.

La fonction f vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = n + 1$.

Exemple

La relation binaire g entre $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}$ définie par

$$g := \{((x, y), xy) : x, y \in \mathbb{Z}\}$$

est une fonction de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$. On a donc $g : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$.

Fonctions — exemples

Exemple

La relation binaire f sur $\mathbb{N}$ définie par

$$f := \{(n, n+1) : n \in \mathbb{N}\}$$

est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. On a donc $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'image de n est $n+1$.

La fonction f vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = n + 1$.

Exemple

La relation binaire g entre $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}$ définie par

$$g := \{((x, y), xy) : x, y \in \mathbb{Z}\}$$

est une fonction de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$. On a donc $g : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$.

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, l'image de (x, y) est xy.

Fonctions — exemples

Exemple

La relation binaire f sur $\mathbb{N}$ définie par

$$f := \{(n, n+1) : n \in \mathbb{N}\}$$

est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. On a donc $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'image de n est $n + 1$.

La fonction f vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = n + 1$.

Exemple

La relation binaire g entre $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}$ définie par

$$g := \{((x, y), xy) : x, y \in \mathbb{Z}\}$$

est une fonction de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$. On a donc $g : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$.

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, l'image de (x, y) est xy.

La fonction g vérifie pour tout $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $g((x, y)) = xy$.

Fonctions — exemples

Exemple

La relation binaire f sur $\mathbb{Z}$ définie par

$$f := \{(x, y) : x, y \in \mathbb{Z} \text{ et } x + y \geqslant 0\}$$

n'est pas une fonction.

Fonctions — exemples

Exemple

La relation binaire f sur $\mathbb{Z}$ définie par

$$f := \{(x, y) : x, y \in \mathbb{Z} \text{ et } x + y \geqslant 0\}$$

n'est pas une fonction.

En effet, il existe des éléments de $\mathbb{Z}$ qui sont en relation avec plus de deux éléments. On a par exemple $-1 \; f \; 1$ et $-1 \; f \; 2$.

Fonctions — exemples

Exemple

La relation binaire f sur $\mathbb{Z}$ définie par

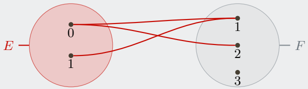
$$f := \{(x, y) : x, y \in \mathbb{Z} \text{ et } x + y \geqslant 0\}$$

n'est pas une fonction.

En effet, il existe des éléments de $\mathbb{Z}$ qui sont en relation avec plus de deux éléments. On a par exemple $-1 \; f \; 1$ et $-1 \; f \; 2$.

Exemple

La relation binaire g dont la représentation sagittale est



n'est pas une fonction.

Fonctions — exemples

Exemple

La relation binaire f sur $\mathbb{Z}$ définie par

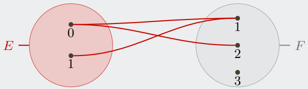
$$f := \{(x, y) : x, y \in \mathbb{Z} \text{ et } x + y \geqslant 0\}$$

n'est pas une fonction.

En effet, il existe des éléments de $\mathbb{Z}$ qui sont en relation avec plus de deux éléments. On a par exemple $-1 \; f \; 1$ et $-1 \; f \; 2$.

Exemple

La relation binaire g dont la représentation sagittale est



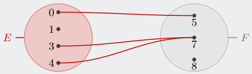
n'est pas une fonction.

En effet, l'élément 0 de E est en relation avec deux éléments de F.

Fonctions — exemples

Exemple

La relation binaire f dont la représentation sagittale est

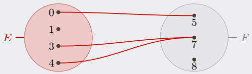


est une fonction $f : E \to F$.

Fonctions — exemples

Exemple

La relation binaire f dont la représentation sagittale est

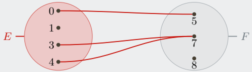


est une fonction $f : E \to F$. Elle vérifie $f(0) = 5$, $f(3) = 7$ et $f(4) = 7$.

Fonctions — exemples

Exemple

La relation binaire f dont la représentation sagittale est



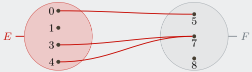
est une fonction $f : E \to F$. Elle vérifie $f(0) = 5$, $f(3) = 7$ et $f(4) = 7$.

$1 \in E$ n'admet pas d'image, $8 \in F$ n'admet pas d'antécédent tandis que $7 \in F$ admet deux antécédents.

Fonctions — exemples

Exemple

La relation binaire f dont la représentation sagittale est



est une fonction $f : E \to F$. Elle vérifie $f(0) = 5$, $f(3) = 7$ et $f(4) = 7$.

$1 \in E$ n'admet pas d'image, $8 \in F$ n'admet pas d'antécédent tandis que $7 \in F$ admet deux antécédents.

Exemple

La relation binaire g dont la représentation matricielle est

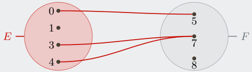
3	$\times$		$\times$		
2					
1		$\times$			$\times$
	1	2	3	4	5

est une fonction $g : \{1, 2, 3, 4, 5\} \to \{1, 2, 3\}$.

Fonctions — exemples

Exemple

La relation binaire f dont la représentation sagittale est



est une fonction $f : E \to F$. Elle vérifie $f(0) = 5$, $f(3) = 7$ et $f(4) = 7$.

$1 \in E$ n'admet pas d'image, $8 \in F$ n'admet pas d'antécédent tandis que $7 \in F$ admet deux antécédents.

Exemple

La relation binaire g dont la représentation matricielle est

3	$\times$		$\times$		
2					
1		$\times$			$\times$
	1	2	3	4	5

est une fonction $g : \{1, 2, 3, 4, 5\} \to \{1, 2, 3\}$. Elle vérifie $g(1) = 3$, $g(2) = 1$, $g(3) = 3$ et $g(5) = 1$.

Domaine de définition et image

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une fonction.

Le domaine de définition de f, noté $\mathrm{Dom}(f)$, est l'ensemble des éléments de E qui admettent une image.

Domaine de définition et image

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une fonction.

Le domaine de définition de f, noté $\mathrm{Dom}(f)$, est l'ensemble des éléments de E qui admettent une image.

En d'autres termes,

$$\mathrm{Dom}(f) := \{x \in E : \text{il existe } y \in F \text{ tel que } x \, f \, y\}.$$

Domaine de définition et image

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une fonction.

Le domaine de définition de f, noté $\mathrm{Dom}(f)$, est l'ensemble des éléments de E qui admettent une image.

En d'autres termes,

$$\mathrm{Dom}(f) := \{x \in E : \text{il existe } y \in F \text{ tel que } x \, f \, y\}.$$

Remarque : $\mathrm{Dom}(f) \subset E$.

Domaine de définition et image

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une fonction.

Le domaine de définition de f, noté $\mathrm{Dom}(f)$, est l'ensemble des éléments de E qui admettent une image.

En d'autres termes,

$$\mathrm{Dom}(f) := \{x \in E : \text{il existe } y \in F \text{ tel que } x \, f \, y\}.$$

Remarque : $\mathrm{Dom}(f) \subset E$.

L'image de f, notée $\mathrm{Im}(f)$, est l'ensemble des éléments de F qui admettent au moins un antécédent.

Domaine de définition et image

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une fonction.

Le domaine de définition de f, noté $\mathrm{Dom}(f)$, est l'ensemble des éléments de E qui admettent une image.

En d'autres termes,

$$\mathrm{Dom}(f) := \{x \in E : \text{il existe } y \in F \text{ tel que } x \; f \; y\}.$$

Remarque : $\mathrm{Dom}(f) \subset E$.

L'image de f, notée $\mathrm{Im}(f)$, est l'ensemble des éléments de F qui admettent au moins un antécédent.

En d'autres termes,

$$\mathrm{Im}(f) := \{y \in F : \text{il existe } x \in E \text{ tel que } x \; f \; y\}.$$

Domaine de définition et image

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une fonction.

Le domaine de définition de f, noté $\mathrm{Dom}(f)$, est l'ensemble des éléments de E qui admettent une image.

En d'autres termes,

$$\mathrm{Dom}(f) := \{x \in E : \text{il existe } y \in F \text{ tel que } x \; f \; y\}.$$

Remarque : $\mathrm{Dom}(f) \subset E$.

L'image de f, notée $\mathrm{Im}(f)$, est l'ensemble des éléments de F qui admettent au moins un antécédent.

En d'autres termes,

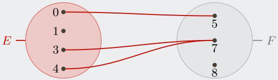
$$\mathrm{Im}(f) := \{y \in F : \text{il existe } x \in E \text{ tel que } x \; f \; y\}.$$

Remarque : $\mathrm{Im}(f) \subset F$.

Domaine de définition et image — exemples

Exemple

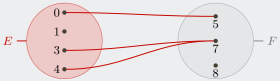
Soit la fonction f qui admet la représentation sagittale



Domaine de définition et image — exemples

Exemple

Soit la fonction f qui admet la représentation sagittale

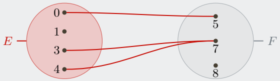


On a alors $\mathrm{Dom}(f) = \{0, 3, 4\}$ et $\mathrm{Im}(f) = \{5, 7\}$.

Domaine de définition et image — exemples

Exemple

Soit la fonction f qui admet la représentation sagittale



On a alors $\mathrm{Dom}(f) = \{0, 3, 4\}$ et $\mathrm{Im}(f) = \{5, 7\}$.

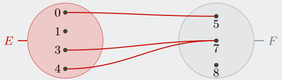
Exemple

Soit $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la fonction définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $g(n) := n + 1$.

Domaine de définition et image — exemples

Exemple

Soit la fonction f qui admet la représentation sagittale



On a alors $\mathrm{Dom}(f) = \{0, 3, 4\}$ et $\mathrm{Im}(f) = \{5, 7\}$.

Exemple

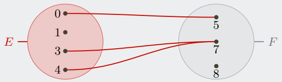
Soit $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la fonction définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $g(n) := n + 1$.

Alors, $\mathrm{Dom}(g) = \mathbb{N}$ et $\mathrm{Im}(g) = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Domaine de définition et image — exemples

Exemple

Soit la fonction f qui admet la représentation sagittale



On a alors $\mathrm{Dom}(f) = \{0, 3, 4\}$ et $\mathrm{Im}(f) = \{5, 7\}$.

Exemple

Soit $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la fonction définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $g(n) := n + 1$.

Alors, $\mathrm{Dom}(g) = \mathbb{N}$ et $\mathrm{Im}(g) = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Exemple

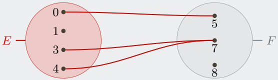
Soit $h : \mathbb{Z} \to \{1, 2\}$ la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{Z}$ par

$$h(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \leqslant -3, \\ 2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Domaine de définition et image — exemples

Exemple

Soit la fonction f qui admet la représentation sagittale



On a alors $\mathrm{Dom}(f) = \{0, 3, 4\}$ et $\mathrm{Im}(f) = \{5, 7\}$.

Exemple

Soit $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la fonction définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $g(n) := n + 1$.

Alors, $\mathrm{Dom}(g) = \mathbb{N}$ et $\mathrm{Im}(g) = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Exemple

Soit $h : \mathbb{Z} \to \{1, 2\}$ la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{Z}$ par

$$h(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \leqslant -3, \\ 2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors, $\mathrm{Dom}(h) = \mathbb{Z}$ et $\mathrm{Im}(h) = \{1, 2\}$.

Image d'un ensemble et image réciproque

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une fonction.

Soit X un ensemble tel que $X \subset E$.

Image d'un ensemble et image réciproque

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une fonction.

Soit X un ensemble tel que $X \subset E$. L'image de X par f, notée $f(X)$, est l'ensemble des éléments de F qui admettent au moins un antécédent dans X.

Image d'un ensemble et image réciproque

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une fonction.

Soit X un ensemble tel que $X \subset E$. L'image de X par f, notée $f(X)$, est l'ensemble des éléments de F qui admettent au moins un antécédent dans X.

En d'autres termes,

$$f(X) := \{f(x) : x \in X\}.$$

Image d'un ensemble et image réciproque

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une fonction.

Soit X un ensemble tel que $X \subset E$. L'image de X par f, notée $f(X)$, est l'ensemble des éléments de F qui admettent au moins un antécédent dans X.

En d'autres termes,

$$f(X) := \{f(x) : x \in X\}.$$

Remarque : $f(X) \subset \mathrm{Im}(f)$.

Image d'un ensemble et image réciproque

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une fonction.

Soit X un ensemble tel que $X \subset E$. L'image de X par f, notée $f(X)$, est l'ensemble des éléments de F qui admettent au moins un antécédent dans X.

En d'autres termes,

$$f(X) := \{f(x) : x \in X\}.$$

Remarque : $f(X) \subset \mathrm{Im}(f)$.

Soit Y un ensemble tel que $Y \subset F$.

Image d'un ensemble et image réciproque

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une fonction.

Soit X un ensemble tel que $X \subset E$. L'image de X par f, notée $f(X)$, est l'ensemble des éléments de F qui admettent au moins un antécédent dans X.

En d'autres termes,

$$f(X) := \{f(x) : x \in X\}.$$

Remarque : $f(X) \subset \mathrm{Im}(f)$.

Soit Y un ensemble tel que $Y \subset F$. L'image réciproque de Y par f, notée $f^{-1}(Y)$, est l'ensemble des éléments de E dont les images sont dans Y.

Image d'un ensemble et image réciproque

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une fonction.

Soit X un ensemble tel que $X \subset E$. L'image de X par f, notée $f(X)$, est l'ensemble des éléments de F qui admettent au moins un antécédent dans X.

En d'autres termes,

$$f(X) := \{f(x) : x \in X\}.$$

Remarque : $f(X) \subset \mathrm{Im}(f)$.

Soit Y un ensemble tel que $Y \subset F$. L'image réciproque de Y par f, notée $f^{-1}(Y)$, est l'ensemble des éléments de E dont les images sont dans Y.

En d'autres termes,

$$f^{-1}(Y) := \{x \in E : f(x) \in Y\}.$$

Image d'un ensemble et image réciproque

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une fonction.

Soit X un ensemble tel que $X \subset E$. L'image de X par f, notée $f(X)$, est l'ensemble des éléments de F qui admettent au moins un antécédent dans X.

En d'autres termes,

$$f(X) := \{f(x) : x \in X\}.$$

Remarque : $f(X) \subset \mathrm{Im}(f)$.

Soit Y un ensemble tel que $Y \subset F$. L'image réciproque de Y par f, notée $f^{-1}(Y)$, est l'ensemble des éléments de E dont les images sont dans Y.

En d'autres termes,

$$f^{-1}(Y) := \{x \in E : f(x) \in Y\}.$$

Remarque : $f^{-1}(Y) \subset \mathrm{Dom}(f)$.

Image d'un ensemble et image réciproque — exemples

Exemple

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la fonction définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $f(n) := n + 1$.

Image d'un ensemble et image réciproque — exemples

Exemple

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la fonction définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $f(n) := n + 1$.

On a

- $f(\{1, 3, 4\}) = \{2, 4, 5\}$;

Image d'un ensemble et image réciproque — exemples

Exemple

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la fonction définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $f(n) := n + 1$.

On a

- $f(\{1, 3, 4\}) = \{2, 4, 5\}$;
- $f^{-1}(\{5, 6\}) = \{4, 5\}$;

Image d'un ensemble et image réciproque — exemples

Exemple

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la fonction définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $f(n) := n + 1$.

On a

- $f(\{1, 3, 4\}) = \{2, 4, 5\}$;
- $f^{-1}(\{5, 6\}) = \{4, 5\}$;
- $f^{-1}(\{0\}) = \emptyset$;

Image d'un ensemble et image réciproque — exemples

Exemple

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la fonction définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $f(n) := n + 1$.

On a

- $f(\{1, 3, 4\}) = \{2, 4, 5\}$;
- $f^{-1}(\{5, 6\}) = \{4, 5\}$;
- $f^{-1}(\{0\}) = \emptyset$;
- $f^{-1}(\{0, 2, 4, 6, \dots\}) = \{1, 3, 5, \dots\}$.

Image d'un ensemble et image réciproque — exemples

Exemple

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la fonction définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $f(n) := n + 1$.

On a

- $f(\{1, 3, 4\}) = \{2, 4, 5\}$;
- $f^{-1}(\{5, 6\}) = \{4, 5\}$;
- $f^{-1}(\{0\}) = \emptyset$;
- $f^{-1}(\{0, 2, 4, 6, \dots\}) = \{1, 3, 5, \dots\}$.

Exemple

Soit $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la fonction définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $g(n) := m$ où m est le reste de la division entière de n par 3.

Image d'un ensemble et image réciproque — exemples

Exemple

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la fonction définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $f(n) := n + 1$.

On a

- $f(\{1, 3, 4\}) = \{2, 4, 5\}$;
- $f^{-1}(\{5, 6\}) = \{4, 5\}$;
- $f^{-1}(\{0\}) = \emptyset$;
- $f^{-1}(\{0, 2, 4, 6, \ldots\}) = \{1, 3, 5, \ldots\}$.

Exemple

Soit $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la fonction définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $g(n) := m$ où m est le reste de la division entière de n par 3.

On a

- $g(\{0, 1, 3, 4\}) = \{0, 1\}$;

Image d'un ensemble et image réciproque — exemples

Exemple

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la fonction définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $f(n) := n + 1$.

On a

- $f(\{1, 3, 4\}) = \{2, 4, 5\}$;
- $f^{-1}(\{5, 6\}) = \{4, 5\}$;
- $f^{-1}(\{0\}) = \emptyset$;
- $f^{-1}(\{0, 2, 4, 6, \ldots\}) = \{1, 3, 5, \ldots\}$.

Exemple

Soit $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la fonction définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $g(n) := m$ où m est le reste de la division entière de n par 3.

On a

- $g(\{0, 1, 3, 4\}) = \{0, 1\}$;
- $g^{-1}(\{3\}) = \emptyset$;

Image d'un ensemble et image réciproque — exemples

Exemple

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la fonction définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $f(n) := n + 1$.

On a

- $f(\{1, 3, 4\}) = \{2, 4, 5\}$;
- $f^{-1}(\{5, 6\}) = \{4, 5\}$;
- $f^{-1}(\{0\}) = \emptyset$;
- $f^{-1}(\{0, 2, 4, 6, \dots\}) = \{1, 3, 5, \dots\}$.

Exemple

Soit $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la fonction définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $g(n) := m$ où m est le reste de la division entière de n par 3.

On a

- $g(\{0, 1, 3, 4\}) = \{0, 1\}$;
- $g^{-1}(\{3\}) = \emptyset$;
- $g^{-1}(\{0\}) = \{0, 3, 6, 9, 12, \dots\}$;

Image d'un ensemble et image réciproque — exemples

Exemple

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la fonction définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $f(n) := n + 1$.

On a

- $f(\{1, 3, 4\}) = \{2, 4, 5\}$;
- $f^{-1}(\{5, 6\}) = \{4, 5\}$;
- $f^{-1}(\{0\}) = \emptyset$;
- $f^{-1}(\{0, 2, 4, 6, \dots\}) = \{1, 3, 5, \dots\}$.

Exemple

Soit $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la fonction définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $g(n) := m$ où m est le reste de la division entière de n par 3.

On a

- $g(\{0, 1, 3, 4\}) = \{0, 1\}$;
- $g^{-1}(\{3\}) = \emptyset$;
- $g^{-1}(\{0\}) = \{0, 3, 6, 9, 12, \dots\}$;
- $g^{-1}(\{1\}) = \{1, 4, 7, 10, 13, \dots\}$;

Image d'un ensemble et image réciproque — exemples

Exemple

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la fonction définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $f(n) := n + 1$.

On a

- $f(\{1, 3, 4\}) = \{2, 4, 5\}$;
- $f^{-1}(\{5, 6\}) = \{4, 5\}$;
- $f^{-1}(\{0\}) = \emptyset$;
- $f^{-1}(\{0, 2, 4, 6, \dots\}) = \{1, 3, 5, \dots\}$.

Exemple

Soit $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la fonction définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $g(n) := m$ où m est le reste de la division entière de n par 3.

On a

- $g(\{0, 1, 3, 4\}) = \{0, 1\}$;
- $g^{-1}(\{3\}) = \emptyset$;
- $g^{-1}(\{0\}) = \{0, 3, 6, 9, 12, \dots\}$;
- $g^{-1}(\{1\}) = \{1, 4, 7, 10, 13, \dots\}$;
- $g^{-1}(\{2\}) = \{2, 5, 8, 11, 14, \dots\}$;

Image d'un ensemble et image réciproque — exemples

Exemple

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la fonction définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $f(n) := n + 1$.

On a

- $f(\{1, 3, 4\}) = \{2, 4, 5\}$;
- $f^{-1}(\{5, 6\}) = \{4, 5\}$;
- $f^{-1}(\{0\}) = \emptyset$;
- $f^{-1}(\{0, 2, 4, 6, \dots\}) = \{1, 3, 5, \dots\}$.

Exemple

Soit $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la fonction définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $g(n) := m$ où m est le reste de la division entière de n par 3.

On a

- $g(\{0, 1, 3, 4\}) = \{0, 1\}$;
- $g^{-1}(\{3\}) = \emptyset$;
- $g^{-1}(\{0\}) = \{0, 3, 6, 9, 12, \dots\}$;
- $g^{-1}(\{1\}) = \{1, 4, 7, 10, 13, \dots\}$;
- $g^{-1}(\{2\}) = \{2, 5, 8, 11, 14, \dots\}$;
- $g^{-1}(\{0, 1, 2\}) = \mathbb{N}$.

Applications

Soient E et F deux ensembles.

Applications

Soient E et F deux ensembles.

Une fonction $f : E \to F$ est une application si tout élément de E admet une image.

Applications

Soient E et F deux ensembles.

Une fonction $f : E \to F$ est une application si tout élément de E admet une image.

En d'autres termes, f est une application si $\mathrm{Dom}(f) = E$.

Applications

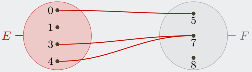
Soient E et F deux ensembles.

Une fonction $f : E \to F$ est une application si tout élément de E admet une image.

En d'autres termes, f est une application si $\mathrm{Dom}(f) = E$.

Exemple

La fonction f qui admet la représentation sagittale



n'est pas une application. En effet, $1 \in E$ n'admet pas d'image.

Applications

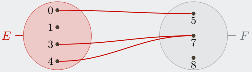
Soient E et F deux ensembles.

Une fonction $f : E \to F$ est une application si tout élément de E admet une image.

En d'autres termes, f est une application si $\mathrm{Dom}(f) = E$.

Exemple

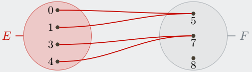
La fonction f qui admet la représentation sagittale



n'est pas une application. En effet, $1 \in E$ n'admet pas d'image.

Exemple

La fonction g qui admet la représentation sagittale



est une application.

Plan

Injectivité

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application.

L'application f est injective si tout élément de F possède **au plus un** antécédent.

Injectivité

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application.

L'application f est injective si tout élément de F possède **au plus un** antécédent.

En d'autres termes, f est injective si pour tous $x, x' \in E$, $f(x) = f(x')$ implique $x = x'$.

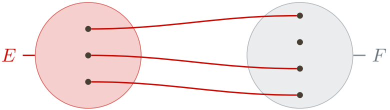
Injectivité

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application.

L'application f est injective si tout élément de F possède **au plus un** antécédent.

En d'autres termes, f est injective si pour tous $x, x' \in E$, $f(x) = f(x')$ implique $x = x'$.

Les applications injectives admettent des représentations sagittales de la forme



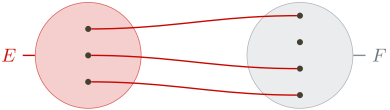
Injectivité

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application.

L'application f est injective si tout élément de F possède **au plus un** antécédent.

En d'autres termes, f est injective si pour tous $x, x' \in E$, $f(x) = f(x')$ implique $x = x'$.

Les applications injectives admettent des représentations sagittales de la forme



La configuration suivante est exclue en cas d'injectivité :