Relations binaires antisymétriques

Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E.

On dit que $\mathcal{R}$ est antisymétrique si pour tous $x, y \in E$, $x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} x$ impliquent $x = y$.

Exemple

Soient $E := \{e_1, e_2, e_3\}$ et $\mathcal{R}$ la relation binaire sur E vérifiant $e_1 \mathcal{R} e_1$, $e_2 \mathcal{R} e_3$ et $e_3 \mathcal{R} e_2$. Cette relation binaire n'est pas antisymétrique. En effet, on peut exhiber un **contre-exemple** qui met en défaut la propriété : on a $e_2 \mathcal{R} e_3$ et $e_3 \mathcal{R} e_2$.

Exemple

La relation binaire $\neq_{\mathbb{N}}$ n'est pas antisymétrique. En effet, on peut exhiber un **contre-exemple** qui met en défaut la propriété : on a $0 \neq_{\mathbb{N}} 1$ et $1 \neq_{\mathbb{N}} 0$.

Exemple

La relation binaire $\leqslant_{\mathbb{N}}$ est antisymétrique. En effet, pour tous nombres $x, y \in \mathbb{N}$, si l'on a $x \leqslant_{\mathbb{N}} y$ et $y \leqslant_{\mathbb{N}} x$, alors $x = y$.

Relations binaires transitives

Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E.

Relations binaires transitives

Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E.

On dit que $\mathcal{R}$ est transitive si pour tous $x, y, z \in E$, $x \mathrel{\mathcal{R}} y$ et $y \mathrel{\mathcal{R}} z$ impliquent $x \mathrel{\mathcal{R}} z$.

Relations binaires transitives

Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E.

On dit que $\mathcal{R}$ est transitive si pour tous $x, y, z \in E$, $x \,\mathcal{R}\, y$ et $y \,\mathcal{R}\, z$ impliquent $x \,\mathcal{R}\, z$.

Exemple

Soient $E := \{e_1, e_2, e_3\}$ et $\mathcal{R}$ la relation binaire sur E vérifiant $e_1 \,\mathcal{R}\, e_2$ et $e_2 \,\mathcal{R}\, e_3$. Cette relation binaire n'est pas transitive. En effet, on peut exhiber un **contre-exemple** qui met en défaut la propriété : on a $e_1 \,\mathcal{R}\, e_2$, $e_2 \,\mathcal{R}\, e_3$ et $e_1 \not\mathcal{R}\, e_3$.

Relations binaires transitives

Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E.

On dit que $\mathcal{R}$ est transitive si pour tous $x, y, z \in E$, $x \mathrel{\mathcal{R}} y$ et $y \mathrel{\mathcal{R}} z$ impliquent $x \mathrel{\mathcal{R}} z$.

Exemple

Soient $E := \{e_1, e_2, e_3\}$ et $\mathcal{R}$ la relation binaire sur E vérifiant $e_1 \mathrel{\mathcal{R}} e_2$ et $e_2 \mathrel{\mathcal{R}} e_3$. Cette relation binaire n'est pas transitive. En effet, on peut exhiber un **contre-exemple** qui met en défaut la propriété : on a $e_1 \mathrel{\mathcal{R}} e_2$, $e_2 \mathrel{\mathcal{R}} e_3$ et $e_1 \not\mathrel{\mathcal{R}} e_3$.

Exemple

La relation binaire $\leqslant_{\mathbb{Z}}$ est transitive. En effet, pour tous nombres $x, y, z \in \mathbb{Z}$, si $x \leqslant_{\mathbb{Z}} y$ et $y \leqslant_{\mathbb{Z}} z$, alors $x \leqslant_{\mathbb{Z}} z$.

Relations binaires transitives

Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E.

On dit que $\mathcal{R}$ est transitive si pour tous $x, y, z \in E$, $x \mathrel{\mathcal{R}} y$ et $y \mathrel{\mathcal{R}} z$ impliquent $x \mathrel{\mathcal{R}} z$.

Exemple

Soient $E := \{e_1, e_2, e_3\}$ et $\mathcal{R}$ la relation binaire sur E vérifiant $e_1 \mathrel{\mathcal{R}} e_2$ et $e_2 \mathrel{\mathcal{R}} e_3$. Cette relation binaire n'est pas transitive. En effet, on peut exhiber un **contre-exemple** qui met en défaut la propriété : on a $e_1 \mathrel{\mathcal{R}} e_2$, $e_2 \mathrel{\mathcal{R}} e_3$ et $e_1 \not\mathrel{\mathcal{R}} e_3$.

Exemple

La relation binaire $\leqslant_{\mathbb{Z}}$ est transitive. En effet, pour tous nombres $x, y, z \in \mathbb{Z}$, si $x \leqslant_{\mathbb{Z}} y$ et $y \leqslant_{\mathbb{Z}} z$, alors $x \leqslant_{\mathbb{Z}} z$.

Exemple

La relation binaire $\neq_{\mathbb{N}}$ n'est pas transitive. En effet, on peut exhiber un **contre-exemple** qui met en défaut la propriété : on a $0 \neq_{\mathbb{N}} 1$, $1 \neq_{\mathbb{N}} 0$ et 0 n'est pas en relation par $\neq_{\mathbb{N}}$ avec 0.

Classification des relations binaires usuelles

Voici les principales propriétés des relations binaires usuelles.

Ici, E est un ensemble quelconque, F est un ensemble de nombres et G est un ensemble de nombres entiers non nuls.

Relation	Réflexive	Irréflexive	Symétrique	Antisymétrique	Transitive
$=_E$					
$\neq_E$					
$\leqslant_F$					
$<_F$					
$\mid_G$					

Classification des relations binaires usuelles

Voici les principales propriétés des relations binaires usuelles.

Ici, E est un ensemble quelconque, F est un ensemble de nombres et G est un ensemble de nombres entiers non nuls.

Relation	Réflexive	Irréflexive	Symétrique	Antisymétrique	Transitive
$=_E$	Oui				
$\neq_E$					
$\leqslant_F$					
$<_F$					
$\mid_G$					

Classification des relations binaires usuelles

Voici les principales propriétés des relations binaires usuelles.

Ici, E est un ensemble quelconque, F est un ensemble de nombres et G est un ensemble de nombres entiers non nuls.

Relation	Réflexive	Irréflexive	Symétrique	Antisymétrique	Transitive
$=_E$	Oui	Non			
$\neq_E$					
$\leqslant_F$					
$<_F$					
$\vert_G$					

Classification des relations binaires usuelles

Voici les principales propriétés des relations binaires usuelles.

Ici, E est un ensemble quelconque, F est un ensemble de nombres et G est un ensemble de nombres entiers non nuls.

Relation	Réflexive	Irréflexive	Symétrique	Antisymétrique	Transitive
$=_E$	Oui	Non	Oui		
$\neq_E$					
$\leqslant_F$					
$<_F$					
$\vert_G$					

Classification des relations binaires usuelles

Voici les principales propriétés des relations binaires usuelles.

Ici, E est un ensemble quelconque, F est un ensemble de nombres et G est un ensemble de nombres entiers non nuls.

Relation	Réflexive	Irréflexive	Symétrique	Antisymétrique	Transitive
$=_E$	Oui	Non	Oui	Oui	
$\neq_E$					
$\leqslant_F$					
$<_F$					
$\mid_G$					

Classification des relations binaires usuelles

Voici les principales propriétés des relations binaires usuelles.

Ici, E est un ensemble quelconque, F est un ensemble de nombres et G est un ensemble de nombres entiers non nuls.

Relation	Réflexive	Irréflexive	Symétrique	Antisymétrique	Transitive
$=_E$	Oui	Non	Oui	Oui	Oui
$\neq_E$					
$\leqslant_F$					
$<_F$					
$\mid_G$					

Classification des relations binaires usuelles

Voici les principales propriétés des relations binaires usuelles.

Ici, E est un ensemble quelconque, F est un ensemble de nombres et G est un ensemble de nombres entiers non nuls.

Relation	Réflexive	Irréflexive	Symétrique	Antisymétrique	Transitive
$=_E$	Oui	Non	Oui	Oui	Oui
$\neq_E$	Non				
$\leqslant_F$					
$<_F$					
$\mid_G$					

Classification des relations binaires usuelles

Voici les principales propriétés des relations binaires usuelles.

Ici, E est un ensemble quelconque, F est un ensemble de nombres et G est un ensemble de nombres entiers non nuls.

Relation	Réflexive	Irréflexive	Symétrique	Antisymétrique	Transitive
$=_E$	Oui	Non	Oui	Oui	Oui
$\neq_E$	Non	Oui			
$\leqslant_F$					
$<_F$					
$\vert_G$					

Classification des relations binaires usuelles

Voici les principales propriétés des relations binaires usuelles.

Ici, E est un ensemble quelconque, F est un ensemble de nombres et G est un ensemble de nombres entiers non nuls.

Relation	Réflexive	Irréflexive	Symétrique	Antisymétrique	Transitive
$=_E$	Oui	Non	Oui	Oui	Oui
$\neq_E$	Non	Oui	Oui		
$\leqslant_F$					
$<_F$					
$\mid_G$					

Classification des relations binaires usuelles

Voici les principales propriétés des relations binaires usuelles.

Ici, E est un ensemble quelconque, F est un ensemble de nombres et G est un ensemble de nombres entiers non nuls.

Relation	Réflexive	Irréflexive	Symétrique	Antisymétrique	Transitive
$=_E$	Oui	Non	Oui	Oui	Oui
$\neq_E$	Non	Oui	Oui	Non	
$\leqslant_F$					
$<_F$					
$\mid_G$					

Classification des relations binaires usuelles

Voici les principales propriétés des relations binaires usuelles.

Ici, E est un ensemble quelconque, F est un ensemble de nombres et G est un ensemble de nombres entiers non nuls.

Relation	Réflexive	Irréflexive	Symétrique	Antisymétrique	Transitive
$=_E$	Oui	Non	Oui	Oui	Oui
$\neq_E$	Non	Oui	Oui	Non	Non
$\leqslant_F$					
$<_F$					
$\mid_G$					

Classification des relations binaires usuelles

Voici les principales propriétés des relations binaires usuelles.

Ici, E est un ensemble quelconque, F est un ensemble de nombres et G est un ensemble de nombres entiers non nuls.

Relation	Réflexive	Irréflexive	Symétrique	Antisymétrique	Transitive
$=_E$	Oui	Non	Oui	Oui	Oui
$\neq_E$	Non	Oui	Oui	Non	Non
$\leqslant_F$	Oui				
$<_F$					
$\mid_G$					

Classification des relations binaires usuelles

Voici les principales propriétés des relations binaires usuelles.

Ici, E est un ensemble quelconque, F est un ensemble de nombres et G est un ensemble de nombres entiers non nuls.

Relation	Réflexive	Irréflexive	Symétrique	Antisymétrique	Transitive
$=_E$	Oui	Non	Oui	Oui	Oui
$\neq_E$	Non	Oui	Oui	Non	Non
$\leqslant_F$	Oui	Non			
$<_F$					
$\|_G$					

Classification des relations binaires usuelles

Voici les principales propriétés des relations binaires usuelles.

Ici, E est un ensemble quelconque, F est un ensemble de nombres et G est un ensemble de nombres entiers non nuls.

Relation	Réflexive	Irréflexive	Symétrique	Antisymétrique	Transitive
$=_E$	Oui	Non	Oui	Oui	Oui
$\neq_E$	Non	Oui	Oui	Non	Non
$\leqslant_F$	Oui	Non	Non		
$<_F$					
$\mid_G$					

Classification des relations binaires usuelles

Voici les principales propriétés des relations binaires usuelles.

Ici, E est un ensemble quelconque, F est un ensemble de nombres et G est un ensemble de nombres entiers non nuls.

Relation	Réflexive	Irréflexive	Symétrique	Antisymétrique	Transitive
$=_E$	Oui	Non	Oui	Oui	Oui
$\neq_E$	Non	Oui	Oui	Non	Non
$\leqslant_F$	Oui	Non	Non	Oui	
$<_F$					
$\vert_G$					

Classification des relations binaires usuelles

Voici les principales propriétés des relations binaires usuelles.

Ici, E est un ensemble quelconque, F est un ensemble de nombres et G est un ensemble de nombres entiers non nuls.

Relation	Réflexive	Irréflexive	Symétrique	Antisymétrique	Transitive
$=_E$	Oui	Non	Oui	Oui	Oui
$\neq_E$	Non	Oui	Oui	Non	Non
$\leqslant_F$	Oui	Non	Non	Oui	Oui
$<_F$					
$\mid_G$					

Classification des relations binaires usuelles

Voici les principales propriétés des relations binaires usuelles.

Ici, E est un ensemble quelconque, F est un ensemble de nombres et G est un ensemble de nombres entiers non nuls.

Relation	Réflexive	Irréflexive	Symétrique	Antisymétrique	Transitive
$=_E$	Oui	Non	Oui	Oui	Oui
$\neq_E$	Non	Oui	Oui	Non	Non
$\leqslant_F$	Oui	Non	Non	Oui	Oui
$<_F$	Non				
$\vert_G$					

Classification des relations binaires usuelles

Voici les principales propriétés des relations binaires usuelles.

Ici, E est un ensemble quelconque, F est un ensemble de nombres et G est un ensemble de nombres entiers non nuls.

Relation	Réflexive	Irréflexive	Symétrique	Antisymétrique	Transitive
$=_E$	Oui	Non	Oui	Oui	Oui
$\neq_E$	Non	Oui	Oui	Non	Non
$\leqslant_F$	Oui	Non	Non	Oui	Oui
$<_F$	Non	Oui			
$\vert_G$					

Classification des relations binaires usuelles

Voici les principales propriétés des relations binaires usuelles.

Ici, E est un ensemble quelconque, F est un ensemble de nombres et G est un ensemble de nombres entiers non nuls.

Relation	Réflexive	Irréflexive	Symétrique	Antisymétrique	Transitive
$=_E$	Oui	Non	Oui	Oui	Oui
$\neq_E$	Non	Oui	Oui	Non	Non
$\leqslant_F$	Oui	Non	Non	Oui	Oui
$<_F$	Non	Oui	Non		
$\|_G$					

Classification des relations binaires usuelles

Voici les principales propriétés des relations binaires usuelles.

Ici, E est un ensemble quelconque, F est un ensemble de nombres et G est un ensemble de nombres entiers non nuls.

Relation	Réflexive	Irréflexive	Symétrique	Antisymétrique	Transitive
$=_E$	Oui	Non	Oui	Oui	Oui
$\neq_E$	Non	Oui	Oui	Non	Non
$\leqslant_F$	Oui	Non	Non	Oui	Oui
$<_F$	Non	Oui	Non	Oui	
$\vert_G$					

Classification des relations binaires usuelles

Voici les principales propriétés des relations binaires usuelles.

Ici, E est un ensemble quelconque, F est un ensemble de nombres et G est un ensemble de nombres entiers non nuls.

Relation	Réflexive	Irréflexive	Symétrique	Antisymétrique	Transitive
$=_E$	Oui	Non	Oui	Oui	Oui
$\neq_E$	Non	Oui	Oui	Non	Non
$\leqslant_F$	Oui	Non	Non	Oui	Oui
$<_F$	Non	Oui	Non	Oui	Oui
$\|_G$					

Classification des relations binaires usuelles

Voici les principales propriétés des relations binaires usuelles.

Ici, E est un ensemble quelconque, F est un ensemble de nombres et G est un ensemble de nombres entiers non nuls.

Relation	Réflexive	Irréflexive	Symétrique	Antisymétrique	Transitive
$=_E$	Oui	Non	Oui	Oui	Oui
$\neq_E$	Non	Oui	Oui	Non	Non
$\leqslant_F$	Oui	Non	Non	Oui	Oui
$<_F$	Non	Oui	Non	Oui	Oui
$\mid_G$	Oui				

Classification des relations binaires usuelles

Voici les principales propriétés des relations binaires usuelles.

Ici, E est un ensemble quelconque, F est un ensemble de nombres et G est un ensemble de nombres entiers non nuls.

Relation	Réflexive	Irréflexive	Symétrique	Antisymétrique	Transitive
$=_E$	Oui	Non	Oui	Oui	Oui
$\neq_E$	Non	Oui	Oui	Non	Non
$\leqslant_F$	Oui	Non	Non	Oui	Oui
$<_F$	Non	Oui	Non	Oui	Oui
$\mid_G$	Oui	Non			

Classification des relations binaires usuelles

Voici les principales propriétés des relations binaires usuelles.

Ici, E est un ensemble quelconque, F est un ensemble de nombres et G est un ensemble de nombres entiers non nuls.

Relation	Réflexive	Irréflexive	Symétrique	Antisymétrique	Transitive
$=_E$	Oui	Non	Oui	Oui	Oui
$\neq_E$	Non	Oui	Oui	Non	Non
$\leqslant_F$	Oui	Non	Non	Oui	Oui
$<_F$	Non	Oui	Non	Oui	Oui
$\mid_G$	Oui	Non	Non		

Classification des relations binaires usuelles

Voici les principales propriétés des relations binaires usuelles.

Ici, E est un ensemble quelconque, F est un ensemble de nombres et G est un ensemble de nombres entiers non nuls.

Relation	Réflexive	Irréflexive	Symétrique	Antisymétrique	Transitive
$=_E$	Oui	Non	Oui	Oui	Oui
$\neq_E$	Non	Oui	Oui	Non	Non
$\leqslant_F$	Oui	Non	Non	Oui	Oui
$<_F$	Non	Oui	Non	Oui	Oui
$\|_G$	Oui	Non	Non	Oui	

Classification des relations binaires usuelles

Voici les principales propriétés des relations binaires usuelles.

Ici, E est un ensemble quelconque, F est un ensemble de nombres et G est un ensemble de nombres entiers non nuls.

Relation	Réflexive	Irréflexive	Symétrique	Antisymétrique	Transitive
$=_E$	Oui	Non	Oui	Oui	Oui
$\neq_E$	Non	Oui	Oui	Non	Non
$\leqslant_F$	Oui	Non	Non	Oui	Oui
$<_F$	Non	Oui	Non	Oui	Oui
$\|_G$	Oui	Non	Non	Oui	Oui

Lecture de propriétés sur les graphes orientés

Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E.

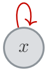
Il est possible de lire certaines des propriétés de $\mathcal{R}$ sur son graphe orienté.

Lecture de propriétés sur les graphes orientés

Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E.

Il est possible de lire certaines des propriétés de $\mathcal{R}$ sur son graphe orienté.

$\mathcal{R}$ est réflexive si chaque sommet x possède une boucle.

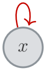


Lecture de propriétés sur les graphes orientés

Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E.

Il est possible de lire certaines des propriétés de $\mathcal{R}$ sur son graphe orienté.

$\mathcal{R}$ est réflexive si chaque sommet x possède une boucle.



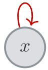
$\mathcal{R}$ est irréflexive si aucun sommet x ne possède de boucle.

Lecture de propriétés sur les graphes orientés

Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E.

Il est possible de lire certaines des propriétés de $\mathcal{R}$ sur son graphe orienté.

$\mathcal{R}$ est réflexive si chaque sommet x possède une boucle.

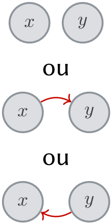


$\mathcal{R}$ est irréflexive si aucun sommet x ne possède de boucle.

$\mathcal{R}$ est symétrique si dès qu'il existe un arc de x vers y, il existe aussi un arc de y vers x.

Lecture de propriétés sur les graphes orientés

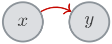
$\mathcal{R}$ est antisymétrique si entre deux sommets x et y, il n'y a aucun arc entre x et y ou bien il y a un arc de x vers y ou bien il y a un arc de y vers x.



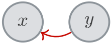
Lecture de propriétés sur les graphes orientés

$\mathcal{R}$ est antisymétrique si entre deux sommets x et y, il n'y a aucun arc entre x et y ou bien il y a un arc de x vers y ou bien il y a un arc de y vers x.

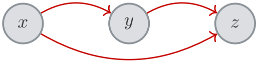
ou



ou



$\mathcal{R}$ est transitive si dès qu'il existe un arc de x vers y et un arc de y vers z, alors il existe un arc de x vers z.



Lecture de propriétés sur les graphes orientés

Exemple

La relation binaire $\mathcal{R}$ dont le graphe orienté est

Lecture de propriétés sur les graphes orientés

Exemple

La relation binaire $\mathcal{R}$ dont le graphe orienté est

réflexive,

Lecture de propriétés sur les graphes orientés

Exemple

La relation binaire $\mathcal{R}$ dont le graphe orienté est

réflexive, antisymétrique

Lecture de propriétés sur les graphes orientés

Exemple

La relation binaire $\mathcal{R}$ dont le graphe orienté est

réflexive, antisymétrique et transitive.

Lecture de propriétés sur les graphes orientés

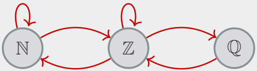
Exemple

La relation binaire $\mathcal{R}$ dont le graphe orienté est

réflexive, antisymétrique et transitive.

Exemple

La relation binaire $\mathcal{R}$ dont le graphe orienté est



Lecture de propriétés sur les graphes orientés

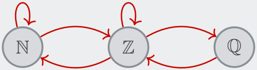
Exemple

La relation binaire $\mathcal{R}$ dont le graphe orienté est

réflexive, antisymétrique et transitive.

Exemple

La relation binaire $\mathcal{R}$ dont le graphe orienté est



n'est ni réflexive,

Lecture de propriétés sur les graphes orientés

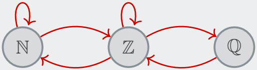
Exemple

La relation binaire $\mathcal{R}$ dont le graphe orienté est

réflexive, antisymétrique et transitive.

Exemple

La relation binaire $\mathcal{R}$ dont le graphe orienté est



n'est ni réflexive, ni irréflexive.

Lecture de propriétés sur les graphes orientés

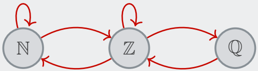
Exemple

La relation binaire $\mathcal{R}$ dont le graphe orienté est

réflexive, antisymétrique et transitive.

Exemple

La relation binaire $\mathcal{R}$ dont le graphe orienté est



n'est ni réflexive, ni irréflexive. Elle est symétrique

Lecture de propriétés sur les graphes orientés

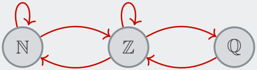
Exemple

La relation binaire $\mathcal{R}$ dont le graphe orienté est

réflexive, antisymétrique et transitive.

Exemple

La relation binaire $\mathcal{R}$ dont le graphe orienté est



n'est ni réflexive, ni irréflexive. Elle est symétrique et non transitive.

Plan

Relations d'ordre

Soit E un ensemble.

Une relation binaire $\mathcal{R}$ sur E est une relation d'ordre si elle est **réflexive**, **antisymétrique** et **transitive**.

Relations d'ordre

Soit E un ensemble.

Une relation binaire $\mathcal{R}$ sur E est une relation d'ordre si elle est **réflexive**, **antisymétrique** et **transitive**.

Dans ce contexte, si un élément x de E est en relation avec un élément y de E, on dit que x est plus petit que y.

Relations d'ordre

Soit E un ensemble.

Une relation binaire $\mathcal{R}$ sur E est une relation d'ordre si elle est **réflexive**, **antisymétrique** et **transitive**.

Dans ce contexte, si un élément x de E est en relation avec un élément y de E, on dit que x est plus petit que y.

Si pour tous $x, y \in E$, x est plus petit que y ou y est plus petit que x, alors on dit que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre totale.

Relations d'ordre

Soit E un ensemble.

Une relation binaire $\mathcal{R}$ sur E est une relation d'ordre si elle est **réflexive**, **antisymétrique** et **transitive**.

Dans ce contexte, si un élément x de E est en relation avec un élément y de E, on dit que x est plus petit que y.

Si pour tous $x, y \in E$, x est plus petit que y ou y est plus petit que x, alors on dit que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre totale.

Les relations d'ordre généralisent les relations de comparaison usuelles.

Les relations de comparaison usuelles sont en effet des relations d'ordre particulières.

Relations d'ordre

Exemple

La relation binaire $\leqslant_{\mathbb{R}}$ est une relation d'ordre totale.

Relations d'ordre

Exemple

La relation binaire $\leqslant_{\mathbb{R}}$ est une relation d'ordre totale.

Exemple

La relation binaire d'inclusion $\subset$ sur $\mathcal{P}(E)$ où E est un ensemble quelconque est une relation d'ordre.

Relations d'ordre

Exemple

La relation binaire $\leqslant_{\mathbb{R}}$ est une relation d'ordre totale.

Exemple

La relation binaire d'inclusion $\subset$ sur $\mathcal{P}(E)$ où E est un ensemble quelconque est une relation d'ordre.

Exemple

Soit la relation binaire

$$\mathcal{R} := \{(x, y) : x, y \in \mathbb{N} \text{ et } x \text{ et } y \text{ commencent par le même chiffre}\}.$$

$\mathcal{R}$ n'est pas une relation d'ordre car elle n'est pas antisymétrique. Pour le montrer, on construit un contre-exemple : on a $21 \,\mathcal{R}\, 2$ et $2 \,\mathcal{R}\, 21$.

Déterminer si une relation est une relation d'ordre

Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E.

Déterminer si une relation est une relation d'ordre

Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E.

Pour démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre, on procède en démontrant **toutes** les trois propriétés suivantes :

1. $\mathcal{R}$ est réflexive ;
2. $\mathcal{R}$ est antisymétrique ;
3. $\mathcal{R}$ est transitive.

Déterminer si une relation est une relation d'ordre

Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E.

Pour démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre, on procède en démontrant **toutes** les trois propriétés suivantes :

1. $\mathcal{R}$ est réflexive ;
2. $\mathcal{R}$ est antisymétrique ;
3. $\mathcal{R}$ est transitive.

À l'inverse, pour démontrer que $\mathcal{R}$ n'est pas une relation d'ordre, il suffit de mettre en évidence que $\mathcal{R}$ ne vérifie pas **au moins** l'une des trois propriétés suivantes :

1. la réflexivité ;
2. l'antisymétrie ;
3. la transitivité.

Relations d'ordre — démonstration 1

Soit l'énoncé

« La relation binaire $|_M$ est une relation d'ordre. », où $M := \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Relations d'ordre — démonstration 1

Soit l'énoncé

« La relation binaire $|_M$ est une relation d'ordre. », où $M := \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Rappel : on a $x \,|_M\, y$ s'il existe $z \in \mathbb{N}$ tel que $xz = y$.

Relations d'ordre — démonstration 1

Soit l'énoncé

« La relation binaire $|_M$ est une relation d'ordre. », où $M := \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Rappel : on a $x \,|_M\, y$ s'il existe $z \in \mathbb{N}$ tel que $xz = y$.

Démonstration : on commence par démontrer le fait que $|_M$ est réflexive.
Soit $x \in M$. Comme $x1 = x$, on a $x \,|_M\, x$. Ainsi, $|_M$ est réflexive.

Relations d'ordre — démonstration 1

Soit l'énoncé

« La relation binaire $|_M$ est une relation d'ordre. », où $M := \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Rappel : on a $x \,|_M\, y$ s'il existe $z \in \mathbb{N}$ tel que $xz = y$.

Démonstration : on commence par démontrer le fait que $|_M$ est réflexive. Soit $x \in M$. Comme $x1 = x$, on a $x \,|_M\, x$. Ainsi, $|_M$ est réflexive.

Montrons maintenant que $|_M$ est antisymétrique. Soient $x, y \in M$ tels que $x \,|_M\, y$ et $y \,|_M\, x$. Alors, il existe $z_1, z_2 \in \mathbb{N}$ tels que $xz_1 = y$ et $yz_2 = x$. On a ainsi $(xz_1)z_2 = x$, ce qui entraîne successivement que $x(z_1z_2) = x$, que $z_1 = z_2 = 1$ et que $x = y$. La relation binaire $|_M$ est donc antisymétrique.

Relations d'ordre — démonstration 1

Soit l'énoncé

« La relation binaire $|_M$ est une relation d'ordre. », où $M := \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Rappel : on a $x \,|_M\, y$ s'il existe $z \in \mathbb{N}$ tel que $xz = y$.

Démonstration : on commence par démontrer le fait que $|_M$ est réflexive. Soit $x \in M$. Comme $x1 = x$, on a $x \,|_M\, x$. Ainsi, $|_M$ est réflexive.

Montrons maintenant que $|_M$ est antisymétrique. Soient $x, y \in M$ tels que $x \,|_M\, y$ et $y \,|_M\, x$. Alors, il existe $z_1, z_2 \in \mathbb{N}$ tels que $xz_1 = y$ et $yz_2 = x$. On a ainsi $(xz_1)z_2 = x$, ce qui entraîne successivement que $x(z_1z_2) = x$, que $z_1 = z_2 = 1$ et que $x = y$. La relation binaire $|_M$ est donc antisymétrique.

Finalement, montrons que $|_M$ est transitive. Soient $x, y, z \in M$ tels que $x \,|_M\, y$ et $y \,|_M\, z$. Alors, il existe $t_1, t_2 \in \mathbb{N}$ tels que $xt_1 = y$ et $yt_2 = z$. On a ainsi $(xt_1)t_2 = z$, ce qui entraîne $x(t_1t_2) = z$ et ainsi $x \,|_M\, z$. La relation binaire $|_M$ est donc transitive.

Relations d'ordre — démonstration 1

Soit l'énoncé

« La relation binaire $|_M$ est une relation d'ordre. », où $M := \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Rappel : on a $x \,|_M\, y$ s'il existe $z \in \mathbb{N}$ tel que $xz = y$.

Démonstration : on commence par démontrer le fait que $|_M$ est réflexive. Soit $x \in M$. Comme $x1 = x$, on a $x \,|_M\, x$. Ainsi, $|_M$ est réflexive.

Montrons maintenant que $|_M$ est antisymétrique. Soient $x, y \in M$ tels que $x \,|_M\, y$ et $y \,|_M\, x$. Alors, il existe $z_1, z_2 \in \mathbb{N}$ tels que $xz_1 = y$ et $yz_2 = x$. On a ainsi $(xz_1)z_2 = x$, ce qui entraîne successivement que $x(z_1z_2) = x$, que $z_1 = z_2 = 1$ et que $x = y$. La relation binaire $|_M$ est donc antisymétrique.

Finalement, montrons que $|_M$ est transitive. Soient $x, y, z \in M$ tels que $x \,|_M\, y$ et $y \,|_M\, z$. Alors, il existe $t_1, t_2 \in \mathbb{N}$ tels que $xt_1 = y$ et $yt_2 = z$. On a ainsi $(xt_1)t_2 = z$, ce qui entraîne $x(t_1t_2) = z$ et ainsi $x \,|_M\, z$. La relation binaire $|_M$ est donc transitive.

En conclusion, $|_M$ est réflexive, antisymétrique et transitive. C'est donc une relation d'ordre.

Relations d'ordre — démonstration 2

Soit l'énoncé

« Pour tout ensemble E, la relation binaire $\subset$ sur $\mathcal{P}(E)$ est une relation d'ordre. ».

Relations d'ordre — démonstration 2

Soit l'énoncé

« Pour tout ensemble E, la relation binaire $\subset$ sur $\mathcal{P}(E)$ est une relation d'ordre. ».

Démonstration : montrons que $\subset$ est réflexive. Soit $F \in \mathcal{P}(E)$. Comme tout ensemble est inclus dans lui-même, on a bien $F \subset F$. Ainsi, $\subset$ est réflexive.

Relations d'ordre — démonstration 2

Soit l'énoncé

« Pour tout ensemble E, la relation binaire $\subset$ sur $\mathcal{P}(E)$ est une relation d'ordre. ».

Démonstration : montrons que $\subset$ est réflexive. Soit $F \in \mathcal{P}(E)$. Comme tout ensemble est inclus dans lui-même, on a bien $F \subset F$. Ainsi, $\subset$ est réflexive.

Montrons maintenant que $\subset$ est antisymétrique. Soient $F, G \in \mathcal{P}(E)$ tels que $F \subset G$ et $G \subset F$. Alors, par le **théorème de la double inclusion**, on a $F = G$. Ceci entraîne que $\subset$ est antisymétrique.

Relations d'ordre — démonstration 2

Soit l'énoncé

« Pour tout ensemble E, la relation binaire $\subset$ sur $\mathcal{P}(E)$ est une relation d'ordre. ».

Démonstration : montrons que $\subset$ est réflexive. Soit $F \in \mathcal{P}(E)$. Comme tout ensemble est inclus dans lui-même, on a bien $F \subset F$. Ainsi, $\subset$ est réflexive.

Montrons maintenant que $\subset$ est antisymétrique. Soient $F, G \in \mathcal{P}(E)$ tels que $F \subset G$ et $G \subset F$. Alors, par le **théorème de la double inclusion**, on a $F = G$. Ceci entraîne que $\subset$ est antisymétrique.

Montrons finalement que $\subset$ est transitive. Soient $F, G, H \in \mathcal{P}(E)$ tels que $F \subset G$ et $G \subset H$. Ainsi, pour tout $x \in F$, on a $x \in G$ et pour tout $x \in G$, on a $x \in H$. Ceci montre que pour tout $x \in F$, on a aussi $x \in H$. Ceci entraîne que $F \subset H$. La relation binaire $\subset$ est donc transitive.

Relations d'ordre — démonstration 2

Soit l'énoncé

« Pour tout ensemble E, la relation binaire $\subset$ sur $\mathcal{P}(E)$ est une relation d'ordre. ».

Démonstration : montrons que $\subset$ est réflexive. Soit $F \in \mathcal{P}(E)$. Comme tout ensemble est inclus dans lui-même, on a bien $F \subset F$. Ainsi, $\subset$ est réflexive.

Montrons maintenant que $\subset$ est antisymétrique. Soient $F, G \in \mathcal{P}(E)$ tels que $F \subset G$ et $G \subset F$. Alors, par le **théorème de la double inclusion**, on a $F = G$. Ceci entraîne que $\subset$ est antisymétrique.

Montrons finalement que $\subset$ est transitive. Soient $F, G, H \in \mathcal{P}(E)$ tels que $F \subset G$ et $G \subset H$. Ainsi, pour tout $x \in F$, on a $x \in G$ et pour tout $x \in G$, on a $x \in H$. Ceci montre que pour tout $x \in F$, on a aussi $x \in H$. Ceci entraîne que $F \subset H$. La relation binaire $\subset$ est donc transitive.

En conclusion, $\subset$ est réflexive, antisymétrique et transitive. C'est donc une relation d'ordre.

Plan

Relations d'équivalence

Soit E un ensemble.

Une relation binaire $\mathcal{R}$ sur E est une relation d'équivalence si elle est **réflexive**, **symétrique** et **transitive**.

Relations d'équivalence

Soit E un ensemble.

Une relation binaire $\mathcal{R}$ sur E est une relation d'équivalence si elle est **réflexive**, **symétrique** et **transitive**.

Dans ce contexte, si un élément x de E est en relation avec un élément y de E, on dit que x et y sont équivalents.

Relations d'équivalence

Soit E un ensemble.

Une relation binaire $\mathcal{R}$ sur E est une relation d'équivalence si elle est **réflexive**, **symétrique** et **transitive**.

Dans ce contexte, si un élément x de E est en relation avec un élément y de E, on dit que x et y sont équivalents.

Les relations d'équivalence généralisent la notion d'égalité usuelle.

La notion d'égalité usuelle est en effet une relation d'équivalence particulière.

Relations d'équivalence

Exemple

La relation binaire $=_{\mathbb{R}}$ est une relation d'équivalence.

Relations d'équivalence

Exemple

La relation binaire $=_{\mathbb{R}}$ est une relation d'équivalence.

Exemple

La relation binaire
$\mathcal{R} := \{(x, y) : x, y \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ et x et y ont le même signe$\}$ est une relation d'équivalence.

Relations d'équivalence

Exemple

La relation binaire $=_{\mathbb{R}}$ est une relation d'équivalence.

Exemple

La relation binaire
$\mathcal{R} := \{(x, y) : x, y \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ et x et y ont le même signe$\}$ est une relation d'équivalence.

Exemple

La relation binaire $\leqslant_{\mathbb{Z}}$ n'est pas une relation d'équivalence. En effet, cette relation binaire n'est pas symétrique. Pour le montrer, on construit un contre-exemple : on a $-1 \leqslant_{\mathbb{Z}} 2$ et $2 \not\leqslant_{\mathbb{Z}} -1$.

Relations d'équivalence

Exemple

La relation binaire $=_{\mathbb{R}}$ est une relation d'équivalence.

Exemple

La relation binaire
$\mathcal{R} := \{(x, y) : x, y \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ et x et y ont le même signe$\}$ est une relation d'équivalence.

Exemple

La relation binaire $\leqslant_{\mathbb{Z}}$ n'est pas une relation d'équivalence. En effet, cette relation binaire n'est pas symétrique. Pour le montrer, on construit un contre-exemple : on a $-1 \leqslant_{\mathbb{Z}} 2$ et $2 \not\leqslant_{\mathbb{Z}} -1$.

Exemple

La relation binaire $\neq_{\mathbb{N}}$ n'est pas une relation d'équivalence. On peut ici réfuter le fait qu'elle soit réflexive en donnant un contre-exemple : 0 n'est pas en relation avec 0.

Déterminer si une relation est une relation d'équivalence

Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E.

Déterminer si une relation est une relation d'équivalence

Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E.

Pour démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence, on procède en démontrant **toutes** les trois propriétés suivantes :

1. $\mathcal{R}$ est réflexive ;
2. $\mathcal{R}$ est symétrique ;
3. $\mathcal{R}$ est transitive.

Déterminer si une relation est une relation d'équivalence

Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E.

Pour démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence, on procède en démontrant **toutes** les trois propriétés suivantes :

1. $\mathcal{R}$ est réflexive ;
2. $\mathcal{R}$ est symétrique ;
3. $\mathcal{R}$ est transitive.

À l'inverse, pour démontrer que $\mathcal{R}$ n'est pas une relation d'équivalence, il suffit de mettre en évidence que $\mathcal{R}$ ne vérifie pas **au moins** l'une des trois propriétés suivantes :

1. la réflexivité ;
2. la symétrie ;
3. la transitivité.

Relations d'équivalence — démonstration

Soit l'énoncé

« Soit $\mathcal{R}$ la relation sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ telle que l'on a $(x, y) \, \mathcal{R} \, (x', y')$ si $x + y = x' + y'$.
Alors, $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. ».

Relations d'équivalence — démonstration

Soit l'énoncé

« Soit $\mathcal{R}$ la relation sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ telle que l'on a $(x, y) \, \mathcal{R} \, (x', y')$ si $x + y = x' + y'$. Alors, $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. ».

Démonstration : on commence par démontrer le fait que $\mathcal{R}$ est réflexive. Soit $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Comme $x + y = x + y$, on a $(x, y) \, \mathcal{R} \, (x, y)$. Ainsi, $\mathcal{R}$ est réflexive.

Relations d'équivalence — démonstration

Soit l'énoncé

« Soit $\mathcal{R}$ la relation sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ telle que l'on a $(x, y) \,\mathcal{R}\, (x', y')$ si $x + y = x' + y'$. Alors, $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. ».

Démonstration : on commence par démontrer le fait que $\mathcal{R}$ est réflexive. Soit $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Comme $x + y = x + y$, on a $(x, y) \,\mathcal{R}\, (x, y)$. Ainsi, $\mathcal{R}$ est réflexive.

Montrons maintenant que $\mathcal{R}$ est symétrique. Soient $(x, y), (x', y') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tels que $(x, y) \,\mathcal{R}\, (x', y')$. On a alors $x + y = x' + y'$. Ainsi, on a $x' + y' = x + y$, ce qui entraîne $(x', y') \,\mathcal{R}\, (x, y)$. La relation binaire $\mathcal{R}$ est donc symétrique.

Relations d'équivalence — démonstration

Soit l'énoncé

« Soit $\mathcal{R}$ la relation sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ telle que l'on a $(x, y) \mathcal{R} (x', y')$ si $x + y = x' + y'$. Alors, $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. ».

Démonstration : on commence par démontrer le fait que $\mathcal{R}$ est réflexive. Soit $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Comme $x + y = x + y$, on a $(x, y) \mathcal{R} (x, y)$. Ainsi, $\mathcal{R}$ est réflexive.

Montrons maintenant que $\mathcal{R}$ est symétrique. Soient $(x, y), (x', y') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tels que $(x, y) \mathcal{R} (x', y')$. On a alors $x + y = x' + y'$. Ainsi, on a $x' + y' = x + y$, ce qui entraîne $(x', y') \mathcal{R} (x, y)$. La relation binaire $\mathcal{R}$ est donc symétrique.

Finalement, montrons que $\mathcal{R}$ est transitive. Soient $(x, y), (x', y'), (x'', y'') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tels que $(x, y) \mathcal{R} (x', y')$ et $(x', y') \mathcal{R} (x'', y'')$. On a alors $x + y = x' + y'$ et $x' + y' = x'' + y''$. Ainsi, on a $x + y = x'' + y''$, ce qui entraîne $(x, y) \mathcal{R} (x'', y'')$. La relation binaire $\mathcal{R}$ est donc transitive.

Relations d’équivalence — démonstration

Soit l’énoncé

« Soit $\mathcal{R}$ la relation sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ telle que l’on a $(x, y) \,\mathcal{R}\, (x', y')$ si $x + y = x' + y'$. Alors, $\mathcal{R}$ est une relation d’équivalence. ».

Démonstration : on commence par démontrer le fait que $\mathcal{R}$ est réflexive. Soit $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Comme $x + y = x + y$, on a $(x, y) \,\mathcal{R}\, (x, y)$. Ainsi, $\mathcal{R}$ est réflexive.

Montrons maintenant que $\mathcal{R}$ est symétrique. Soient $(x, y), (x', y') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tels que $(x, y) \,\mathcal{R}\, (x', y')$. On a alors $x + y = x' + y'$. Ainsi, on a $x' + y' = x + y$, ce qui entraîne $(x', y') \,\mathcal{R}\, (x, y)$. La relation binaire $\mathcal{R}$ est donc symétrique.

Finalement, montrons que $\mathcal{R}$ est transitive. Soient $(x, y), (x', y'), (x'', y'') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tels que $(x, y) \,\mathcal{R}\, (x', y')$ et $(x', y') \,\mathcal{R}\, (x'', y'')$. On a alors $x + y = x' + y'$ et $x' + y' = x'' + y''$. Ainsi, on a $x + y = x'' + y''$, ce qui entraîne $(x, y) \,\mathcal{R}\, (x'', y'')$. La relation binaire $\mathcal{R}$ est donc transitive.

En conclusion, $\mathcal{R}$ est réflexive, symétrique et transitive. C’est donc une relation d’équivalence.