Plan

Ensembles disjoints

Deux ensembles E et F sont disjoints s'ils n'ont aucun élément en commun.

Ensembles disjoints

Deux ensembles E et F sont disjoints s'ils n'ont aucun élément en commun.

Exemple

- $\{0, 1, 2\}$ et $\{1, 3, 5\}$ ne sont pas disjoints : ils se partagent l'élément 1.

Ensembles disjoints

Deux ensembles E et F sont disjoints s'ils n'ont aucun élément en commun.

Exemple

- $\{0, 1, 2\}$ et $\{1, 3, 5\}$ ne sont pas disjoints : ils se partagent l'élément 1.
- $[\![3, 10]\!]$ et $[\![12, 23]\!]$ sont disjoints.

Ensembles disjoints

Deux ensembles E et F sont disjoints s'ils n'ont aucun élément en commun.

Exemple

- $\{0, 1, 2\}$ et $\{1, 3, 5\}$ ne sont pas disjoints : ils se partagent l'élément 1.
- $[\![3, 10]\!]$ et $[\![12, 23]\!]$ sont disjoints.
- $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ ne sont pas disjoints : ils se partagent tous les entiers positifs.

Ensembles disjoints

Deux ensembles E et F sont disjoints s'ils n'ont aucun élément en commun.

Exemple

- $\{0, 1, 2\}$ et $\{1, 3, 5\}$ ne sont pas disjoints : ils se partagent l'élément 1.
- $[\![3, 10]\!]$ et $[\![12, 23]\!]$ sont disjoints.
- $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ ne sont pas disjoints : ils se partagent tous les entiers positifs.

Il y a trois méthodes pour démontrer que deux ensembles E et F sont disjoints :

1. montrer que pour tout $x \in E$, on a $x \notin F$;

Ensembles disjoints

Deux ensembles E et F sont disjoints s'ils n'ont aucun élément en commun.

Exemple

- $\{0, 1, 2\}$ et $\{1, 3, 5\}$ ne sont pas disjoints : ils se partagent l'élément 1.
- $[\![3, 10]\!]$ et $[\![12, 23]\!]$ sont disjoints.
- $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ ne sont pas disjoints : ils se partagent tous les entiers positifs.

Il y a trois méthodes pour démontrer que deux ensembles E et F sont disjoints :

1. montrer que pour tout $x \in E$, on a $x \notin F$;
2. montrer que pour tout $x \in F$, on a $x \notin E$;

Ensembles disjoints

Deux ensembles E et F sont disjoints s'ils n'ont aucun élément en commun.

Exemple

- $\{0, 1, 2\}$ et $\{1, 3, 5\}$ ne sont pas disjoints : ils se partagent l'élément 1.
- $[\![3, 10]\!]$ et $[\![12, 23]\!]$ sont disjoints.
- $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ ne sont pas disjoints : ils se partagent tous les entiers positifs.

Il y a trois méthodes pour démontrer que deux ensembles E et F sont disjoints :

1. montrer que pour tout $x \in E$, on a $x \notin F$;
2. montrer que pour tout $x \in F$, on a $x \notin E$;
3. calculer l'intersection $E \cap F$ et montrer que c'est l'ensemble vide.

Ensembles disjoints

Deux ensembles E et F sont disjoints s'ils n'ont aucun élément en commun.

Exemple

- $\{0,1,2\}$ et $\{1,3,5\}$ ne sont pas disjoints : ils se partagent l'élément 1.
- $[\![3,10]\!]$ et $[\![12,23]\!]$ sont disjoints.
- $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ ne sont pas disjoints : ils se partagent tous les entiers positifs.

Il y a trois méthodes pour démontrer que deux ensembles E et F sont disjoints :

1. montrer que pour tout $x \in E$, on a $x \notin F$;
2. montrer que pour tout $x \in F$, on a $x \notin E$;
3. calculer l'intersection $E \cap F$ et montrer que c'est l'ensemble vide.

À l'inverse, pour montrer que deux ensembles E et F ne sont pas disjoints, il suffit d'exhiber un élément x tel que $x \in E$ et $x \in F$.

Partitions ensemblistes

Soit E un ensemble. Une partition ensembliste de E est un ensemble $\{F_1, \dots, F_n\}$ d'ensembles tels que

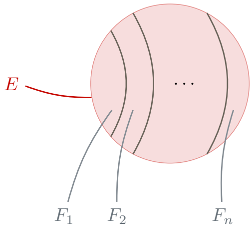
1. pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $F_i \subset E$;
2. pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $F_i \neq \emptyset$;
3. pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, si $i \neq j$, alors $F_i \cap F_j = \emptyset$;
4. $F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_n = E$.

Partitions ensemblistes

Soit E un ensemble. Une partition ensembliste de E est un ensemble $\{F_1, \ldots, F_n\}$ d'ensembles tels que

1. pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $F_i \subset E$;
2. pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $F_i \neq \emptyset$;
3. pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, si $i \neq j$, alors $F_i \cap F_j = \emptyset$;
4. $F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_n = E$.

Ces propriétés sont résumées par le diagramme de Venn suivant.

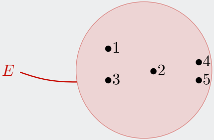


Intuitivement, une partition ensembliste de E est un « découpage » de E en parties plus petites, non vides et disjointes.

Partitions ensemblistes

Exemple

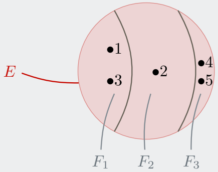
- Soit $E := \{1, 2, 3, 4, 5\}$. L'ensemble $\{F_1, F_2, F_3\}$ tel que $F_1 := \{1, 3\}$, $F_2 := \{2\}$ et $F_3 := \{4, 5\}$ est une partition ensembliste de E.



Partitions ensemblistes

Exemple

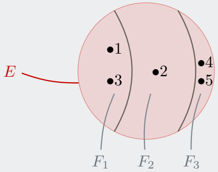
- Soit $E := \{1, 2, 3, 4, 5\}$. L'ensemble $\{F_1, F_2, F_3\}$ tel que $F_1 := \{1, 3\}$, $F_2 := \{2\}$ et $F_3 := \{4, 5\}$ est une partition ensembliste de E.



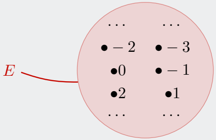
Partitions ensemblistes

Exemple

- Soit $E := \{1, 2, 3, 4, 5\}$. L'ensemble $\{F_1, F_2, F_3\}$ tel que $F_1 := \{1, 3\}$, $F_2 := \{2\}$ et $F_3 := \{4, 5\}$ est une partition ensembliste de E.



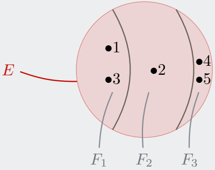
- L'ensemble $\{F_1, F_2\}$ où F_1 est l'ensemble des entiers pairs et F_2 est l'ensemble des entiers impairs forme une partition ensembliste de $\mathbb{Z}$.



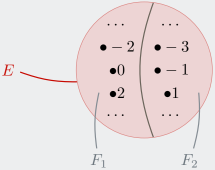
Partitions ensemblistes

Exemple

- Soit $E := \{1, 2, 3, 4, 5\}$. L'ensemble $\{F_1, F_2, F_3\}$ tel que $F_1 := \{1, 3\}$, $F_2 := \{2\}$ et $F_3 := \{4, 5\}$ est une partition ensembliste de E.



- L'ensemble $\{F_1, F_2\}$ où F_1 est l'ensemble des entiers pairs et F_2 est l'ensemble des entiers impairs forme une partition ensembliste de $\mathbb{Z}$.



Partie 2 : relations binaires et fonctions

Plan

Introduction

Les relations binaires sont, en plus des ensembles, des objets mathématiques fondamentaux.

Introduction

Les relations binaires sont, en plus des ensembles, des objets mathématiques fondamentaux.

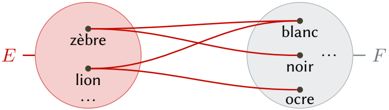
Intuitivement, une relation binaire permet de modéliser des liens entre deux ensembles en établissant des « ponts » entre les éléments de ces deux derniers.

Introduction

Les relations binaires sont, en plus des ensembles, des objets mathématiques fondamentaux.

Intuitivement, une relation binaire permet de modéliser des liens entre deux ensembles en établissant des « ponts » entre les éléments de ces deux derniers.

Par exemple, si E est l'ensemble des animaux et F est l'ensemble des couleurs, on peut considérer la relation binaire qui établit un lien entre toute espèce animale x de E et toute couleur y de F s'il est possible que x prenne y comme couleur.

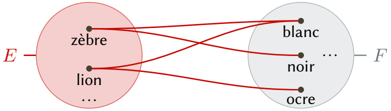


Introduction

Les relations binaires sont, en plus des ensembles, des objets mathématiques fondamentaux.

Intuitivement, une relation binaire permet de modéliser des liens entre deux ensembles en établissant des « ponts » entre les éléments de ces deux derniers.

Par exemple, si E est l'ensemble des animaux et F est l'ensemble des couleurs, on peut considérer la relation binaire qui établit un lien entre toute espèce animale x de E et toute couleur y de F s'il est possible que x prenne y comme couleur.



Dans ce chapitre, nous introduisons la notion de relation binaire et de représentation de relations binaires. Nous verrons les principales propriétés des relations binaires et étudierons les relations d'ordre et les relations d'équivalence.

Plan

Relations binaires

Soient E et F deux ensembles.

Une relation binaire entre E et F est un sous-ensemble de $E \times F$.

Relations binaires

Soient E et F deux ensembles.

Une relation binaire entre E et F est un sous-ensemble de $E \times F$.

Une relation binaire est notée par une lettre majuscule arrondie

$$\mathcal{R}, \mathcal{S}, \mathcal{T}, \textit{etc.}$$

Relations binaires

Soient E et F deux ensembles.

Une relation binaire entre E et F est un sous-ensemble de $E \times F$.

Une relation binaire est notée par une lettre majuscule arrondie

$$\mathcal{R}, \mathcal{S}, \mathcal{T}, \textit{etc.}$$

Soit $\mathcal{R} \subset E \times F$ une relation binaire.

Relations binaires

Soient E et F deux ensembles.

Une relation binaire entre E et F est un sous-ensemble de $E \times F$.

Une relation binaire est notée par une lettre majuscule arrondie

$$\mathcal{R}, \mathcal{S}, \mathcal{T}, \textit{etc.}$$

Soit $\mathcal{R} \subset E \times F$ une relation binaire.

Si $(x, y) \in \mathcal{R}$, on dit que x est en relation avec y.

Relations binaires

Soient E et F deux ensembles.

Une relation binaire entre E et F est un sous-ensemble de $E \times F$.

Une relation binaire est notée par une lettre majuscule arrondie

$$\mathcal{R}, \mathcal{S}, \mathcal{T}, \textit{etc.}$$

Soit $\mathcal{R} \subset E \times F$ une relation binaire.

Si $(x, y) \in \mathcal{R}$, on dit que x est en relation avec y.

Cette propriété est notée

$$x \,\mathcal{R}\, y.$$

Relations binaires

Soient E et F deux ensembles.

Une relation binaire entre E et F est un sous-ensemble de $E \times F$.

Une relation binaire est notée par une lettre majuscule arrondie

$$\mathcal{R}, \mathcal{S}, \mathcal{T}, \textit{etc.}$$

Soit $\mathcal{R} \subset E \times F$ une relation binaire.

Si $(x, y) \in \mathcal{R}$, on dit que x est en relation avec y.

Cette propriété est notée

$$x \,\mathcal{R}\, y.$$

En revanche, si $(x, y) \notin \mathcal{R}$, on dit que x n'est pas en relation avec y.

Relations binaires

Soient E et F deux ensembles.

Une relation binaire entre E et F est un sous-ensemble de $E \times F$.

Une relation binaire est notée par une lettre majuscule arrondie

$$\mathcal{R}, \mathcal{S}, \mathcal{T}, \textit{etc.}$$

Soit $\mathcal{R} \subset E \times F$ une relation binaire.

Si $(x, y) \in \mathcal{R}$, on dit que x est en relation avec y.

Cette propriété est notée

$$x \, \mathcal{R} \, y.$$

En revanche, si $(x, y) \notin \mathcal{R}$, on dit que x n'est pas en relation avec y.

Cette propriété est notée

$$x \, \not\mathcal{R} \, y.$$

Relations binaires

Soient E et F deux ensembles.

Une relation binaire entre E et F est un sous-ensemble de $E \times F$.

Une relation binaire est notée par une lettre majuscule arrondie

$$\mathcal{R}, \mathcal{S}, \mathcal{T}, \textit{etc.}$$

Soit $\mathcal{R} \subset E \times F$ une relation binaire.

Si $(x, y) \in \mathcal{R}$, on dit que x est en relation avec y.

Cette propriété est notée

$$x \, \mathcal{R} \, y.$$

En revanche, si $(x, y) \notin \mathcal{R}$, on dit que x n'est pas en relation avec y.

Cette propriété est notée

$$x \, \not\mathcal{R} \, y.$$

On appelle relation binaire sur E toute relation binaire entre E et E.

Relations binaires — exemples

Exemple

$\mathcal{R} := \{(0,1),(1,-1)\}$ est une relation binaire entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$.

Relations binaires — exemples

Exemple

$\mathcal{R} := \{(0,1), (1,-1)\}$ est une relation binaire entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$.

On a, entre autres,

$$0 \,\mathcal{R}\, 1, \qquad 1 \,\mathcal{R}\, -1, \qquad 21 \not\mathcal{R} -13.$$

Relations binaires — exemples

Exemple

$\mathcal{R} := \{(0,1),(1,-1)\}$ est une relation binaire entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$.

On a, entre autres,

$$0\,\mathcal{R}\,1, \qquad 1\,\mathcal{R}\,-1, \qquad 21\,\not{\mathcal{R}}\,-13.$$

Exemple

Soit $\mathcal{R} := \{(x,y) : x, y \in \mathbb{Z}$ et le dernier chiffre de l'écriture de x est $y\}$.

Relations binaires — exemples

Exemple

$\mathcal{R} := \{(0,1),(1,-1)\}$ est une relation binaire entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$.

On a, entre autres,

$$0\,\mathcal{R}\,1, \qquad 1\,\mathcal{R}\,-1, \qquad 21\,\not\mathcal{R}\,-13.$$

Exemple

Soit $\mathcal{R} := \{(x,y) : x, y \in \mathbb{Z}$ et le dernier chiffre de l'écriture de x est $y\}$.

On a, entre autres,

$$0\,\mathcal{R}\,0, \qquad -54\,\mathcal{R}\,4,$$

$$236\,\mathcal{R}\,6, \qquad 344\,\not\mathcal{R}\,3.$$

Relations binaires — exemples

Exemple

Soit $\mathcal{R} := \{(E, F) : E$ et F ensembles tels que $E \cap F \neq \emptyset\}$.

Relations binaires — exemples

Exemple

Soit $\mathcal{R} := \{(E, F) : E$ et F ensembles tels que $E \cap F \neq \emptyset\}$.

Deux ensembles E et F sont en relation s'ils ont au moins un élément en commun.

Relations binaires — exemples

Exemple

Soit $\mathcal{R} := \{(E, F) : E$ et F ensembles tels que $E \cap F \neq \emptyset\}$.

Deux ensembles E et F sont en relation s'ils ont au moins un élément en commun. (Question : cette relation binaire est-elle bien définie ?)

Relations binaires — exemples

Exemple

Soit $\mathcal{R} := \{(E, F) : E$ et F ensembles tels que $E \cap F \neq \emptyset\}$.

Deux ensembles E et F sont en relation s'ils ont au moins un élément en commun. (Question : cette relation binaire est-elle bien définie ?)

Ainsi, on a entre autres,

$$\mathbb{N} \,\mathcal{R}\, \mathbb{N}, \qquad \mathbb{R} \,\mathcal{R}\, \mathbb{N}, \qquad \{0, 1\} \,\mathcal{R}\, \{1, 2\}, \qquad \mathbb{Z} \not\mathcal{R} \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right\}.$$

Relations binaires — exemples

Exemple

Soit $\mathcal{R} := \{(E, F) : E$ et F ensembles tels que $E \cap F \neq \emptyset\}$.

Deux ensembles E et F sont en relation s'ils ont au moins un élément en commun. (Question : cette relation binaire est-elle bien définie ?)

Ainsi, on a entre autres,

$$\mathbb{N} \,\mathcal{R}\, \mathbb{N}, \qquad \mathbb{R} \,\mathcal{R}\, \mathbb{N}, \qquad \{0, 1\} \,\mathcal{R}\, \{1, 2\}, \qquad \mathbb{Z} \not\mathcal{R} \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right\}.$$

Exemple

Soit $\mathcal{R} := \{(x, y) : x, y \in \mathbb{N}$ et $x \leqslant y\}$.

Relations binaires — exemples

Exemple

Soit $\mathcal{R} := \{(E, F) : E$ et F ensembles tels que $E \cap F \neq \emptyset\}$.

Deux ensembles E et F sont en relation s'ils ont au moins un élément en commun. (Question : cette relation binaire est-elle bien définie ?)

Ainsi, on a entre autres,

$$\mathbb{N} \,\mathcal{R}\, \mathbb{N}, \qquad \mathbb{R} \,\mathcal{R}\, \mathbb{N}, \qquad \{0,1\} \,\mathcal{R}\, \{1,2\}, \qquad \mathbb{Z} \not{\mathcal{R}} \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right\}.$$

Exemple

Soit $\mathcal{R} := \{(x, y) : x, y \in \mathbb{N}$ et $x \leqslant y\}$.

On a, entre autres,

$$0 \,\mathcal{R}\, 0, \qquad 0 \,\mathcal{R}\, 3, \qquad 25 \,\mathcal{R}\, 40.$$

Relations binaires — exemples

Exemple

Soit $\mathcal{R} := \{(E, F) : E$ et F ensembles tels que $E \cap F \neq \emptyset\}$.

Deux ensembles E et F sont en relation s'ils ont au moins un élément en commun. (Question : cette relation binaire est-elle bien définie ?)

Ainsi, on a entre autres,

$$\mathbb{N} \,\mathcal{R}\, \mathbb{N}, \qquad \mathbb{R} \,\mathcal{R}\, \mathbb{N}, \qquad \{0, 1\} \,\mathcal{R}\, \{1, 2\}, \qquad \mathbb{Z} \not\mathcal{R} \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right\}.$$

Exemple

Soit $\mathcal{R} := \{(x, y) : x, y \in \mathbb{N}$ et $x \leqslant y\}$.

On a, entre autres,

$$0 \,\mathcal{R}\, 0, \qquad 0 \,\mathcal{R}\, 3, \qquad 25 \,\mathcal{R}\, 40.$$

De plus, $\mathcal{R}$ étant une relation binaire entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}$, on dit que $\mathcal{R}$ est une relation binaire sur $\mathbb{N}$.

Relations binaires usuelles

Sur tout ensemble E, il existe les deux relations binaires suivantes :

Symbole	Définition
$=_E$	$\{(x, x) : x \in E\}$
$\neq_E$	$(E \times E) \setminus =_E$

La 1re est la relation d'égalité et la 2e est la relation de différence.

Relations binaires usuelles

Sur tout ensemble E, il existe les deux relations binaires suivantes :

Symbole	Définition
$=_E$	$\{(x, x) : x \in E\}$
$\neq_E$	$(E \times E) \setminus =_E$

La 1re est la relation d'égalité et la 2e est la relation de différence.

Sur tout ensemble E de nombres entiers (c.-à-d. un sous-ensemble de $\mathbb{Z}$), il existe les deux relations binaires suivantes :

Symbole	Définition
$\mid_E$	$\{(x, y) \in E \times E :$ y est divisible par $x\}$
$\nmid_E$	$\{(x, y) \in E \times E :$ y n'est pas divisible par $x\}$

La 1re est la relation de divisibilité et la 2e est la relation de non divisibilité.

Relations binaires usuelles

Sur tout ensemble E de nombres réels (c.-à-d. un sous-ensemble de $\mathbb{R}$), il existe les quatre relations binaires suivantes :

Symbole	Définition
$\leqslant_E$	$\{(x, y) \in E \times E :$ x est inférieur à $y\}$
$\geqslant_E$	$\{(x, y) \in E \times E :$ x est supérieur à $y\}$
$<_E$	$\{(x, y) \in E \times E :$ x est strictement inférieur à $y\}$
$>_E$	$\{(x, y) \in E \times E :$ x est strictement supérieur à $y\}$

Ce sont les relations de comparaison.

L’inclusion ensembliste comme relation binaire

Soit E un ensemble.

L'inclusion ensembliste comme relation binaire

Soit E un ensemble.

Le symbole d'inclusion d'ensembles $\subset_E$ forme une relation binaire sur $\mathcal{P}(E)$.

L'inclusion ensembliste comme relation binaire

Soit E un ensemble.

Le symbole d'inclusion d'ensembles $\subset_E$ forme une relation binaire sur $\mathcal{P}(E)$.

Cette relation binaire vérifie

$$\subset_E = \{(F, G) : F, G \in \mathcal{P}(E) \text{ et } F \text{ est un sous-ensemble de } G\}.$$

L'inclusion ensembliste comme relation binaire

Soit E un ensemble.

Le symbole d'inclusion d'ensembles $\subset_E$ forme une relation binaire sur $\mathcal{P}(E)$.

Cette relation binaire vérifie

$$\subset_E = \{(F, G) : F, G \in \mathcal{P}(E) \text{ et } F \text{ est un sous-ensemble de } G\}.$$

En effet, si E est par exemple l'ensemble $\{0, 1, 2\}$, on a entre autres,

$$(\emptyset, \{0\}) \in \subset_E,$$

L'inclusion ensembliste comme relation binaire

Soit E un ensemble.

Le symbole d'inclusion d'ensembles $\subset_E$ forme une relation binaire sur $\mathcal{P}(E)$.

Cette relation binaire vérifie

$$\subset_E = \{(F, G) : F, G \in \mathcal{P}(E) \text{ et } F \text{ est un sous-ensemble de } G\}.$$

En effet, si E est par exemple l'ensemble $\{0, 1, 2\}$, on a entre autres,

$$(\emptyset, \{0\}) \in \subset_E,$$
$$(\emptyset, \{0, 1\}) \in \subset_E,$$

L'inclusion ensembliste comme relation binaire

Soit E un ensemble.

Le symbole d'inclusion d'ensembles $\subset_E$ forme une relation binaire sur $\mathcal{P}(E)$.

Cette relation binaire vérifie

$$\subset_E = \{(F, G) : F, G \in \mathcal{P}(E) \text{ et } F \text{ est un sous-ensemble de } G\}.$$

En effet, si E est par exemple l'ensemble $\{0, 1, 2\}$, on a entre autres,

$$\begin{aligned}(\emptyset, \{0\}) &\in \subset_E, \\ (\emptyset, \{0, 1\}) &\in \subset_E, \\ (\{0\}, \{0, 1\}) &\in \subset_E,\end{aligned}$$

L'inclusion ensembliste comme relation binaire

Soit E un ensemble.

Le symbole d'inclusion d'ensembles $\subset_E$ forme une relation binaire sur $\mathcal{P}(E)$.

Cette relation binaire vérifie

$$\subset_E = \{(F, G) : F, G \in \mathcal{P}(E) \text{ et } F \text{ est un sous-ensemble de } G\}.$$

En effet, si E est par exemple l'ensemble $\{0, 1, 2\}$, on a entre autres,

$$\begin{aligned}(\emptyset, \{0\}) &\in \subset_E, \\ (\emptyset, \{0, 1\}) &\in \subset_E, \\ (\{0\}, \{0, 1\}) &\in \subset_E, \\ (\{0, 2\}, \{0, 2\}) &\in \subset_E,\end{aligned}$$

L'inclusion ensembliste comme relation binaire

Soit E un ensemble.

Le symbole d'inclusion d'ensembles $\subset_E$ forme une relation binaire sur $\mathcal{P}(E)$.

Cette relation binaire vérifie

$$\subset_E = \{(F, G) : F, G \in \mathcal{P}(E) \text{ et } F \text{ est un sous-ensemble de } G\}.$$

En effet, si E est par exemple l'ensemble $\{0, 1, 2\}$, on a entre autres,

$$\begin{aligned}
(\emptyset, \{0\}) &\in \subset_E, \\
(\emptyset, \{0, 1\}) &\in \subset_E, \\
(\{0\}, \{0, 1\}) &\in \subset_E, \\
(\{0, 2\}, \{0, 2\}) &\in \subset_E, \\
(\{0, 2\}, \{0, 1, 2\}) &\in \subset_E .
\end{aligned}$$

Relations binaires remarquables

Soient E et F deux ensembles.

Relations binaires remarquables

Soient E et F deux ensembles.

La relation binaire vide entre E et F, notée $\emptyset_{E,F}$, est définie par

$$\emptyset_{E,F} := \emptyset.$$

Relations binaires remarquables

Soient E et F deux ensembles.

La relation binaire vide entre E et F, notée $\emptyset_{E,F}$, est définie par

$$\emptyset_{E,F} := \emptyset.$$

La relation binaire pleine entre E et F, notée $\Pi_{E,F}$, est définie par

$$\Pi_{E,F} := E \times F.$$

Relations binaires remarquables

Soient E et F deux ensembles.

La relation binaire vide entre E et F, notée $\emptyset_{E,F}$, est définie par

$$\emptyset_{E,F} := \emptyset.$$

La relation binaire pleine entre E et F, notée $\Pi_{E,F}$, est définie par

$$\Pi_{E,F} := E \times F.$$

La relation binaire identité sur E, notée I_E, est définie par

$$I_E := \{(x, x) : x \in E\}.$$

Représentation sagittale

Soient E et F deux ensembles et $\mathcal{R}$ une relation binaire entre E et F.

Représentation sagittale

Soient E et F deux ensembles et $\mathcal{R}$ une relation binaire entre E et F.

La représentation sagittale de $\mathcal{R}$ consiste à représenter les diagrammes de Venn de E et de F, celui de E à gauche et celui de F à droite. On relie de plus tous les éléments de E et de F qui sont en relation.

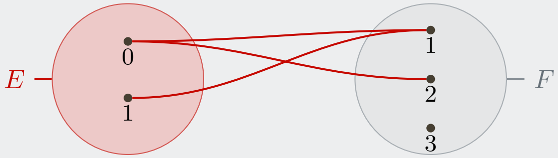
Représentation sagittale

Soient E et F deux ensembles et $\mathcal{R}$ une relation binaire entre E et F.

La représentation sagittale de $\mathcal{R}$ consiste à représenter les diagrammes de Venn de E et de F, celui de E à gauche et celui de F à droite. On relie de plus tous les éléments de E et de F qui sont en relation.

Exemple

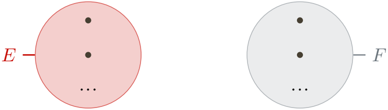
La représentation sagittale de la relation binaire $\mathcal{R}$ entre $E := \{0, 1\}$ et $F := \{1, 2, 3\}$ vérifiant $0 \,\mathcal{R}\, 1$, $0 \,\mathcal{R}\, 2$ et $1 \,\mathcal{R}\, 1$, est



Représentations sagittales des relations binaires remarquables

Soient E et F deux ensembles.

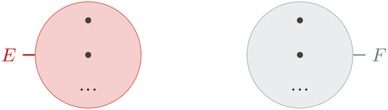
La représentation sagittale de la relation binaire vide $\emptyset_{E,F}$ est



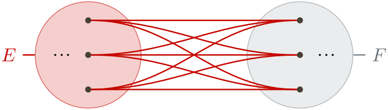
Représentations sagittales des relations binaires remarquables

Soient E et F deux ensembles.

La représentation sagittale de la relation binaire vide $\emptyset_{E,F}$ est



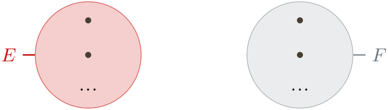
La représentation sagittale de la relation binaire pleine $\Pi_{E,F}$ est



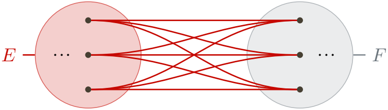
Représentations sagittales des relations binaires remarquables

Soient E et F deux ensembles.

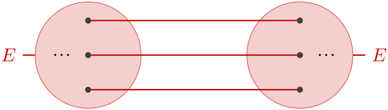
La représentation sagittale de la relation binaire vide $\emptyset_{E,F}$ est



La représentation sagittale de la relation binaire pleine $\Pi_{E,F}$ est



La représentation sagittale de la relation binaire identité I_E est



Représentation matricielle

Soient E et F deux ensembles et $\mathcal{R}$ une relation binaire entre E et F.

Représentation matricielle

Soient E et F deux ensembles et $\mathcal{R}$ une relation binaire entre E et F.

La représentation matricielle de $\mathcal{R}$ est un tableau dont les colonnes sont indexées par les éléments de E et les lignes sont indexées par les éléments de F.

Représentation matricielle

Soient E et F deux ensembles et $\mathcal{R}$ une relation binaire entre E et F.

La représentation matricielle de $\mathcal{R}$ est un tableau dont les colonnes sont indexées par les éléments de E et les lignes sont indexées par les éléments de F. On place une croix $\times$ à l'intersection des lignes et colonnes qui correspondent à des éléments en relation.

Représentation matricielle

Soient E et F deux ensembles et $\mathcal{R}$ une relation binaire entre E et F.

La représentation matricielle de $\mathcal{R}$ est un tableau dont les colonnes sont indexées par les éléments de E et les lignes sont indexées par les éléments de F. On place une croix $\times$ à l'intersection des lignes et colonnes qui correspondent à des éléments en relation.

La représentation matricielle n'est réalisable que lorsque E et F sont des ensembles finis.

Représentation matricielle

Soient E et F deux ensembles et $\mathcal{R}$ une relation binaire entre E et F.

La représentation matricielle de $\mathcal{R}$ est un tableau dont les colonnes sont indexées par les éléments de E et les lignes sont indexées par les éléments de F. On place une croix $\times$ à l'intersection des lignes et colonnes qui correspondent à des éléments en relation.

La représentation matricielle n'est réalisable que lorsque E et F sont des ensembles finis.

Exemple

La représentation matricielle de la relation binaire $\mathcal{R}$ entre $E := [\![1, 5]\!]$ et $F := [\![1, 4]\!]$ vérifiant $1 \,\mathcal{R}\, 1$, $1 \,\mathcal{R}\, 3$, $2 \,\mathcal{R}\, 1$, $2 \,\mathcal{R}\, 4$, $3 \,\mathcal{R}\, 3$, $5 \,\mathcal{R}\, 1$ et $5 \,\mathcal{R}\, 4$ est

4		$\times$			$\times$
3	$\times$		$\times$		
2					
1	$\times$	$\times$			$\times$
	1	2	3	4	5

Représentations matricielles des relations binaires remarquables

Soient $E := \{e_1, e_2, e_3\}$ et $F := \{f_1, f_2\}$ deux ensembles.

Représentations matricielles des relations binaires remarquables

Soient $E := \{e_1, e_2, e_3\}$ et $F := \{f_1, f_2\}$ deux ensembles.

La représentation matricielle de la relation binaire vide $\emptyset_{E,F}$ est

f_2			
f_1			
	e_1	e_2	e_3

Représentations matricielles des relations binaires remarquables

Soient $E := \{e_1, e_2, e_3\}$ et $F := \{f_1, f_2\}$ deux ensembles.

La représentation matricielle de la relation binaire vide $\emptyset_{E,F}$ est

f_2			
f_1			
	e_1	e_2	e_3

La représentation matricielle de la relation binaire pleine $\Pi_{E,F}$ est

f_2	$\times$	$\times$	$\times$
f_1	$\times$	$\times$	$\times$
	e_1	e_2	e_3

Représentations matricielles des relations binaires remarquables

Soient $E := \{e_1, e_2, e_3\}$ et $F := \{f_1, f_2\}$ deux ensembles.

La représentation matricielle de la relation binaire vide $\emptyset_{E,F}$ est

f_2			
f_1			
	e_1	e_2	e_3

La représentation matricielle de la relation binaire pleine $\Pi_{E,F}$ est

f_2	$\times$	$\times$	$\times$
f_1	$\times$	$\times$	$\times$
	e_1	e_2	e_3

La représentation matricielle de la relation binaire identité I_E est

e_3			$\times$
e_2		$\times$	
e_1	$\times$		
	e_1	e_2	e_3

Représentation par graphe orienté

Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E.

Représentation par graphe orienté

Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E.

La représentation par graphe orienté de $\mathcal{R}$ s'obtient en dessinant un sommet pour chaque élément de E et, pour tout $x \in E$ en relation avec $y \in E$, en dessinant un arc d'origine x et de destination y.

Représentation par graphe orienté

Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E.

La représentation par graphe orienté de $\mathcal{R}$ s'obtient en dessinant un sommet pour chaque élément de E et, pour tout $x \in E$ en relation avec $y \in E$, en dessinant un arc d'origine x et de destination y.

La représentation par graphe orienté n'est réalisable que lorsque E est un ensemble fini.

Représentation par graphe orienté

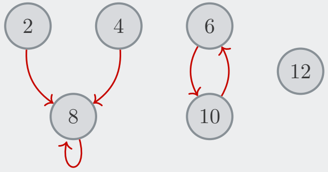
Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E.

La représentation par graphe orienté de $\mathcal{R}$ s'obtient en dessinant un sommet pour chaque élément de E et, pour tout $x \in E$ en relation avec $y \in E$, en dessinant un arc d'origine x et de destination y.

La représentation par graphe orienté n'est réalisable que lorsque E est un ensemble fini.

Exemple

La représentation par graphe orienté de la relation binaire $\mathcal{R}$ sur $E := \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ vérifiant $2 \mathcal{R} 8$, $4 \mathcal{R} 8$, $6 \mathcal{R} 10$, $8 \mathcal{R} 8$ et $10 \mathcal{R} 6$ est



Représentations par graphe orienté des relations binaires remarquables

Soit $E := \{e_1, e_2, e_3\}$ un ensemble.

Représentations par graphe orienté des relations binaires remarquables

Soit $E := \{e_1, e_2, e_3\}$ un ensemble.

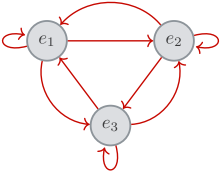
La représentation par graphe orienté de la relation binaire vide $\emptyset_{E,E}$ est

Représentations par graphe orienté des relations binaires remarquables

Soit $E := \{e_1, e_2, e_3\}$ un ensemble.

La représentation par graphe orienté de la relation binaire vide $\emptyset_{E,E}$ est

La représentation par graphe orienté de la relation binaire pleine $\Pi_{E,E}$ est

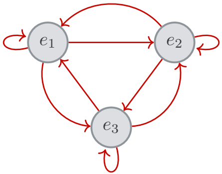


Représentations par graphe orienté des relations binaires remarquables

Soit $E := \{e_1, e_2, e_3\}$ un ensemble.

La représentation par graphe orienté de la relation binaire vide $\emptyset_{E,E}$ est

La représentation par graphe orienté de la relation binaire pleine $\Pi_{E,E}$ est



La représentation par graphe orienté de la relation binaire identité I_E est

Graphes orientés

Les graphes orientés sont des objets mathématiques à part entière.

Graphes orientés

Les graphes orientés sont des objets mathématiques à part entière.

Formellement, un graphe orienté est un couple $G := (S, A)$ où

1. S est un ensemble fini. Ses éléments sont appelés **sommets** du graphe ;

Graphes orientés

Les graphes orientés sont des objets mathématiques à part entière.

Formellement, un graphe orienté est un couple $G := (S, A)$ où

1. S est un ensemble fini. Ses éléments sont appelés **sommets** du graphe ;
2. A est une partie de $S \times S$. Ses éléments sont appelés **arcs** du graphe.

Graphes orientés

Les graphes orientés sont des objets mathématiques à part entière.

Formellement, un graphe orienté est un couple $G := (S, A)$ où

1. S est un ensemble fini. Ses éléments sont appelés **sommets** du graphe ;
2. A est une partie de $S \times S$. Ses éléments sont appelés **arcs** du graphe.

Remarque : étant donné que l'ensemble A des arêtes d'un graphe orienté est une partie de $S \times S$, A est une **relation binaire** sur S.

Graphes orientés

Les graphes orientés sont des objets mathématiques à part entière.

Formellement, un graphe orienté est un couple $G := (S, A)$ où

1. S est un ensemble fini. Ses éléments sont appelés **sommets** du graphe ;
2. A est une partie de $S \times S$. Ses éléments sont appelés **arcs** du graphe.

Remarque : étant donné que l'ensemble A des arêtes d'un graphe orienté est une partie de $S \times S$, A est une **relation binaire** sur S.

Il existe beaucoup de propriétés et de notions que l'on peut définir et étudier sur les graphes orientés : chemins, circuits, connexité, accessibilité, *etc.*

Plan

Relations binaires réflexives

Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E.

Relations binaires réflexives

Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E.

On dit que $\mathcal{R}$ est réflexive si pour tout $x \in E$, on a $x \,\mathcal{R}\, x$.

Relations binaires réflexives

Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E.

On dit que $\mathcal{R}$ est réflexive si pour tout $x \in E$, on a $x \mathcal{R} x$.

Exemple

Soient $E := \{e_1, e_2, e_3\}$ et $\mathcal{R}$ la relation binaire sur E vérifiant $e_1 \mathcal{R} e_1$, $e_2 \mathcal{R} e_3$ et $e_3 \mathcal{R} e_3$. Cette relation binaire n'est pas réflexive. En effet, on peut exhiber un **contre-exemple** qui met en défaut la propriété : $e_2 \not\mathcal{R} e_2$.

Relations binaires réflexives

Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E.

On dit que $\mathcal{R}$ est réflexive si pour tout $x \in E$, on a $x \mathrel{\mathcal{R}} x$.

Exemple

Soient $E := \{e_1, e_2, e_3\}$ et $\mathcal{R}$ la relation binaire sur E vérifiant $e_1 \mathrel{\mathcal{R}} e_1$, $e_2 \mathrel{\mathcal{R}} e_3$ et $e_3 \mathrel{\mathcal{R}} e_3$. Cette relation binaire n'est pas réflexive. En effet, on peut exhiber un **contre-exemple** qui met en défaut la propriété : $e_2 \not\mathrel{\mathcal{R}} e_2$.

Exemple

La relation binaire $\leqslant_{\mathbb{N}}$ est réflexive. En effet, pour tout nombre $x \in \mathbb{N}$, on a $x \leqslant_{\mathbb{N}} x$.

Relations binaires réflexives

Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E.

On dit que $\mathcal{R}$ est réflexive si pour tout $x \in E$, on a $x \mathrel{\mathcal{R}} x$.

Exemple

Soient $E := \{e_1, e_2, e_3\}$ et $\mathcal{R}$ la relation binaire sur E vérifiant $e_1 \mathrel{\mathcal{R}} e_1$, $e_2 \mathrel{\mathcal{R}} e_3$ et $e_3 \mathrel{\mathcal{R}} e_3$. Cette relation binaire n'est pas réflexive. En effet, on peut exhiber un **contre-exemple** qui met en défaut la propriété : $e_2 \not\mathrel{\mathcal{R}} e_2$.

Exemple

La relation binaire $\leqslant_{\mathbb{N}}$ est réflexive. En effet, pour tout nombre $x \in \mathbb{N}$, on a $x \leqslant_{\mathbb{N}} x$.

Exemple

La relation binaire $<_{\mathbb{N}}$ n'est pas réflexive. En effet, on peut exhiber un **contre-exemple** qui met en défaut la propriété : $0 \not<_{\mathbb{N}} 0$.

Relations binaires irréflexives

Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E.

Relations binaires irréflexives

Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E.

On dit que $\mathcal{R}$ est irréflexive si pour tout $x \in E$, on a $x \not\mathcal{R} x$.

Relations binaires irréflexives

Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E.

On dit que $\mathcal{R}$ est irréflexive si pour tout $x \in E$, on a $x \not\mathcal{R} x$.

Exemple

Soient $E := \{e_1, e_2, e_3\}$ et $\mathcal{R}$ la relation binaire sur E vérifiant $e_1 \mathcal{R} e_1$, $e_2 \mathcal{R} e_3$ et $e_3 \mathcal{R} e_1$. Cette relation binaire n'est pas irréflexive. En effet, on peut exhiber un **contre-exemple** qui met en défaut la propriété : $e_1 \mathcal{R} e_1$.

Relations binaires irréflexives

Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E.

On dit que $\mathcal{R}$ est irréflexive si pour tout $x \in E$, on a $x \not\mathcal{R}\, x$.

Exemple

Soient $E := \{e_1, e_2, e_3\}$ et $\mathcal{R}$ la relation binaire sur E vérifiant $e_1 \,\mathcal{R}\, e_1$, $e_2 \,\mathcal{R}\, e_3$ et $e_3 \,\mathcal{R}\, e_1$. Cette relation binaire n'est pas irréflexive. En effet, on peut exhiber un **contre-exemple** qui met en défaut la propriété : $e_1 \,\mathcal{R}\, e_1$.

Exemple

La relation binaire $<_{\mathbb{N}}$ est irréflexive. En effet, pour tout nombre $x \in \mathbb{N}$, on a $x \not<_{\mathbb{N}} x$.

Relations binaires irréflexives

Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E.

On dit que $\mathcal{R}$ est irréflexive si pour tout $x \in E$, on a $x \not\mathcal{R}\, x$.

Exemple

Soient $E := \{e_1, e_2, e_3\}$ et $\mathcal{R}$ la relation binaire sur E vérifiant $e_1 \,\mathcal{R}\, e_1$, $e_2 \,\mathcal{R}\, e_3$ et $e_3 \,\mathcal{R}\, e_1$. Cette relation binaire n'est pas irréflexive. En effet, on peut exhiber un **contre-exemple** qui met en défaut la propriété : $e_1 \,\mathcal{R}\, e_1$.

Exemple

La relation binaire $<_{\mathbb{N}}$ est irréflexive. En effet, pour tout nombre $x \in \mathbb{N}$, on a $x \not<_{\mathbb{N}} x$.

Exemple

La relation binaire $\neq_{\mathbb{N}}$ est irréflexive. En effet, pour tout nombre $x \in \mathbb{N}$, x n'est pas en relation par $\neq_{\mathbb{N}}$ avec x.

Relations binaires symétriques

Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E.

Relations binaires symétriques

Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E.

On dit que $\mathcal{R}$ est symétrique si pour tous $x, y \in E$, $x \,\mathcal{R}\, y$ implique $y \,\mathcal{R}\, x$.

Relations binaires symétriques

Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E.

On dit que $\mathcal{R}$ est symétrique si pour tous $x, y \in E$, $x \mathcal{R} y$ implique $y \mathcal{R} x$.

Exemple

Soient $E := \{e_1, e_2, e_3\}$ et $\mathcal{R}$ la relation binaire sur E vérifiant $e_1 \mathcal{R} e_1$, $e_2 \mathcal{R} e_3$ et $e_3 \mathcal{R} e_3$. Cette relation binaire n'est pas symétrique. En effet, on peut exhiber un **contre-exemple** qui met en défaut la propriété : on a $e_2 \mathcal{R} e_3$ et $e_3 \not\mathcal{R} e_2$.

Relations binaires symétriques

Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E.

On dit que $\mathcal{R}$ est symétrique si pour tous $x, y \in E$, $x \,\mathcal{R}\, y$ implique $y \,\mathcal{R}\, x$.

Exemple

Soient $E := \{e_1, e_2, e_3\}$ et $\mathcal{R}$ la relation binaire sur E vérifiant $e_1 \,\mathcal{R}\, e_1$, $e_2 \,\mathcal{R}\, e_3$ et $e_3 \,\mathcal{R}\, e_3$. Cette relation binaire n'est pas symétrique. En effet, on peut exhiber un **contre-exemple** qui met en défaut la propriété : on a $e_2 \,\mathcal{R}\, e_3$ et $e_3 \,\not\mathcal{R}\, e_2$.

Exemple

La relation binaire $\neq_{\mathbb{N}}$ est symétrique. En effet, pour tous nombres $x, y \in \mathbb{N}$, si $x \neq_{\mathbb{N}} y$, alors x est différent de y. Ainsi, y est différent de x et on a $y \neq_{\mathbb{N}} x$.

Relations binaires symétriques

Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E.

On dit que $\mathcal{R}$ est symétrique si pour tous $x, y \in E$, $x \mathrel{\mathcal{R}} y$ implique $y \mathrel{\mathcal{R}} x$.

Exemple

Soient $E := \{e_1, e_2, e_3\}$ et $\mathcal{R}$ la relation binaire sur E vérifiant $e_1 \mathrel{\mathcal{R}} e_1$, $e_2 \mathrel{\mathcal{R}} e_3$ et $e_3 \mathrel{\mathcal{R}} e_3$. Cette relation binaire n'est pas symétrique. En effet, on peut exhiber un **contre-exemple** qui met en défaut la propriété : on a $e_2 \mathrel{\mathcal{R}} e_3$ et $e_3 \not\mathrel{\mathcal{R}} e_2$.

Exemple

La relation binaire $\neq_{\mathbb{N}}$ est symétrique. En effet, pour tous nombres $x, y \in \mathbb{N}$, si $x \neq_{\mathbb{N}} y$, alors x est différent de y. Ainsi, y est différent de x et on a $y \neq_{\mathbb{N}} x$.

Exemple

La relation binaire $\leqslant_{\mathbb{N}}$ n'est pas symétrique. En effet, on peut exhiber un **contre-exemple** qui met en défaut la propriété : on a $0 \leqslant_{\mathbb{N}} 1$ et $1 \not\leqslant_{\mathbb{N}} 0$.

Relations binaires antisymétriques

Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E.

Relations binaires antisymétriques

Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E.

On dit que $\mathcal{R}$ est antisymétrique si pour tous $x, y \in E$, $x \,\mathcal{R}\, y$ et $y \,\mathcal{R}\, x$ impliquent $x = y$.