

# Mathématiques discrètes

DUT 1 Informatique 2019-2020

## Fiche de TD 5

*Fonctions et applications*

### Exercice 1. ■ Domaine et image

Pour chacune des définitions de **fonctions** suivantes,

- calculer son domaine de définition et son image :
- puis, en restreignant les ensembles de départ de ces fonctions à leur domaine de définition, déterminer si les applications obtenues sont injectives, surjectives et / ou bijectives.

1. la fonction  $f : \{0, 1, 2, 3\} \rightarrow \{0, 1, 2, 3, 4\}$  définie par  $f(x) := x + 1$  ;
2. la fonction  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  définie par  $f(x) := 2x$  ;
3. la fonction  $f$  de  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$  définie par  $f := \{(x, -x) : x \in \mathbb{N}\}$  ;
4. la fonction  $f$  de  $\mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}^2$  définie par  $f := \{((x, y), (y, x)) : (x, y) \in \mathbb{N}^2\}$  ;
5. la fonction  $f$  de  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  définie par

$$f(x) := \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x \text{ est pair,} \\ x + 1 & \text{sinon ;} \end{cases}$$

6. la fonction  $f$  de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x) := \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \geq 3, \\ x - 1 & \text{si } x \in ]0, 3[, \\ x & \text{si } x \in [-2, 0[ ; \end{cases}$$

7. la fonction  $f : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$  définie par  $f((x, y)) := (x + y, y)$  ;
8. la fonction  $f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$  définie par  $f((x, y)) := x + y + 1$  ;
9. la fonction  $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{N}$  définie par  $f(x) := \#x$  ;
10. la fonction  $f : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$  définie par  $f(x) := x \cup \{0\}$  où  $E$  est l'ensemble  $\{0, 1, 2\}$  ;
11. la fonction  $f : \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{Z})$  définie par  $f(x) := \mathcal{G}_{\mathbb{Z}}(x)$  ;
12. la fonction  $f : \mathcal{P}(\mathbb{N})^2 \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$  définie par  $f((x, y)) := x \cup y$ .

## Exercice 2. ■ Représentations matricielles

1. Les représentations matricielles suivantes sont celles de relations binaires entre  $\{e_0, e_1, e_2\}$  et  $\{f_0, f_1, f_2, f_3\}$ . Pour chacune d'elles, dire si une fonction ou une application est également représentée et dans ce cas, si elle est injective, surjective et / ou bijective.

$f_3$	×		
$f_2$			×
$f_1$			
$f_0$			
	$e_0$	$e_1$	$e_2$

$f_3$		×	
$f_2$	×		×
$f_1$			
$f_0$			
	$e_0$	$e_1$	$e_2$

$f_3$			×
$f_2$		×	
$f_1$			×
$f_0$	×		
	$e_0$	$e_1$	$e_2$

$f_3$	×		
$f_2$		×	
$f_1$			×
$f_0$			
	$e_0$	$e_1$	$e_2$

2. Construire un exemple d'application injective non surjective

(a) de  $\{1, 5, 6\}$  dans  $\{4, 10, 22, 31\}$ ;

(b) de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$ .

Dessiner les représentations matricielles des applications construites (avec éventuellement des points de suspension).

3. Construire un exemple d'application surjective et non injective

(a) de  $\mathbb{N}$  dans  $\{1, 2\}$ ;

(b) de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$ .

Dessiner les représentations matricielles des applications construites (avec éventuellement des points de suspension).

4. Décrire la représentation matricielle d'une application bijective.

## Exercice 3. ■ Injections et surjections

Parmi les **applications** suivantes, préciser, en justifiant, lesquelles sont injectives, surjectives et/ou bijectives :

1.  $f : \{1, \dots, 6\} \rightarrow \{3, \dots, 8\}$ , avec  $f(k) := 9 - k$ ;

2.  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  avec  $f(k) := k + 1$ ;

3.  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  avec  $f(k) := 2k + 1$ ;

4.  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  avec  $f(k) := k^2 + k + 1$ ;

5.  $f : \{0, \dots, 6\} \rightarrow \{0, \dots, 6\}$ , où  $f(k)$  est le reste de la division euclidienne de  $3k + 1$  par 7;

6.  $f : \{0, \dots, 6\} \rightarrow \{0, \dots, 5\}$ , où  $f(k)$  est le reste de la division euclidienne de  $3k + 1$  par 6;

7. la translation dans le plan, de vecteur  $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ;

8. la rotation de centre l'origine et d'angle  $\frac{\pi}{3}$  dans le plan cartésien ;

9.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  avec  $f(x) := x^2$ ;

10.  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  avec  $f(x) := x^2$ .

#### Exercice 4. ■ Croissance stricte

Une application  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  est *strictement croissante* quand pour tous  $n, m \in \mathbb{N}$  tels que  $n < m$ , on a  $f(n) < f(m)$ .

1. Donner un exemple d'application  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  strictement croissante.
2. Démontrer que toute application  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  strictement croissante est injective.
3. Infirmer le fait que toute application  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  strictement croissante est surjective.
4. Soient  $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  deux applications strictement croissantes. Démontrer que la composée  $f \circ g$  est strictement croissante.

#### Exercice 5. □ Images et opérations

Soient  $A$  et  $B$  deux ensembles,  $f : A \rightarrow B$  une fonction et  $X$  et  $Y$  deux sous-ensembles de  $A$ . Montrer les propriétés suivantes :

1.  $f(X) \subset f(Y)$  lorsque  $X \subset Y$ ;
2.  $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$ ;
3.  $f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y)$ ;
4.  $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$  lorsque  $f$  est injective ;
5.  $\mathcal{G}_B(f(A)) = \emptyset$  lorsque  $f$  est surjective.

#### Exercice 6. □ Compositions

Exprimer la composée  $f \circ g$  pour chacune des définitions de  $f$  et de  $g$  suivantes :

1.  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  définie par  $f(x) := 3x$  et  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  définie par  $g(x) := x + 1$  ;
2.  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}^3$  définie par  $f(x) := (-x, x, -x)$  et  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$  définie par  $g(x) := -x$  ;
3.  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}^2$  définie par  $f(x) := (x, -x)$  et  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$  définie par  $g(x) := x$  si  $x$  est pair et  $g(x) := -x$  si  $x$  est impair ;
4.  $f : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathbb{N}$  définie par  $f(x) := \#x$  et  $g : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$  définie par  $g(x) := x \cup \{0\}$  où  $E$  est l'ensemble  $\{0, 1, 2, 3\}$ .

#### Exercice 7. □ Composition et propriétés

Soient  $f : E \rightarrow F$  et  $g : F \rightarrow G$ .

1. On suppose  $g \circ f$  injective. Montrer que  $f$  est nécessairement injective. Montrer que  $g$  n'est pas nécessairement injective.
2. On suppose  $g \circ f$  surjective. Montrer que  $g$  est nécessairement surjective. Montrez que  $f$  n'est pas nécessairement surjective.