Mathématiques discrètes

DUT 1 Informatique 2019-2020

Fiche de TD 4

Relations binaires

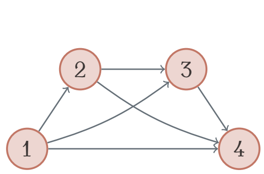
Exercice 1. ■ Représentations sagittales

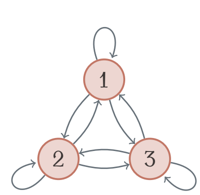
Dessiner les représentations sagittales des relations binaires suivantes :

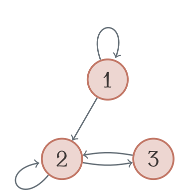
1. la relation binaire « x divise y », x étant un entier compris entre 2 et 5 et y un entier compris entre 10 et 20 ;
2. la relation binaire « x divise y », x et y étant tous deux des entiers compris entre 2 et 15 ;
3. la relation binaire $\mathscr{R}$ entre $[\![-2, 2]\!] \setminus \{0\}$ et $\{-1, 1\}$ définie par
$$\mathscr{R} := \{(-2, -1), (-1, -1), (1, 1), (2, 1)\} \ ;$$
4. la relation binaire $\mathscr{R}$ sur $[\![1, 6]\!]$ définie par
$$\mathscr{R} := \{(x, y) : x \in \{y, y-1\}\} \ ;$$
5. la relation binaire $\mathscr{R}$ sur $\mathscr{P}(\{0, 1, 2\})$ définie par
$$\mathscr{R} := \{(E, F) : \#E = \#F\}.$$

Exercice 2. ■ Généralités

1. Lister les propriétés principales que peuvent vérifier les relations binaires.
2. Indiquer les propriétés vérifiées par les relations binaires définies par les graphes orientés suivants :







3. Donner les représentations matricielles des relations binaires définies par les trois graphes orientés précédents.

4. Donner les représentations en graphes orientés des relations binaires définies par les quatre matrices suivantes :

3	×	×	
2	×	×	
1			
	1	2	3

4		×	×	
3			×	
2				
1	×	×	×	
	1	2	3	4

4	×		×	
3		×	×	×
2				×
1		×		×
	1	2	3	4

4		×		
3			×	
2		×		
1		×		
	1	2	3	4

5. Indiquer les propriétés vérifiées par les relations binaires définies par les représentations matricielles précédentes.

6. Expliquer comment lire, sur les représentations matricielles, les propriétés des relations binaires. Il s'agit de décrire des règles permettant de détecter le plus facilement possible leurs propriétés.

Exercice 3. ■ Arithmétique et géométrie

Déterminer les propriétés vérifiées par les relations binaires suivantes :

1. la relation d'orthogonalité sur l'ensemble des droites du plan cartésien :
2. la relation de parallélisme sur l'ensemble des droites du plan cartésien ;
3. la relation « a un côté de même longueur que » sur l'ensemble des triangles ;
4. la relation « est le carré de » sur les nombres entiers ;
5. la relation « est le double de » sur les nombres entiers positifs ;
6. la relation de colinéarité sur l'ensemble des vecteurs du plan cartésien.

Exercice 4. ⊡ Exemples

Construire (définir rigoureusement) une relation binaire qui soit :

1. réflexive mais pas symétrique ;
2. ni réflexive ni irréflexive ;
3. antisymétrique mais pas irréflexive ;
4. symétrique et transitive mais pas réflexive ;
5. symétrique et réflexive mais pas transitive ;
6. symétrique et antisymétrique.

Exercice 5. ⊡ Erreur de raisonnement

Expliquer ce qui est faux dans le raisonnement suivant.

> *« Montrons que toute relation binaire à la fois symétrique et transitive est réflexive. En effet, comme $a \mathcal{R} b$ entraîne $b \mathcal{R} a$ par symétrie, et comme la transitivité donne alors $a \mathcal{R} a$, la relation $\mathcal{R}$ est bien réflexive. »*

Exercice 6. ■ Encerclés

Soit $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^2$ définie par

$$(x, y)\,\mathcal{R}\,(z, t) \qquad \text{si} \qquad x^2 + y^2 = z^2 + t^2.$$

1. Donner des exemples d'éléments en relation par $\mathcal{R}$.
2. Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
3. Donner une interprétation géométrique de $\mathcal{R}$.
4. Exprimer la classe d'équivalence de $(1, 1)$.
5. Expliquer comment représenter les classes d'équivalences de $\mathcal{R}$.
6. Exprimer l'inverse de $\mathcal{R}$.
7. Exprimer le complémentaire de $\mathcal{R}$.

Exercice 7. □ De quatre en quatre

Soit $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence sur $\mathbb{N}$ définie par

$$x\,\mathcal{R}\,y \qquad \text{si} \qquad x \mod 4 = y \mod 4,$$

où $a \mod b$ désigne le reste de la division euclidienne de a par b.

1. Donner des exemples d'éléments en relation par $\mathcal{R}$.
2. Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
3. Exprimer les classes d'équivalence de 0, de 2 et de 4.
4. Expliquer comment représenter les classes d'équivalences de $\mathcal{R}$.
5. Exprimer l'inverse de $\mathcal{R}$.
6. Exprimer le complémentaire de $\mathcal{R}$.

Exercice 8. ■ Damier

On dispose d'un damier qui contient n rangées et m colonnes. On appelle $E_{n,m}$ l'ensemble des cases de ce damier. Soit la relation $\mathcal{R}$ sur $E_{n,m}$ où $c\,\mathcal{R}\,c'$ si l'on peut aller de la case c à la case c' en se déplaçant de gauche à droite, puis de bas en haut (les déplacements peuvent être nuls).

1. Donner un codage de $E_{n,m}$.
2. Démontrer ou infirmer le fait que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre.
3. Si $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre, démontrer ou infirmer le fait qu'elle est totale.
4. Exprimer l'inverse de $\mathcal{R}$.
5. Exprimer le complémentaire de $\mathcal{R}$.

Exercice 9. □ Un nouvel ordre

Soit E un ensemble sur lequel est définie une relation d'ordre $\mathcal{Q}$. On définit sur E^2 la relation binaire $\mathcal{R}$ par

$$(x,y)\,\mathcal{R}\,(x',y') \qquad \text{si} \qquad \begin{cases} x = x' \text{ et } y\,\mathcal{Q}\,y' \\ \text{ou} \\ x \neq x' \text{ et } x\,\mathcal{Q}\,x'. \end{cases}$$

1. Montrez que $\mathcal{R}$ est une relation ordre.
2. Sous l'hypothèse que $\mathcal{Q}$ est une relation d'ordre totale, déterminer si $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre totale.
3. Exprimer l'inverse de $\mathcal{R}$.
4. Exprimer le complémentaire de $\mathcal{R}$.

Exercice 10. ■ Différence symétrique

Soit E un ensemble fini et $\mathcal{R}$ la relation binaire sur $\mathcal{P}(E)$ définie par

$$A\,\mathcal{R}\,B \qquad \text{si} \qquad \#A\Delta B \text{ est pair.}$$

1. Construire des exemples d'éléments en relation par $\mathcal{R}$.
2. Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
3. En posant $E := [\![1,5]\!]$, exprimer la classe d'équivalence de $\{2,3\}$.
4. Si on change la définition de $\mathcal{R}$ en remplaçant le mot « pair » par « impair », déterminer si l'on obtient une relation d'équivalence.
5. Exprimer l'inverse de $\mathcal{R}$.
6. Exprimer le complémentaire de $\mathcal{R}$.

Exercice 11. ⊡ Stabilité

Déterminer et justifier si

1. l'inverse d'une relation d'ordre reste une relation d'ordre ;
2. l'inverse d'une relation d'équivalence reste une relation d'équivalence ;
3. le complémentaire d'une relation d'ordre reste une relation d'ordre ;
4. le complémentaire d'une relation d'équivalence reste une relation d'équivalence ;
5. la composée de deux relations d'ordre produit une relation d'ordre ;
6. la composée de deux relations d'équivalence produit une relation d'équivalence.

Exercice 12. ⊡ Compositions

1. Exprimer la composée de $\leq_{\mathbb{N}}$ avec $\geq_{\mathbb{N}}$.
2. Soit E un ensemble fini. Exprimer la composée de $\subseteq$ sur $\mathcal{P}(E)$ avec $\mathcal{R}$ où $\mathcal{R}$ est la relation binaire définie dans l'exercice 10.