Mathématiques discrètes

DUT 1 Informatique 2018-2019

Fiche de TD 3

Ensembles — 2ᵉ approche

Exercice 1. ■ Diagrammes de Venn

Dessiner les diagrammes de Venn pour chacune des définitions des ensembles A, B et C suivantes :

1. $A := \{1,2\}$, $B := \{2,3\}$, $C := \{4\}$;
2. $A := \{1,2\}$, $B := \{2,3\}$, $C := \{2,4\}$;
3. $A := \{1,2\}$, $B := \{2,3\}$, $C := \{3,4\}$;
4. $A := \{1,2\}$, $B := \{1,2,3,4\}$, $C := \{3,4\}$;
5. $A := \{1,2,3\}$, $B := \{4\}$, $C := \{1,2,4\}$;
6. $A := \mathbb{N}$, $B := \mathbb{Z}$, $C := \mathbb{Q}$;
7. $A := \emptyset$, $B := \{\emptyset\}$, $C := \{\{\emptyset\}\}$;
8. $A := \{\emptyset\}$, $B := \{A\}$, $C := \{B,7\}$.

Exercice 2. ■ Calcul ensembliste

On considère les sous-ensembles de $\mathbb{N}$ suivants :

$$A := \{1,3,7,9,12\}, \qquad B := \{2,4,7,8,12\}, \qquad C := \{3,4,7,9\}, \qquad D := \{3,5\}.$$

Calculer les résultats des expressions suivantes et donner les cardinaux des ensembles obtenus.

1. $A \cap B$;
2. $D \times C$;
3. $C \times D$;
4. $D \times D$;
5. $C \setminus A$;
6. $A \setminus B$;
7. $B \setminus A$;
8. $A \cap (B \cup C)$;
9. $(A \cap B) \cup C$;
10. $(A \cap B) \cup (A \cap C)$;
11. $(A \cup C) \cap (B \cup C)$;
12. $A \cap \mathcal{C}_{\mathbb{N}}(B)$;
13. $(A \cap B) \cup (A \cap \mathcal{C}_{\mathbb{N}}(B))$;
14. $A \,\Delta\, B$;
15. $\mathcal{P}(D)$.

Exercice 3. ■ Double inclusion

Soit A, B et C trois ensembles. Démontrer, par le théorème de la double inclusion, les égalités

1. $A \setminus B = (A \cup B) \setminus B$;
2. $A \cup B = ((A \cup B) \cap A) \cup ((A \cup B) \cap B)$;
3. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
4. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Exercice 4. ■ Cardinaux

En supposant que A, B, C et D sont des ensembles tels que $\#A = 3$, $\#B = 2$, $\#C = 1$ et $\#D = 0$, déterminer les cardinaux des ensembles suivants :

1. A^4 ;
2. $A \times B \times C \times B$;
3. $A^3 \times B^4$;
4. $\mathscr{P}(A)$;
5. $\mathscr{P}(C)$;
6. $\mathscr{P}(A \times B)$
7. $A^{1024} \times D \times B^{65536}$;
8. $\mathscr{P}(D)$.

Exercice 5. ■ Mises en relation

Dans cet exercice, A, B et C désignent des sous-ensembles d'un ensemble E. Mettre en relation, avec $\subset$, $\supset$ ou $=$ et lorsque cela est possible, les paires d'ensembles suivantes et justifier :

1. $\{1, 2, 3\}$ et $\{3, 2, 1\}$;
2. $\{1, 3, 1\}$ et $\{1, 2\}$;
3. $\{1, 2, 3\}$ et $\{1, 2, 4\}$;
4. $\{1\} \times \{2\}$ et $\{1, 2\} \times \{1, 2\}$;
5. $\{1, 2\}^2$ et $\{1, 2\}^3$;
6. $\{\emptyset\}$ et $\emptyset$;
7. $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$;
8. $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}^+$;
9. $(A \times B) \cup (A \times C)$ et $A \times (B \cup C)$;
10. $A \setminus (B \cup C)$ et $(A \setminus B) \setminus C$;
11. $A \cup (B \setminus C)$ et $(A \cup B) \setminus C$;
12. $\complement_{E \times E}(A \times B)$ et $\complement_E(A) \times \complement_E(B)$.

Exercice 6. ⊡ Parties d'ensembles

1. Donner quatre exemples d'éléments de $\mathscr{P}(\mathbb{N})$.
2. Calculer $\mathscr{P}(\{1, 2\})$.
3. Calculer $\mathscr{P}(\{\mathbb{N}\})$.
4. Calculer $\mathscr{P}(\emptyset)$.
5. Calculer $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\emptyset))$.
6. Calculer $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathscr{P}(\emptyset)))$.

Exercice 7. ⊡ Ensembles cofinis

Soit E un ensemble infini. Un sous-ensemble A de E est dit *cofini* si le complémentaire $\complement_E(A)$ est un ensemble fini.

1. Si $E = \mathbb{N}$, déterminer si le sous-ensemble $A := \{x \in E : 3x - 25 \geq 0\}$ est cofini.
2. Si $E = \mathbb{Z}$, déterminer si le sous-ensemble $A := \{x \in E : 3x - 25 \geq 0\}$ est cofini.
3. Lorsque $E = \mathbb{N}$, construire un exemple d'un sous-ensemble qui ne soit ni fini, ni cofini.
4. Montrez que si A et B sont deux sous-ensembles de E et que $A \subset B$, alors $\complement_E(B) \subset \complement_E(A)$.
5. Démontrer ou bien infirmer la phrase suivante :

   « L'union de deux ensembles cofinis est un ensemble cofini. ».
6. Démontrer ou bien infirmer la phrase suivante :

   « L'intersection de deux ensembles cofinis est un ensemble cofini. ».