Mathématiques discrètes

DUT 1 Informatique 2017-2018

Fiche de TD 5

Fonctions et applications

* Exercice 1 — Domaine et image

Pour chacune des définitions de **fonctions** suivantes,

- calculer son domaine de définition et son image :
- puis, en restreignant les ensembles de départ de ces fonctions à leur domaine de définition, déterminer si les applications obtenues sont injectives, surjectives et / ou bijectives.

1. la fonction $f : \{0, 1, 2, 3\} \to \{0, 1, 2, 3, 4\}$ définie par $f(x) := x + 1$;
2. la fonction $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ définie par $f(x) := 2x$;
3. la fonction f de $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ définie par $f := \{(x, -x) : x \in \mathbb{N}\}$;
4. la fonction f de $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^2$ définie par $f := \{((x, y), (y, x)) : (x, y) \in \mathbb{N}^2\}$;
5. la fonction f de $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par
$$f(x) := \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x \text{ est pair,} \\ x + 1 & \text{sinon ;} \end{cases}$$
6. la fonction f de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x) := \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \geq 3, \\ x - 1 & \text{si } x \in]0, 3[, \\ x & \text{si } x \in [-2, 0[\text{ ;} \end{cases}$$
7. la fonction $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$ définie par $f((x, y)) := (x + y, y)$;
8. la fonction $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ définie par $f((x, y)) := x + y + 1$;
9. la fonction $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$ définie par $f(x) := \#x$;
10. la fonction $f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ définie par $f(x) := x \cup \{0\}$ où E est l'ensemble $\{0, 1, 2\}$;

11. la fonction $f : \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \to \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ définie par $f(x) := \mathcal{C}_{\mathbb{Z}}(x)$;
12. la fonction $f : \mathcal{P}(\mathbb{N})^2 \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ définie par $f((x, y)) := x \cup y$.

* Exercice 2 — Représentations matricielles

1. Les représentations matricielles suivantes sont celles de relations binaires entre $\{e_0, e_1, e_2\}$ et $\{f_0, f_1, f_2, f_3\}$. Pour chacune d'elles, dire si une fonction ou une application est également représentée et dans ce cas, si elle est injective, surjective et / ou bijective.

f_3	$\times$		
f_2			$\times$
f_1			
f_0			
	e_0	e_1	e_2

f_3		$\times$	
f_2	$\times$		$\times$
f_1			
f_0			
	e_0	e_1	e_2

f_3			$\times$
f_2		$\times$	
f_1			$\times$
f_0	$\times$		
	e_0	e_1	e_2

f_3	$\times$		
f_2		$\times$	
f_1			$\times$
f_0			
	e_0	e_1	e_2

2. Construire un exemple d'application injective non surjective
   (a) de $\{1, 5, 6\}$ dans $\{4, 10, 22, 31\}$;
   (b) de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

   Dessiner les représentations matricielles des applications construites (avec éventuellement des points de suspension).
3. Construire un exemple d'application surjective et non injective
   (a) de $\mathbb{N}$ dans $\{1, 2\}$;
   (b) de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

   Dessiner les représentations matricielles des applications construites (avec éventuellement des points de suspension).
4. Décrire la représentation matricielle d'une application bijective.

* Exercice 3 — Injections et surjections

Parmi les **applications** suivantes, préciser, en justifiant, lesquelles sont injectives, surjectives et/ou bijectives :

1. $f : \{1, \dots, 6\} \to \{3, \dots, 8\}$, avec $f(k) := 9 - k$;
2. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ avec $f(k) := k + 1$;
3. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ avec $f(k) := 2k + 1$;
4. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ avec $f(k) := k^2 + k + 1$;
5. $f : \{0, \dots, 6\} \to \{0, \dots, 6\}$, où $f(k)$ est le reste de la division euclidienne de $3k + 1$ par 7 ;
6. $f : \{0, \dots, 6\} \to \{0, \dots, 5\}$, où $f(k)$ est le reste de la division euclidienne de $3k + 1$ par 6 ;

7. la translation dans le plan, de vecteur $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$;
8. la rotation de centre l'origine et d'angle $\frac{\pi}{3}$ dans le plan cartésien ;
9. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec $f(x) := x^2$;
10. $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ avec $f(x) := x^2$.

* Exercice 4 — Croissance stricte

Une application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est *strictement croissante* quand pour tous $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $n < m$, on a $f(n) < f(m)$.

1. Donner un exemple d'application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante.
2. Démontrer que toute application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante est injective.
3. Infirmer le fait que toute application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante est surjective.
4. Soient $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ deux applications strictement croissantes. Démontrer que la composée $f \circ g$ est strictement croissante.

** Exercice 5 — Images et opérations

Soient A et B deux ensembles, $f : A \to B$ une fonction et X et Y deux sous-ensembles de A. Montrer les propriétés suivantes :

1. $f(X) \subset f(Y)$ lorsque $X \subset Y$;
2. $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$;
3. $f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y)$;
4. $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$ lorsque f est injective ;
5. $\mathcal{C}_B(f(A)) = \emptyset$ lorsque f est surjective.

** Exercice 6 — Compositions

Exprimer la composée $f \circ g$ pour chacune des définitions de f et de g suivantes :

1. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $f(x) := 3x$ et $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $g(x) := x + 1$;
2. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^3$ définie par $f(x) := (-x, x, -x)$ et $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ définie par $g(x) := -x$;
3. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^2$ définie par $f(x) := (x, -x)$ et $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ définie par $g(x) := x$ si x et pair et $g(x) := -x$ si x est impair ;
4. $f : \mathcal{P}(E) \to \mathbb{N}$ définie par $f(x) := \#x$ et $g : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ définie par $g(x) := x \cup \{0\}$ où E est l'ensemble $\{0, 1, 2, 3\}$.

*** Exercice 7 — Composition et propriétés

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$.

1. On suppose $g \circ f$ injective. Montrer que f est nécessairement injective. Montrer que g n'est pas nécessairement injective.
2. On suppose $g \circ f$ surjective. Montrer que g est nécessairement surjective. Montrez que f n'est pas nécessairement surjective.