

Mathématiques discrètes

DUT 1 Informatique 2017-2018

Fiche de TD 4

Relations binaires

* Exercice 1 — Représentations sagittales

Dessiner les représentations sagittales des relations binaires suivantes :

1. la relation binaire « x divise y », x étant un entier compris entre 2 et 5 et y un entier compris entre 10 et 20 ;
2. la relation binaire « x divise y », x et y étant tous deux des entiers compris entre 2 et 15 ;
3. la relation binaire $\mathcal{R}$ entre $\llbracket -2, 2 \rrbracket \setminus \{0\}$ et $\{-1, 1\}$ définie par

$$\mathcal{R} := \{(-2, -1), (-1, -1), (1, 1), (2, 1)\} ;$$

4. la relation binaire $\mathcal{R}$ sur $\llbracket 1, 6 \rrbracket$ définie par

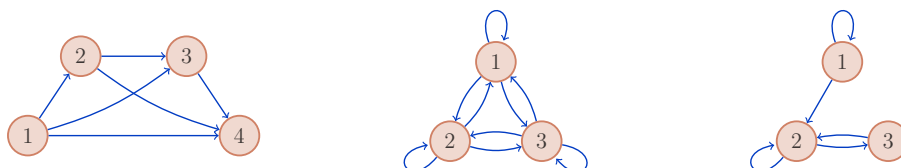
$$\mathcal{R} := \{(x, y) : x \in \{y, y - 1\}\} ;$$

5. la relation binaire $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{P}(\{0, 1, 2\})$ définie par

$$\mathcal{R} := \{(E, F) : \#E = \#F\}.$$

* Exercice 2 — Généralités

1. Lister les propriétés principales que peuvent vérifier les relations binaires.
2. Indiquer les propriétés vérifiées par les relations binaires définies par les graphes orientés suivants :



- Donner les représentations matricielles des relations binaires définies par les trois graphes orientés précédents.
- Donner les représentations en graphes orientés des relations binaires définies par les quatre matrices suivantes :

3	×	×	
2	×	×	
1			
	1	2	3

4		×	×	
3			×	
2				
1	×	×	×	
	1	2	3	4

4	×		×	
3		×	×	×
2				×
1		×		×
	1	2	3	4

4		×		
3			×	
2		×		
1		×		
	1	2	3	4

- Indiquer les propriétés vérifiées par les relations binaires définies par les représentations matricielles précédentes.
- Expliquer comment lire, sur les représentations matricielles, les propriétés des relations binaires. Il s'agit de décrire des règles permettant de détecter le plus facilement possible leurs propriétés.

* Exercice 3 — Arithmétique et géométrie

Déterminer les propriétés vérifiées par les relations binaires suivantes :

- la relation d'orthogonalité sur l'ensemble des droites du plan cartésien ;
- la relation de parallélisme sur l'ensemble des droites du plan cartésien ;
- la relation « a un côté de même longueur que » sur l'ensemble des triangles ;
- la relation « est le carré de » sur les nombres entiers ;
- la relation « est le double de » sur les nombres entiers positifs ;
- la relation de colinéarité sur l'ensemble des vecteurs du plan cartésien.

** Exercice 4 — Exemples

Construire (définir rigoureusement) une relation binaire qui soit :

- réflexive mais pas symétrique ;
- ni réflexive ni irréflexive ;
- antisymétrique mais pas irréflexive ;
- symétrique et transitive mais pas réflexive ;
- symétrique et réflexive mais pas transitive ;
- symétrique et antisymétrique.

** Exercice 5 — Erreur de raisonnement

Expliquer ce qui est faux dans le raisonnement suivant.

« Montrons que toute relation binaire à la fois symétrique et transitive est réflexive. En effet, comme $a \mathcal{R} b$ entraîne $b \mathcal{R} a$ par symétrie, et comme la transitivité donne alors $a \mathcal{R} a$, la relation $\mathcal{R}$ est bien réflexive. »

* Exercice 6 — Encerclés

Soit $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^2$ définie par

$$(x, y) \mathcal{R} (z, t) \quad \text{si} \quad x^2 + y^2 = z^2 + t^2.$$

1. Donner des exemples d'éléments en relation par $\mathcal{R}$.
2. Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
3. Donner une interprétation géométrique de $\mathcal{R}$.
4. Exprimer la classe d'équivalence de $(1, 1)$.
5. Expliquer comment représenter les classes d'équivalences de $\mathcal{R}$.
6. Exprimer l'inverse de $\mathcal{R}$.
7. Exprimer le complémentaire de $\mathcal{R}$.

*** Exercice 7 — De quatre en quatre

Soit $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence sur $\mathbb{N}$ définie par

$$x \mathcal{R} y \quad \text{si} \quad x \bmod 4 = y \bmod 4,$$

où $a \bmod b$ désigne le reste de la division euclidienne de a par b .

1. Donner des exemples d'éléments en relation par $\mathcal{R}$.
2. Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
3. Exprimer les classes d'équivalence de 0, de 2 et de 4.
4. Expliquer comment représenter les classes d'équivalences de $\mathcal{R}$.
5. Exprimer l'inverse de $\mathcal{R}$.
6. Exprimer le complémentaire de $\mathcal{R}$.

* Exercice 8 — Damier

On dispose d'un damier qui contient n rangées et m colonnes. On appelle $E_{n,m}$ l'ensemble des cases de ce damier. Soit la relation $\mathcal{R}$ sur $E_{n,m}$ où $c \mathcal{R} c'$ si l'on peut aller de la case c à la case c' en se déplaçant de gauche à droite, puis de bas en haut (les déplacements peuvent être nuls).

1. Donner un codage de $E_{n,m}$.
2. Démontrer ou infirmer le fait que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre.
3. Si $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre, démontrer ou infirmer le fait qu'elle est totale.
4. Exprimer l'inverse de $\mathcal{R}$.
5. Exprimer le complémentaire de $\mathcal{R}$.

*** Exercice 9 — Un nouvel ordre

Soit E un ensemble sur lequel est définie une relation d'ordre $\mathcal{Q}$. On définit sur E^2 la relation binaire $\mathcal{R}$ par

$$(x, y) \mathcal{R} (x', y') \quad \text{si} \quad \begin{cases} x = x' \text{ et } y \mathcal{Q} y' \\ \text{ou} \\ x \neq x' \text{ et } x \mathcal{Q} x'. \end{cases}$$

1. Montrez que $\mathcal{R}$ est une relation ordre.
2. Sous l'hypothèse que $\mathcal{Q}$ est une relation d'ordre totale, déterminer si $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre totale.
3. Exprimer l'inverse de $\mathcal{R}$.
4. Exprimer le complémentaire de $\mathcal{R}$.

* Exercice 10 — Différence symétrique

Soit E un ensemble fini et $\mathcal{R}$ la relation binaire sur $\mathcal{P}(E)$ définie par

$$A \mathcal{R} B \quad \text{si} \quad \#A \Delta B \text{ est pair.}$$

1. Construire des exemples d'éléments en relation par $\mathcal{R}$.
2. Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
3. En posant $E := \llbracket 1, 5 \rrbracket$, exprimer la classe d'équivalence de $\{2, 3\}$.
4. Si on change la définition de $\mathcal{R}$ en remplaçant le mot « pair » par « impair », déterminer si l'on obtient une relation d'équivalence.
5. Exprimer l'inverse de $\mathcal{R}$.
6. Exprimer le complémentaire de $\mathcal{R}$.

** Exercice 11 — Stabilité

Déterminer et justifier si

1. l'inverse d'une relation d'ordre reste une relation d'ordre ;
2. l'inverse d'une relation d'équivalence reste une relation d'équivalence ;
3. le complémentaire d'une relation d'ordre reste une relation d'ordre ;
4. le complémentaire d'une relation d'équivalence reste une relation d'équivalence ;
5. la composée de deux relations d'ordre produit une relation d'ordre ;
6. la composée de deux relations d'équivalence produit une relation d'équivalence.

** Exercice 12 — Compositions

1. Exprimer la composée de $\leq_{\mathbb{N}}$ avec $\geq_{\mathbb{N}}$.
2. Soit E un ensemble fini. Exprimer la composée de $\subseteq$ sur $\mathcal{P}(E)$ avec $\mathcal{R}$ où $\mathcal{R}$ est la relation binaire définie dans l'exercice 10.