Relations d'ordre — démonstration 2

Soit l'énoncé

« Pour tout ensemble E, la relation binaire $\subset$ sur $\mathcal{P}(E)$ est une relation d'ordre. ».

Démonstration : montrons que $\subset$ est réflexive. Soit $F \in \mathcal{P}(E)$. Comme tout ensemble est inclus dans lui-même, on a bien $F \subset F$. Ainsi, $\subset$ est réflexive.

Montrons maintenant que $\subset$ est antisymétrique. Soient $F, G \in \mathcal{P}(E)$ tels que $F \subset G$ et $G \subset F$. Alors, par le **théorème de la double inclusion**, on a $F = G$. Ceci entraîne que $\subset$ est antisymétrique.

Montrons finalement que $\subset$ est transitive. Soient $F, G, H \in \mathcal{P}(E)$ tels que $F \subset G$ et $G \subset H$. Ainsi, pour tout $x \in F$, on a $x \in G$ et pour tout $x \in G$, on a $x \in H$. Ceci montre que pour tout $x \in F$, on a aussi $x \in H$. Ceci entraîne que $F \subset H$. La relation binaire $\subset$ est donc transitive.

En conclusion, $\subset$ est réflexive, antisymétrique et transitive. C'est donc une relation d'ordre.