Relations d'ordre — démonstration 1

Soit l'énoncé

« La relation binaire $|_M$ est une relation d'ordre. », où $M := \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Rappel : on a $x \,|_M\, y$ s'il existe $z \in \mathbb{N}$ tel que $xz = y$.

Démonstration : on commence par démontrer le fait que $|_M$ est réflexive. Soit $x \in M$. Comme $x1 = x$, on a $x \,|_M\, x$. Ainsi, $|_M$ est réflexive.

Montrons maintenant que $|_M$ est antisymétrique. Soient $x, y \in M$ tels que $x \,|_M\, y$ et $y \,|_M\, x$. Alors, il existe $z_1, z_2 \in \mathbb{N}$ tels que $xz_1 = y$ et $yz_2 = x$. On a ainsi $(xz_1)z_2 = x$, ce qui entraîne successivement que $x(z_1 z_2) = x$, que $z_1 = z_2 = 1$ et que $x = y$. La relation binaire $|_M$ est donc antisymétrique.

Finalement, montrons que $|_M$ est transitive. Soient $x, y, z \in M$ tels que $x \,|_M\, y$ et $y \,|_M\, z$. Alors, il existe $t_1, t_2 \in \mathbb{N}$ tels que $xt_1 = y$ et $yt_2 = z$. On a ainsi $(xt_1)t_2 = z$, ce qui entraîne $x(t_1 t_2) = z$ et ainsi $x \,|_M\, z$. La relation binaire $|_M$ est donc transitive.

En conclusion, $|_M$ est réflexive, antisymétrique et transitive. C'est donc une relation d'ordre.