Relations d'équivalence — démonstration

Soit l'énoncé

« Soit $\mathcal{R}$ la relation sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ telle que l'on a $(x, y)\,\mathcal{R}\,(x', y')$ si $x + y = x' + y'$. Alors, $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. ».

Démonstration : on commence par démontrer le fait que $\mathcal{R}$ est réflexive. Soit $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Comme $x + y = x + y$, on a $(x, y)\,\mathcal{R}\,(x, y)$. Ainsi, $\mathcal{R}$ est réflexive.

Montrons maintenant que $\mathcal{R}$ est symétrique. Soient $(x, y), (x', y') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tels que $(x, y)\,\mathcal{R}\,(x', y')$. On a alors $x + y = x' + y'$. Ainsi, on a $x' + y' = x + y$, ce qui entraîne $(x', y')\,\mathcal{R}\,(x, y)$. La relation binaire $\mathcal{R}$ est donc symétrique.

Finalement, montrons que $\mathcal{R}$ est transitive. Soient $(x, y), (x', y'), (x'', y'') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tels que $(x, y)\,\mathcal{R}\,(x', y')$ et $(x', y')\,\mathcal{R}\,(x'', y'')$. On a alors $x + y = x' + y'$ et $x' + y' = x'' + y''$. Ainsi, on a $x + y = x'' + y''$, ce qui entraîne $(x, y)\,\mathcal{R}\,(x'', y'')$. La relation binaire $\mathcal{R}$ est donc transitive.

En conclusion, $\mathcal{R}$ est réflexive, symétrique et transitive. C'est donc une relation d'équivalence.