# Bijectivité — démonstration 2

**Démonstration** : on commence par démontrer l'injectivité de $f$. Soient $n$ et $n'$ deux éléments de $\mathbb{N}$ tels que $f(n) = f(n')$. Alors, par définition de $f$, on a nécessairement que $n$ et $n'$ sont soit tous les deux pairs, soit tous les deux impairs. Ainsi, lorsque $n$ et $n'$ sont pairs, on a $\frac{n}{2} = \frac{n'}{2}$, impliquant $n = n'$. Lorsque $n$ et $n'$ sont impairs, on a $-\frac{n+1}{2} = -\frac{n'+1}{2}$, impliquant $n = n'$. Ainsi, nous avons montré que l'égalité $f(n) = f(n')$ implique $n = n'$. Par conséquent, $f$ est injective.

Soit $x$ un élément de $\mathbb{Z}$. Si $x$ est positif, par définition de $f$, on a $f(2x) = \frac{2x}{2} = x$. Si $x$ est strictement négatif, par définition de $f$, on a $f(-2x-1) = -\frac{(-2x-1)+1}{2} = x$. De plus, on a que $-2x-1$ est bien un élément de $\mathbb{N}$. Ainsi, $x$ admet au moins un antécédent. L'application $f$ est donc surjective.

Nous avons montré que $f$ est la fois et injective et surjective. Elle est donc bijective.