Bijectivité — démonstration 1

Soit l'énoncé

« Soit $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'application définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ par $f((x, y)) := (-y, x)$. Alors, f est bijective. ».

Démonstration : commençons par montrer que f est injective. Soient $(x, y), (x', y') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tels que $f((x, y)) = f((x', y'))$. Alors, par définition de f, on a que $(-y, x) = (-y', x')$. Ceci implique que $-y = -y'$ et $x = x'$. On a ainsi $(x, y) = (x', y')$, ce qui montre que f est injective.

Montrons maintenant que f est surjective. Soit $(z, t) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Par définition de f, on a $f((t, -z)) = (-(-z), t) = (z, t)$. Ainsi, (z, t) admet au moins un antécédent. Par conséquent, f est surjective.

Nous avons montré que f est la fois et injective et surjective. Elle est donc bijective.