Programmation fonctionnelle

Samuele Giraudo

Université Paris-Est Marne-la-Vallée
LIGM, bureau 4B055
samuele.giraudo@univ-mlv.fr
http://igm.univ-mlv.fr/~giraudo/

Contenu du cours

Objectifs et bibliographie

Ce module de programmation fonctionnelle a pour buts

1. d'avoir une 1re approche du paradigme de programmation fonctionnelle ;
2. d'apprendre les bases de programmation en Caml en mode fonctionnel.

Quelques éléments bibliographiques :

- X. Leroy, P. Weis, *Le langage Caml*, Dunod, 2e édition, 1999.
  Lien : `http://caml.inria.fr/distrib/books/llc.pdf`
- E. Chailloux, P. Manoury, B. Pagano, *Développement d'applications avec Objective Caml*, O'Reilly, 2000.
  Lien : `http://www.pps.univ-paris-diderot.fr/Livres/ora/DA-OCAML/`
- G. Dowek, J.-J. Lévy, *Introduction à la théorie des langages de programmation*, École Polytechnique, 2006.
- C. Okasaki, *Purely Functional Data Structures*, Cambridge University Press, 1999.

Brève chronologie de la programmation

- 1801 : 1re machine programmable : le métier à tisser de Jackard.
- 1936 : Church introduit le λ-calcul.
- 1936 : Turing invente la machine de Turing.
- Années 1940 : programmation en assembleur et en langage machine.
- Années 1950-1960 : 1ers vrais langages de programmation : FORTRAN, COBOL et LISP.
- Années 1960-1970 : paradigmes de programmation : impératif, fonctionnel, orienté objet, logique.

Machines de Turing

Machine de Turing : machine théorique qui fournit une abstraction des appareils de calcul.

Thèse de Church-Turing :

« tout ce qui est effectivement *calculable*
est calculable par une machine de Turing ».

Une machine de Turing est un quadruplet (E, i, t, Δ) où

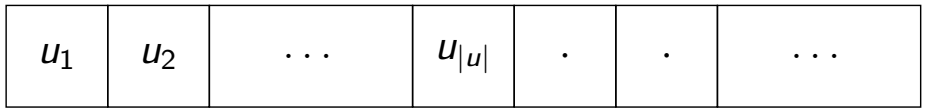
1. E est un ensemble fini d'états ;
2. $i \in E$ est l'état initial ;
3. $t \in E$ est l'état terminal ;
4. $\Delta : E \times \{\cdot, 0, 1\} \to E \times \{\cdot, 0, 1\} \times \{\mathrm{G}, \mathrm{D}\}$ est une fonction de transition.

Fonctionnement des machines de Turing

Soit $M := (E, i, t, \Delta)$ une machine de Turing et $u \in \{0,1\}^*$ un mot.

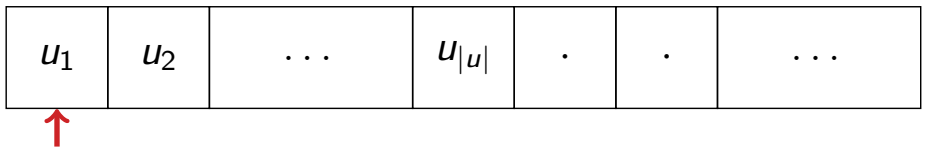
L'exécution de M sur u consiste à :

1. placer u le plus à gauche dans un tableau infini à droite, le **ruban** :



   Les cases à droite de u sont remplies jusqu'à l'infini de $\cdot$.

2. Placer la **tête de lecture/écriture** sur la 1^{re} case du ruban :



   On appelle a la lettre dans $\{\cdot, 0, 1\}$ indiquée par la tête de lecture/écriture à un instant donné.

3. Affecter au **registre d'état** e la valeur i (état initial).

4. Réaliser les actions dictées par Δ, le **programme**.

Fonctionnement des machines de Turing

Pour réaliser les action dictées par le programme de M, on procède séquentiellement comme suit :

(1) calculer $(e', a', s') := \Delta(e, a)$.

(2) Écrire a' dans la case du ruban indiquée par la tête de lecture/écriture.

(3) Affecter au registre d'état e l'état e'.

(4) Si $s' = \mathrm{D}$, déplacer la tête de lecture/écriture d'un pas vers la droite ; sinon, la déplacer si possible d'un pas vers la gauche.

(5) Si $e = t$, alors l'exécution est terminée ; sinon, revenir en (1).

Résultat $M(u)$ de l'exécution de M sur u : plus court préfixe du ruban qui contient tous ses 0 et ses 1.

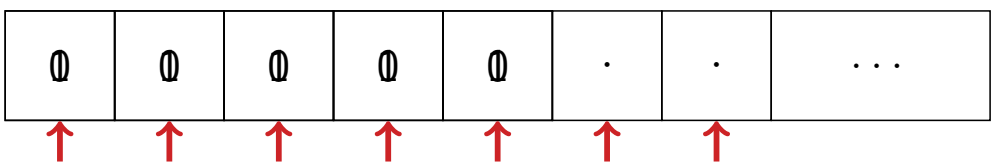
Exemple : complémentaire d'un mot

Soit $M := (\{e_1, e_2\}, e_1, e_2, \Delta)$ la machine de Turing dont le programme Δ est défini par

$$(e_1, 0) \mapsto (e_1, 1, \mathrm{D}),$$
$$(e_1, 1) \mapsto (e_1, 0, \mathrm{D}),$$
$$(e_1, \cdot) \mapsto (e_2, \cdot, \mathrm{D}).$$

Calcul de $M(00101)$:

$(e, a) = (e_1 e_2, 01\cdot)$



L'exécution de M sur u fournit ainsi le résultat 11010.

Ici, ce programme Δ permet de calculer le complémentaire de tout mot $u \in \{0, 1\}^*$ en entrée.

Exécutions qui ne se terminent pas

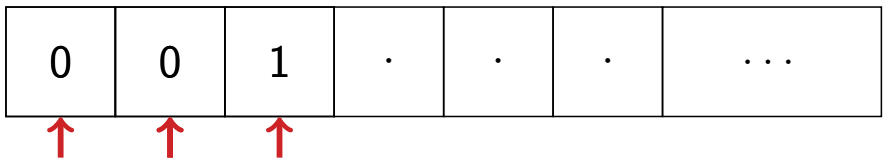
Il est possible de construire des machines de Turing telles que pour certaines entrées u, l'exécution de M sur u ne se termine pas.

Soit par exemple la machine de Turing $M := (\{e_1, e_2\}, e_1, e_2, \Delta)$ dont le programme Δ est défini par

$$(e_1, 0) \mapsto (e_1, 0, \mathrm{D}), \quad (e_1, 1) \mapsto (e_2, 1, \mathrm{G}), \quad (e_1, \cdot) \mapsto (e_1, \cdot, \mathrm{D}).$$

Calcul de $M(001)$:

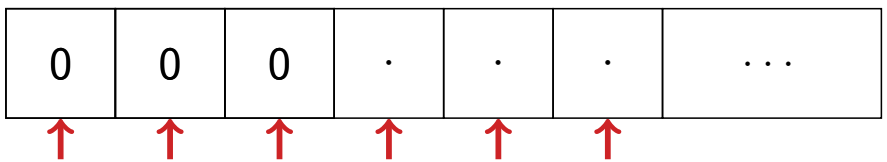
$(e, a) = (e_1 e_2, 01\cdot)$



On arrive à e_2 qui est l'état terminal, l'exécution est terminée.

Calcul de $M(000)$:

$(e, a) = (e_1, 0\cdot)$



La tête de lecture/écriture part vers infini, l'exécution ne se termine pas.

Coder une machine de Turing par un entier naturel

On associe à toute machine de Turing M un entier naturel $\mathrm{code}(M)$ de la manière suivante :

1. on fixe des conventions pour écrire les définitions des machines de Turing avec des caractères ASCII ;
2. on considère la suite de caractères m ainsi obtenue qui code M ;
3. on considère la suite de bits u obtenue en remplaçant chaque caractère de m par sa représentation binaire ;
4. on obtient finalement l'entier naturel $\mathrm{code}(M)$ en considérant l'entier dont u est la représentation binaire.

Coder une machine de Turing par un entier naturel

Par exemple, considérons la machine de Turing $M := (\{e_1, e_2\}, e_1, e_2, \Delta)$ dont le programme Δ est défini par

$$(e_1, 0) \mapsto (e_1, 0, \mathrm{D}), \quad (e_1, 1) \mapsto (e_2, 1, \mathrm{G}), \quad (e_1, \cdot) \mapsto (e_1, \cdot, \mathrm{D}).$$

M se code en caractères ASCII en le texte m suivant :

```
etats : e1, e2
initial : e1
terminal : e2
delta : (e1, 0) -> (e1, 0, D)
delta : (e1, 1) -> (e2, 1, G)
delta : (e1, .) -> (e1, ., D)
```

On en déduit la représentation binaire

$$u = 0110010101110100\ldots001010010000 1101$$

et de celle-ci, l'entier naturel $\mathrm{code}(M)$.

Programmes et entiers

Ainsi, lorsque des conventions de codage ont été spécifiées, l'application code est injective (deux machines de Turing différentes ne peuvent pas avoir un même code).

On peut ainsi ordonner l'ensemble de toutes les machines de Turing : on pose $M \leqslant M'$ si $\mathrm{code}(M) \leqslant \mathrm{code}(M')$.

Les machines de Turing peuvent donc être ordonnées en un segment infini

$$M_0 < M_1 < M_2 < \cdots < M_n < \cdots$$

Le rang $\mathrm{rang}(M)$ d'une machine de Turing M est la position de M dans ce segment.

L'application rang fournit une bijection entre l'ensemble des machines de Turing et l'ensemble des entiers naturels.

Conclusion : un programme (une machine de Turing) est un entier et réciproquement.

Problèmes de décision

Problème de décision : question P qui prend un mot de $\{0,1\}^*$ en entrée et qui répond oui ou non.

Par exemple :

- P : le mot est-il un palindrome ? $P(010010) = \mathrm{oui}$, $P(011) = \mathrm{non}$;
- P : la longueur du mot est-elle paire ? $P(\epsilon) = \mathrm{oui}$, $P(1) = \mathrm{non}$;
- P : l'entier en base deux codé par le mot est-il premier ? $P(111) = \mathrm{oui}$, $P(100) = \mathrm{non}$;
- P : le mot est-il le codage binaire d'un programme C accepté à la compilation par `gcc` avec l'option `-ansi` ?

Décidabilité et indécidabilité

Problème de décision décidable : problème de décision P tel qu'il existe une machine de Turing M_P telle que pour toute entrée $u \in \{0,1\}^*$, l'exécution de M_P sur u se termine et

$$M_P(u) = \begin{cases} 1 & \text{si } P(u) = \text{oui}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Lorsqu'il n'existe pas de telle machine de Turing, P est dit indécidable.

Intuitivement, un problème de décision P est décidable s'il est possible d'écrire, dans un langage suffisamment complet, une fonction f paramétrée par un objet u renvoyant `true` si $P(u) = \text{oui}$ et `false` sinon.

Le problème de l'arrêt

Problème de l'arrêt : problème de décision Arr prenant en entrée le codage binaire u d'un programme f et renvoyant oui si l'exécution du programme f se termine et non sinon.

Le problème de l'arrêt est **indécidable**.

Intuitivement, cela dit qu'il est impossible de concevoir un programme qui accepte en entrée un autre programme f et qui teste si l'exécution de f se termine.

Indécidabilité du problème de l'arrêt

On montre que Arr est indécidable par l'absurde en supposant que Arr est décidable.

Il existe donc une machine de Turing M_{Arr}.

Soit l'entier positif absurde défini par les instructions :

(1) soit E l'ensemble vide ;

(2) pour toute suite d'instructions f qui s'exprime avec moins ou autant de caractères que absurde,

  (a) si $M_{\mathrm{Arr}}(u) = 1$, où u est le codage binaire de f, ajouter à E la valeur calculée par f, exprimée par un entier.

(3) Renvoyer $\min \mathbb{N} \setminus E$.

Comme l'exécution d'absurde se termine, la valeur de retour d'absurde figure dans E (étape (a)).

Par ailleurs, la valeur renvoyée par absurde ne figure pas dans E (étape (3)).

Ceci est absurde : M_{Arr} n'existe pas et Arr est donc indécidable.

Fonctions récursives

Une fonction récursive est une fonction

$$f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$$

qui est intuitivement calculable.

Par exemple,

- $f : (n_1, n_2, n_3) \mapsto n_1 + n_2 + n_3$;
- $f : n \mapsto 1$ si n est premier, 0 sinon ;
- $f : n \mapsto 1$ si $n \leqslant 1, n \times f(n-1)$ sinon ;

sont des fonctions récursives.

En revanche, la fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par

$$f(n) := \begin{cases} 1 & \text{si } \mathrm{Arr}(g) = \text{oui où } g \text{ est le prog. tq. } \mathrm{rang}(g) = n, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

n'est pas une fonction récursive (si elle était calculable, le problème de l'arrêt serait décidable).

λ-calcul

Le λ-calcul a été introduit dans le but de proposer un formalisme pour définir et décrire les fonctions récursives.

En λ-calcul, la notion première est celle de fonction.

Une expression du λ-calcul est

1. soit une **variable**, notée x, y, z, ... ;
2. soit l'**application** d'une expression f à une expression g, notée fg ;
3. soit l'**abstraction** d'une expression f, notée $\lambda x.f$ où x est une variable.

Par exemple, $(\lambda z.z)((\lambda x.x)(\lambda y.((\lambda x.x)y)))$ est une expression.

La β-**substitution** est le mécanisme qui permet de simplifier (calculer) une expression. Il consiste, étant donnée une expression de la forme $(\lambda x.f)g$ à la simplifier en substituant g aux occurrences libres de x dans f.

Paradigmes de programmation

Un paradigme est une manière d'observer le monde et d'interpréter la réalité. Il influe sur la manière de penser et d'agir.

Un paradigme de programmation conceptualise la manière de représenter les objets informatiques et de formuler les algorithmes qui les manipulent.

Il existe deux principaux paradigmes de programmation :

1. le **paradigme impératif** ;
2. le **paradigme fonctionnel**.

Le 1er se base sur la machine de Turing, le 2e sur le λ-calcul.

Le paradigme impératif

En programmation impérative, un problème est résolu en décrivant étape par étape les actions à réaliser.

Les éléments suivants sont constitutifs de ce paradigme :

1. les instructions d'affectation ;
2. les instructions de branchement ;
3. les instruction de boucle ;
4. les structures de données mutables.

Des instructions peuvent modifier l'état de la machine en altérant sa mémoire.

Le paradigme fonctionnel

En programmation fonctionnelle, la notion de fonction est centrale.

Un programme est un emboîtement de fonctions (dans une fonction principale).

L'exécution d'un programme est l'évaluation de la fonction principale.

Les éléments suivants sont constitutifs de ce paradigme :

1. la liaison d'un nom à une valeur ;
2. la récursivité ;
3. les instructions de branchement ;
4. les structures de données non mutables.

Il n'y a pas de notion d'état de la machine car celui-ci ne peut pas être modifié.

Ce que l'on fera

Dans la suite de ce module, on adoptera au maximum le paradigme fonctionnel.

Ainsi, nous nous interdirons

1. d'utiliser des variables (et donc aussi des affectations) ;
2. d'utiliser des instructions de boucle ;
3. de produire des effets de bord (sauf éventuellement pour la gestion des entrées/sorties).

En revanche, nous utiliserons de manière courante

1. les **fonctions récursives** ;
2. les **fonctions locales**.

Une variable peut-être vue comme une **fonction d'arité zéro** (c.-à-d. une fonction qui ne prend pas d'entrée).

Transparence référentielle

Principe de transparence référentielle : dans tout programme, il est possible de remplacer une expression par sa valeur sans que cela ne change le résultat.

Considérons le code C suivant :

```
int f(int n) {
    printf("a");
    return n;
}

int g(int n) {
    return n;
}
...
g(f(1));
```

L'expression `f(1)` a pour valeur `1` mais `g(1)` et `g(f(1))` ne produisent pas le même résultat.

En effet, `g(f(1))` affiche `"a"` mais pas `g(1)`.

Le principe de transparence référentielle n'est donc pas respecté en C.

Règle : en programmation fonctionnelle, le principe de transparence référentielle s'applique.

Typage dynamique *vs* statique

Dans la plupart des langages de programmation, lors d'un appel à une fonction ou de l'évaluation d'une expression, les valeurs mises en jeu doivent être d'un type « autorisé ».

Il y a deux stratégies pour **vérifier les types** (typage) :

1. typage dynamique, où les types sont vérifiés lors de l'**exécution** du programme ;
2. typage statique, où les types sont vérifiés lors de la **compilation** du programme.

Typage dynamique

Considérons le programme Python

```
n = int(input())    # Lect. de texte et conversion vers entier.
if n % 2 == 0 :     # Test de parité sur ‘n‘.
    print n / 2     # Calcul arithm. sur ‘n‘ et affichage.
else :
    print n[1]      # Affichage de la 1re case de ‘n‘.
```

Lors de son exécution, des erreurs de typage peuvent se produire :

- si l'utilisateur saisit un entier, l'expression `int(input())` en l. 1 est bien typée ; sinon, elle ne l'est pas ;
- si l'utilisateur saisit un entier pair, l'expression `n / 2` en l. 3 est bien typée ; sinon, c'est l'expression `n[1]` qui est évaluée. Celle-ci n'est pas bien typée car `n` n'est pas un tableau.
  Cette information n'est donnée que lors de l'exécution :

```
Traceback (most recent call last):
  File "Prog.py", line 5, in <module>
    print n[1]
TypeError: 'int' object has no attribute '__getitem__'
```

Typage statique

Considérons le programme C

```
#include <stdio.h>
int main() {
    int n;
    scanf("%d", &n);
    if (n % 2 == 0)
        printf("%d\n", n / 2);
    else
        printf("%d\n", n[1]);
    return 0;
}
```

Lors de sa compilation, une erreur de typage se produit : `n` est une variable de type `int` mais elle est traitée en l. 8 comme une variable de type `int *`.

Cette information est donnée lors de la compilation :

```
Prog.c: In function ‘main’:
Prog.c:8:25: error: subscripted value is neither array nor pointer nor vector
       printf("%d\n", n[1]);
                        ^
```

Avantages et inconvénients

Typage dynamique.

- Avantage : grande flexibilité dans l'écriture des programmes.
- Inconvénients : les problèmes de typage ne sont mis en évidence qu'à l'exécution (il faut faire attention à tester tous les cas de figure), perte d'efficacité lors de l'exécution (à cause du typage).

Typage statique.

- Avantages : sécurité lors de l'écriture du programme (les erreurs les plus courantes sont détectées à la compilation), bonne efficacité lors de l'exécution.
- Inconvénient : moins de flexibilité dans l'écriture des programmes.

Typage explicite *vs* implicite

La plupart des langages de programmation manipulent des variables et des valeurs qui possèdent un type (ou même plusieurs).

Il y a deux manières principales de **connaître les types** des variables utilisées dans un programme :

1. typage explicite, où les **types** des variables sont **mentionnés** dans le programme ;
2. typage implicite, où les **types** des variables ne sont **pas mentionnés** dans le programme. Ils sont devinés lors de la compilation (si typage statique) ou lors de l'exécution (si typage dynamique) en fonction du contexte.

   Ce mécanisme s'appelle l'inférence des types.

Typage explicite

Considérons le programme C

```
#include <stdio.h>

typedef struct {
    int x, y;
} Point2D;

typedef struct {
    int x, y, z;
} Point3D;

void afficher(Point2D *p) {
    printf("(%d, %d)", p->x, p->y);
}

int main() {
    Point3D p;
    p.x = 1, p.y = 2, p.z = 3;
    afficher(&p);
    return 0;
}
```

Dans la fonction `main`, on a demandé explicitement que la variable `p` soit de type `Point3D`. La fonction `afficher` demande l'existence des champs `x` et `y` de son argument. Ces champs existent dans `p` et cependant, ce code ne compile pas.

En effet, même si une variable de type `Point3D` semble pouvoir être utilisée comme une variable de type `Point2D`, ceci est impossible en C qui est un langage à typage explicite : le type de `p` a été fixé lors de la déclaration de `afficher`.

Typage implicite

Considérons le programme Caml

```
let suivant x = x + 1 in
(print_int (suivant 5))
```

Ici, `suivant` est une fonction. Le type de son paramètre `x` n'est pas spécifié. Cependant, le fait que l'on réalise une opération arithmétique (`x + 1`) avec ce paramètre indique qu'il s'agit d'un entier.

De cette manière, le mécanisme d'inférence des types suggère au compilateur que `suivant` est une fonction qui accepte un entier et qui renvoie un entier.

Cette valeur renvoyée peut donc être traitée par la fonction `print_int` qui accepte en entrée des valeurs entières.

Avantages et inconvénients

Typage explicite.

- Avantages : meilleure lisibilité des programmes. En général, la compilation et l'exécution sont plus efficaces.
- Inconvénients : programmes verbeux.

Typage implicite.

- Avantages : programmes plus concis, le programmeur ne se préoccupe pas d'indiquer les types : le compilateur se charge de trouver ceux qui sont les plus adaptés.
- Inconvénients : programmes moins lisibles. Si le typage est statique, la compilation peut être plus longue (il faut deviner les types). Si le typage est dynamique, l'exécution peut être moins efficace.