Mathématiques discrètes

DUT Informatique 1
— Examen 1 —

Année 2014-2015 — vendredi 7 novembre 2014

Nom : ....

Prénom : ....

Les notes de cours et de TD sont autorisées. Les ordinateurs, calculatrices ainsi que les téléphones sont interdits et doivent être éteints durant l'épreuve. Les exercices sont indépendants. Prendre le temps de lire l'énoncé de chaque exercice avant de commencer. La lisibilité de la copie et la qualité de la rédaction seront prises en compte dans la correction.

---

1 Ensembles

Exercice 1. (Ensembles et opérations)

1. Soient deux ensembles $A := \{0, 1, 2\}$ et $B := \{2, 3\}$. Calculer :

   $A \cup B =$ $\{0, 1, 2, 3\}$

   $A \cap B =$ $\{2\}$

   $A \setminus B =$ $\{0, 1\}$

   $A \Delta B =$ $\{0, 1, 3\}$

   $A \times B =$ $\{(0,2), (0,3), (1,2), (1,3), (2,2) (2,3)\}$

2. Donner, en le justifiant, le cardinal de l'ensemble $E := [\![9, 18]\!] \times [\![13, 21]\!]$.

   Comme pour tous ensembles finis A et B on a $\#(A \times B) = (\#A)(\#B)$
   et pour tous $a \leq b \in \mathbb{Z}$, $\#[\![a, b]\!] = b - a + 1$,
   $\#E = \#([\![9, 18]\!] \times [\![13, 21]\!]) = (18-9+1)(21-13+1) = 90.$

3. Donner une partition ensembliste de cardinal 3 de l'ensemble $E := \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

$\{\{0\}, \{1\}, \{2, 3, 4, 5\}\}$

Exercice 2. (Deux opérations sur les ensembles)

Soient $\odot$ et $\boxdot$ deux opérations définies pour tous ensembles A et B par

$$A \odot B := (A \times B) \cup (B \times A) \qquad \text{et} \qquad A \boxdot B := (A \cup B) \times (B \cup A).$$

1. Calculer $\{1, 2\} \odot \{1, 2\}$.

$\{1, 2\} \odot \{1, 2\} = \{1, 2\}^2 \cup \{1, 2\}^2$
$= \{1, 2\}^2$
$= \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$

2. Démontrer que pour tout ensemble A, on a

$$A \odot A = A \times A.$$

$A \odot A = A^2 \cup A^2$. Comme $E \cup E = E$ pour tout ensemble E, $A \odot A = A^2$

3. Calculer $\{1, 2\} \boxdot \{1, 2\}$.

$\{1, 2\} \boxdot \{1, 2\} = (\{1, 2\} \cup \{1, 2\}) \times (\{1, 2\} \cup \{1, 2\})$
$= \{1, 2\}^2$
$= \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$

4. Démontrer que pour tout ensemble A, on a

$$A \boxdot A = A \times A.$$

$A \boxdot A = (A \cup A) \times (A \cup A)$ Comme $E \cup E = E$ pour tout ensemble E, $A \boxdot A = A^2$

5. Calculer $\{1,2\} \odot \{2,3\}$.

$\{1,2\} \odot \{2,3\} = (\{1,2\} \times \{2,3\}) \cup (\{2,3\} \times \{1,2\})$
$= \{(1,2),(1,3),(2,2),(2,3)\}$
$\cup \{(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$
$= \{(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(2,1),(3,1),(3,2)\}$

6. Calculer $\{1,2\} \boxdot \{2,3\}$.

$\{1,2\} \boxdot \{2,3\} = (\{1,2\} \cup \{2,3\}) \times (\{2,3\} \cup \{1,2\})$
$= \{1,2,3\}^2$
$= \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$

7. Démontrer que pour tous ensembles A et B, on a

$$A \odot B \subset A \boxdot B.$$

Soit $(x,y) \in A \odot B$. Par définition de $\odot$, on a $(x,y) \in A \times B$ ou $(x,y) \in B \times A$. Comme par définition $\boxdot$, $A \boxdot B = (A \cup B) \times (B \cup A)$, on a $(x,y) \in A \boxdot B$. Ainsi, $A \odot B \subset A \boxdot B$.

8. Déterminer si, pour tous ensembles A et B, on a

$$A \odot B = A \boxdot B.$$

Justifier la réponse.

D'après les questions 5 et 6, on a $\{1,2\} \odot \{2,3\} \neq \{1,2\} \boxdot \{2,3\}$. Ceci constitue un contre-exemple à l'énoncé, qui est donc faux.

9. En utilisant les questions 2, 4 et 7 (que l'on pourra admettre si elles n'ont pas été traitées), démontrer que pour tous ensembles A et B, on a

$$(A \boxdot A) \odot (B \boxdot B) \subset (A \odot A) \boxdot (B \odot B).$$

D'une part, d'après la question 4, $(A \boxdot A) \odot (B \boxdot B) = A \odot B$.

D'autre part, d'après la question 2, $(A \odot A) \boxdot (B \odot B) = A \boxdot B$.

Ainsi, et d'après la question 7, on a

$$\underbrace{(A \boxdot A) \odot (B \boxdot B)}_{A \odot B} \subset \underbrace{(A \odot A) \boxdot B \odot B}_{A \boxdot B}.$$

2 Logique

Exercice 3. (Formules sans quantificateur)
Soit la formule sans quantificateur

$$F := (P \to Q) \leftrightarrow ((\neg R) \to P).$$

1. Évaluer F sous l'affectation $A := \{P \mapsto 1, Q \mapsto 0, R \mapsto 0\}$. Toutes les étapes de l'évaluation doivent figurer.

$(P \to Q) \leftrightarrow ((\neg R) \to P)$
$(1 \to 0) \leftrightarrow ((\neg 0) \to 1)$
$(1 \to 0) \leftrightarrow (1 \to 1)$
$0 \leftrightarrow 1$
0
Sous l'affectation A, la formule F s'évalue en 0.

2. Construire la table de vérité de F.

P	Q	R	$P \to Q$	$\neg R$	$(\neg R) \to P$	F
0	0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	0
0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	0	1	1

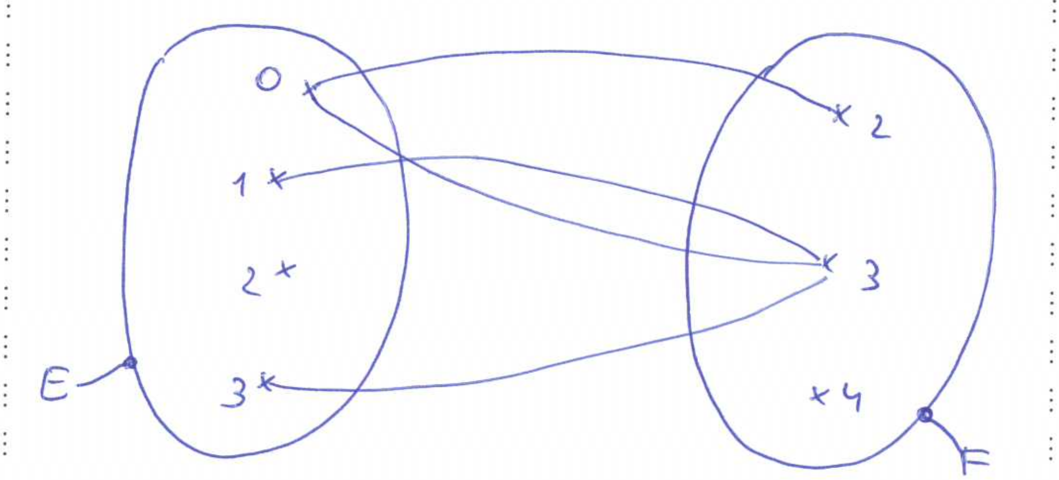
3. Déterminer et justifier le statut (satisfiable, falsifiable, valide, contradictoire) de F.

Il existe des affectations qui rendent F vraie, et d'autres qui rendent F fausse.
Ainsi, F est satisfiable, falsifiable, non valide et non contradictoire.

3 Relations binaires

Exercice 4. (Représentation de relations binaires et propriétés)

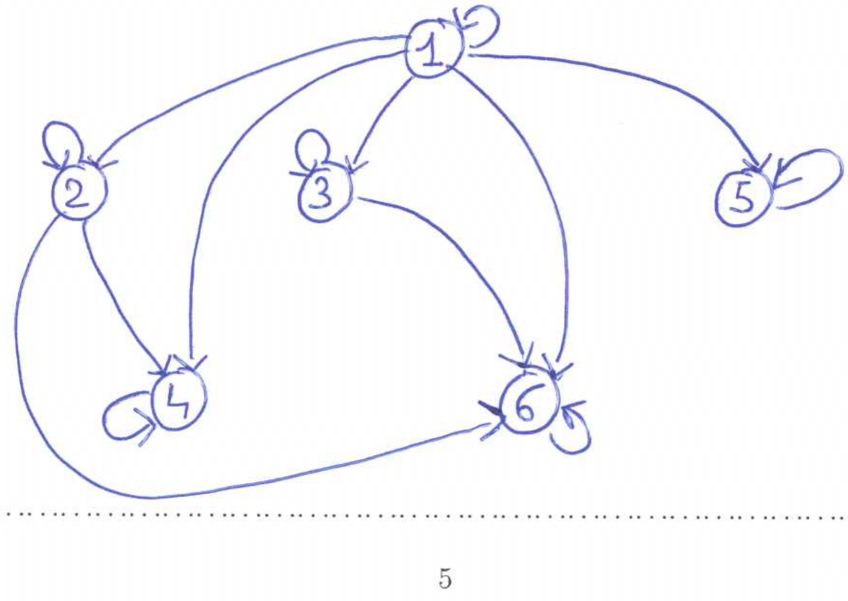
1. Soit $\mathcal{R}$ la relation binaire entre $E := \{0, 1, 2, 3\}$ et $F := \{2, 3, 4\}$ vérifiant $0\,\mathcal{R}\,2$, $0\,\mathcal{R}\,3$ $1\,\mathcal{R}\,3$, $3\,\mathcal{R}\,3$. Donner la représentation sagittale de $\mathcal{R}$.



2. Donner la représentation matricielle de $\mathcal{R}$.

2	X			
3	X	X		X
4				
	0	1	2	3

3. Soit l'ensemble $E := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Donner le graphe orienté de la relation binaire $|_E$.



Exercice 5. (Une relation d'équivalence)

Soit E un ensemble. Soit $\mathcal{R}$ la relation binaire sur $\mathcal{P}(E)^2$ définie pour tous $(X,Y),(X',Y') \in \mathcal{P}(E)^2$ par

$$(X,Y)\,\mathcal{R}\,(X',Y') \quad \text{si } X \cap Y = X' \cap Y'.$$

1. En posant (pour cette question uniquement) $E := \mathbb{N}$, donner trois exemples d'éléments en relation par $\mathcal{R}$. Les exemples doivent être bien choisis.

$(\{1\}, \{1\}) \; R \; (\{1\}, \{1\})$

$(\emptyset, \{0,1\}) \; R \; (\{0\}, \{1\})$

$(\{0,1,2\}, \{1,2,3\}) \; R \; (\{1,2\}, \mathbb{N})$

2. Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

* Réflexivité. Soit $(X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2$. Comme $X \cap Y = X \cap Y$, on a, par définition de R, $(X,Y) \, R \, (X,Y)$. Ainsi R est reflexive.

* Symétrie. Soient $(X_1,Y_1), (X_2,Y_2) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $(X_1,Y_1) \, R \, (X_2,Y_2)$. Par définition de R, $X_1 \cap Y_1 = X_2 \cap Y_2$. Ainsi, $X_2 \cap Y_2 = X_1 \cap Y_1$, ce qui implique $(X_2,Y_2) \, R \, (X_1,Y_1)$. R est donc symétrique.

* Transitivité. Soient $(X_1,Y_1), (X_2,Y_2), (X_3,Y_3) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $(X_1,Y_1) \, R \, (X_2,Y_2)$ et $(X_2,Y_2) \, R \, (X_3,Y_3)$. Par définition de R, $X_1 \cap Y_1 = X_2 \cap Y_2$ et $X_2 \cap Y_2 = X_3 \cap Y_3$. Ainsi, $X_1 \cap Y_1 = X_3 \cap Y_3$, ce qui implique $(X_1,Y_1) \, R \, (X_3,Y_3)$

* R est donc une relation d'équivalence.

3. En posant $E := \{0,1,2\}$, calculer la classe d'équivalence de $(\{0,2\},\{0,1,2\})$.

$[(\{0,2\}, \{0,1,2\})]_R = \{(\{0,2\}, \{0,1,2\}), (\{0,1,2\}, \{0,2\}), (\{0,2\}, \{0,2\})\}$

4. En posant $E := \{0,1\}$, calculer la classe d'équivalence de $(\{0\},\{1\})$.

$[(\{0\},\{1\})]_R = \{(\{0\},\{1\}), (\{1\},\{0\}), (\{0\},\emptyset), (\emptyset,\{0\}), (\{1\},\emptyset), (\emptyset,\{1\}), (\emptyset,\emptyset), (\{0,1\},\emptyset), (\emptyset,\{0,1\})\}$

Exercice 6. (Une relation d'ordre)

Soit $\mathcal{R}$ la relation binaire sur $\mathbb{N}^2$ définie pour tous $(x,y),(x',y') \in \mathbb{N}^2$ par

$$(x,y)\,\mathcal{R}\,(x',y') \quad \text{si } (x < \overset{x'}{\cancel{y}}) \text{ ou } (x = \overset{x'}{\cancel{y}} \text{ et } \overset{y}{\cancel{x}} \le y').$$

1. Donner trois exemples d'éléments en relation par $\mathcal{R}$. Les exemples doivent être bien choisis.

$(0,0)\ R\ (0,0)$
$(0,2)\ R\ (3,5)$
$(1,9)\ R\ (3,0)$

2. Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre.

* Réflexivité. Soit $(x,y) \in \mathbb{N}^2$. Comme $x = x$ et $y \le y$, par définition R, on a $(x,y)\,R\,(x,y)$. Ainsi, R est réflexive.

* Antisymétrie. Soient $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in \mathbb{N}^2$ tels que $(x_1,y_1)\,R\,(x_2,y_2)$ et $(x_2,y_2)\,R\,(x_1,y_1)$. Nous avons donc, par définition de R, $\big((x_1 < x_2)$ ou $(x_1 = x_2$ et $y_1 \le y_2)\big)$ et $\big((x_2 < x_1)$ ou $(x_2 = x_1$ et $y_2 \le y_1)\big)$. On a donc forcément $x_1 = x_2$, ce qui entraine $y_1 \le y_2$ et $y_2 \le y_1$. Ainsi, $(x_1,y_1) = (x_2,y_2)$. R est donc antisymétrique.

* transitivité : Voir annexes.

3. Démontrer ou infirmer le fait que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre totale.

Soient $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in \mathbb{N}^2$. Nous avons les quatre possibilités suivantes :

(1) Si $x_1 < x_2$, on a $(x_1,y_1)\,R\,(x_2,y_2)$
(2) Si $x_1 > x_2$, on a $(x_2,y_2)\,R\,(x_1,y_1)$
(3) Si $x_1 = x_2$ et $y_1 \le y_2$, on a $(x_1,y_1)\,R\,(x_2,y_2)$
(4) Si $x_1 = x_2$ et $y_1 > y_2$, on a $(x_2,y_2)\,R\,(x_1,y_1)$.

Ainsi, il est toujours possible de comparer (x_1,y_1) à (x_2,y_2). R est donc une relation d'ordre totale.

4 Annexes

Exercice 5.2

* Transitivité : soient $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in \mathbb{N}^2$ tels que $(x_1, y_1) \mathcal{R} (x_2, y_2)$ et $(x_2, y_2) \mathcal{R} (x_3, y_3)$.

Par définition de $\mathcal{R}$, nous avons :

$$((x_1 < x_2) \text{ ou } (x_1 = x_2 \text{ et } y_1 \leq y_2))$$

$$\text{et}$$

$$((x_2 < x_3) \text{ ou } (x_2 = x_3 \text{ et } y_2 \leq y_3)).$$

Il y a donc quatre possibilités :

(1) $(x_1 < x_2)$ et $(x_2 < x_3)$

(2) $(x_1 < x_2)$ et $(x_2 = x_3$ et $y_2 \leq y_3)$

(3) $(x_1 = x_2$ et $y_1 \leq y_2)$ et $(x_2 < x_3)$

(4) $(x_1 = x_2$ et $y_1 \leq y_2)$ et $(x_2 = x_3$ et $y_2 \leq y_3)$

Nous avons, pour chacun de ces cas (1), (2), (3) et (4),

$$(x_1 < x_3) \text{ ou } (x_1 = x_3 \text{ et } y_1 \leq y_3).$$

Ainsi, par définition de $\mathcal{R}$, on a $(x_1, y_1) \mathcal{R} (x_3, y_3)$, ce qui montre que $\mathcal{R}$ est transitive.

$\mathcal{R}$ est donc une relation d'ordre.