

Théorie de l'information

M1 Informatique 2012-2013

Fiche de TD 3

Exercice 1. (Algorithme de Varn)

L'algorithme de Varn consiste, sur l'entrée d'un alphabet $A := \{a_1, \dots, a_k\}$, d'une fonction de coût $c : A \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et d'un entier n de la forme $n = \ell(k-1) + 1$ où ℓ est un entier strictement positif, à construire un code préfixe de cardinal n sur l'alphabet A .

Cet algorithme construit un arbre T d'arité k de la manière suivante :

- (1) l'arbre T est initialisé en une racine étiquetée par 0 ;
- (2) Pour i allant de 1 à ℓ :
 - (a) soit x une feuille de T avec une plus petite étiquette ;
 - (b) pour chaque lettre a_i de A , construire un nœud étiqueté par l'étiquette de x plus $c(a_i)$ et attacher ce nœud à x par une arête étiquetée par a_i .

1. Expliquer comment, à partir d'un arbre T produit par l'algorithme de Varn, on obtient un code préfixe X_T de cardinal n sur A .
2. Un code préfixe X est *maximal* si pour tout code préfixe Y tel que $X \subseteq Y \subseteq A^*$, on a $X = Y$. Montrer que tout code obtenu par l'algorithme de Varn est un code préfixe maximal.
3. Construire un code préfixe de cardinal 7 sur l'alphabet $A := \{a, b, c, d\}$ où l'on a $c(a) := 1$, $c(b) := 2$, $c(c) := 3$ et $c(d) := 4$ en appliquant l'algorithme de Varn.
4. Construire un code préfixe de cardinal 7 sur l'alphabet $A := \{a, b, c\}$ où l'on a $c(a) := 2$, $c(b) := 4$ et $c(c) := 5$ en appliquant l'algorithme de Varn.
5. Construire un code préfixe de cardinal 13 sur l'alphabet $A := \{a, b, c\}$ où l'on a $c(a) := 1$, $c(b) := 3$ et $c(c) := 4$ en appliquant l'algorithme de Varn.
6. Reformuler en détail la description de l'algorithme de Varn en explicitant les structures de données utilisées. Évaluer sa complexité en espace et en temps en fonction du cardinal n du code préfixe construit.
7. Le coût $c(X)$ d'un code préfixe X sur A est défini par

$$c(X) := \sum_{x \in X} c(x_1) + \dots + c(x_{|x|}).$$

Calculer les coûts des codes construits précédemment.

8. Un code préfixe X de cardinal n sur A est *optimal* s'il minimise $c(X)$. Démontrer que tout code construit par l'algorithme de Varn est optimal parmi les codes maximaux.