

Opérades en combinatoire algébrique

Samuele Giraudo

LIGM, Université Paris-Est Marne-la-Vallée

Soutenance d'habilitation à diriger des recherches

4 décembre 2017

Plan

Combinatoire algébrique

Aperçu des résultats

Systèmes de génération à bourgeons

Perspectives

Plan

Combinatoire algébrique

Combinatoire

Combinatoire : science des plans de construction.

Plan de construction : liste de règles de construction d'objets.

Combinatoire

Combinatoire : science des plans de construction.

Plan de construction : liste de règles de construction d'objets.

Exemple

Soit $\mathfrak{S}$ le plan formant des mots de longueur n sur les lettres de $\{1, \dots, n\}$ tels que chaque lettre apparaît exactement une fois.

On appelle ces objets des **permutations**.

Combinatoire

Combinatoire : science des plans de construction.

Plan de construction : liste de règles de construction d'objets.

Exemple

Soit $\mathfrak{S}$ le plan formant des mots de longueur n sur les lettres de $\{1, \dots, n\}$ tels que chaque lettre apparaît exactement une fois.

Quelques objets de $\mathfrak{S}$:

$\epsilon, \quad 1, \quad 12, 21, \quad 123, 132, 213, 231, 312, 321.$

On appelle ces objets des **permutations**.

Combinatoire

Combinatoire : science des plans de construction.

Plan de construction : liste de règles de construction d'objets.

Exemple

Soit $\mathfrak{S}$ le plan formant des mots de longueur n sur les lettres de $\{1, \dots, n\}$ tels que chaque lettre apparaît exactement une fois.

Quelques objets de $\mathfrak{S}$:

$\epsilon, \quad 1, \quad 12, 21, \quad 123, 132, 213, 231, 312, 321.$

On appelle ces objets des **permutations**.

Exemple

Soit **Motz** le plan formant des chemins constitués de pas de $\left\{ \begin{array}{c} \square \\ \circ \end{array} \right\}, \begin{array}{c} \circ - \circ \\ \circ \end{array}, \begin{array}{c} \circ \\ \square \end{array} \right\}$, se terminant au niveau du départ et n'allant jamais en dessous.

On appelle ces objets des **chemins de Motzkin**.

Combinatoire

Combinatoire : science des plans de construction.

Plan de construction : liste de règles de construction d'objets.

Exemple

Soit $\mathfrak{S}$ le plan formant des mots de longueur n sur les lettres de $\{1, \dots, n\}$ tels que chaque lettre apparaît exactement une fois.

Quelques objets de $\mathfrak{S}$:

$\epsilon, \quad 1, \quad 12, 21, \quad 123, 132, 213, 231, 312, 321.$

On appelle ces objets des **permutations**.

Exemple

Soit **Motz** le plan formant des chemins constitués de pas de $\left\{ \begin{array}{c} \circ \\ \diagup \diagdown \end{array} \right\}, \begin{array}{c} \circ - \circ \end{array}, \begin{array}{c} \circ \\ \diagup \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \diagdown \end{array} \right\}$, se terminant au niveau du départ et n'allant jamais en dessous.

Quelques objets de **Motz** :

$\circ, \quad \circ - \circ, \quad \circ - \circ - \circ, \quad \begin{array}{c} \circ \\ \diagup \diagdown \end{array}, \quad \circ - \circ - \circ - \circ, \quad \begin{array}{c} \circ \\ \diagup \diagdown \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \diagup \diagdown \end{array}, \quad \begin{array}{c} \circ \\ \diagup \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \diagdown \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \diagup \diagdown \end{array}, \quad \begin{array}{c} \circ \\ \diagup \diagdown \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \diagup \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \diagdown \end{array}, \quad \begin{array}{c} \circ \\ \diagup \diagdown \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \diagup \diagdown \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \diagup \diagdown \end{array}, \quad \circ - \circ - \circ - \circ - \circ.$

On appelle ces objets des **chemins de Motzkin**.

Ensembles combinatoires

Soit C un plan de construction.

Ensembles combinatoires

Soit C un plan de construction.

Lorsque C est muni d'une fonction de taille

$$| - | : C \rightarrow \mathbb{N}$$

telle que toutes les fibres $|n|^{-1}$ sont finies, C est un ensemble combinatoire.

Ensembles combinatoires

Soit C un plan de construction.

Lorsque C est muni d'une fonction de taille

$$| - | : C \rightarrow \mathbb{N}$$

telle que toutes les fibres $|n|^{-1}$ sont finies, C est un ensemble combinatoire.

On note ainsi $C(n)$ l'ensemble fini des éléments de C de taille n .

Ensembles combinatoires

Soit C un plan de construction.

Lorsque C est muni d'une fonction de taille

$$| - | : C \rightarrow \mathbb{N}$$

telle que toutes les fibres $|n|^{-1}$ sont finies, C est un ensemble combinatoire.

On note ainsi $C(n)$ l'ensemble fini des éléments de C de taille n .

Exemple

Le plan de construction $\mathfrak{S}$ est un ensemble combinatoire pour la fonction de taille qui attribue à chaque permutation sa longueur en tant que mot.

Ensembles combinatoires

Soit $\mathcal{C}$ un plan de construction.

Lorsque $\mathcal{C}$ est muni d'une fonction de taille

$$|\cdot| : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{N}$$

telle que toutes les fibres $|n|^{-1}$ sont finies, $\mathcal{C}$ est un ensemble combinatoire.

On note ainsi $\mathcal{C}(n)$ l'ensemble fini des éléments de $\mathcal{C}$ de taille n .

Exemple

Le plan de construction $\mathfrak{S}$ est un ensemble combinatoire pour la fonction de taille qui attribue à chaque permutation sa longueur en tant que mot.

Ainsi,

$$\mathfrak{S}(0) = \{\epsilon\},$$

$$\mathfrak{S}(1) = \{1\},$$

$$\mathfrak{S}(2) = \{12, 21\},$$

$$\mathfrak{S}(3) = \{123, 132, 213, 231, 312, 321\}.$$

Combinatoire et questions

Soit C un ensemble combinatoire.

Questions classiques :

- compter les objets de C de taille n ;

Exemple

Le nombre d'objets de $\mathfrak{S}$ de taille n est $n!$.

Combinatoire et questions

Soit C un ensemble combinatoire.

Questions classiques :

- ▶ compter les objets de C de taille n ;
- ▶ engendrer tous les objets de C de taille n ;

Exemple

Le nombre d'objets de $\mathfrak{S}$ de taille n est $n!$.

Combinatoire et questions

Soit C un ensemble combinatoire.

Questions classiques :

- ▶ compter les objets de C de taille n ;
- ▶ engendrer tous les objets de C de taille n ;
- ▶ engendrer aléatoirement un objet de C de taille n (suivant une distribution donnée);

Exemple

Le nombre d'objets de $\mathfrak{S}$ de taille n est $n!$.

Combinatoire et questions

Soit C un ensemble combinatoire.

Questions classiques :

- ▶ compter les objets de C de taille n ;
- ▶ engendrer tous les objets de C de taille n ;
- ▶ engendrer aléatoirement un objet de C de taille n (suivant une distribution donnée);
- ▶ mettre en relation C avec d'autres ensembles combinatoires D ;

Exemple

Le nombre d'objets de $\mathfrak{S}$ de taille n est $n!$.

Combinatoire et questions

Soit $\mathcal{C}$ un ensemble combinatoire.

Questions classiques :

- ▶ compter les objets de $\mathcal{C}$ de taille n ;
- ▶ engendrer tous les objets de $\mathcal{C}$ de taille n ;
- ▶ engendrer aléatoirement un objet de $\mathcal{C}$ de taille n (suivant une distribution donnée);
- ▶ mettre en relation $\mathcal{C}$ avec d'autres ensembles combinatoires $\mathcal{D}$;
- ▶ définir des statistiques sur $\mathcal{C}$, c.-à-d. des fonctions $s : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{N}$.

Exemple

Le nombre d'objets de $\mathfrak{S}$ de taille n est $n!$.

Une descente dans une permutation σ est une position i telle que $\sigma(i) > \sigma(i+1)$.

La fonction s qui envoie une permutation sur son nombre de descentes est une statistique de $\mathfrak{S}$. Par exemple, $s(3\overline{5}1\overline{4}2) = 2$.

Applications de la combinatoire

La combinatoire est un outil pour la formulation et la résolution de nombreux problèmes :

- ▶ **dénombrer des configurations** obéissant à des règles imposées;

Exemples

- ▶ Problèmes « twelvefold way », théorie de Pólya.

Applications de la combinatoire

La combinatoire est un outil pour la formulation et la résolution de nombreux problèmes :

- ▶ dénombrer des configurations obéissant à des règles imposées;
- ▶ évaluer la complexité d'algorithmes;

Exemples

- ▶ Problèmes « twelvefold way », théorie de Pólya.
- ▶ Analyse d'algorithmes, permutations et algorithmes de tri, arbres et algorithmes de gestion d'ensembles dynamiques.

Applications de la combinatoire

La combinatoire est un outil pour la formulation et la résolution de nombreux problèmes :

- ▶ dénombrer des configurations obéissant à des règles imposées;
- ▶ évaluer la complexité d'algorithmes;
- ▶ servir de modèle d'abstraction de situations complexes;

Exemples

- ▶ Problèmes « twelvefold way », théorie de Pólya.
- ▶ Analyse d'algorithmes, permutations et algorithmes de tri, arbres et algorithmes de gestion d'ensembles dynamiques.
- ▶ Modèles de calcul, codage d'information.

Applications de la combinatoire

La combinatoire est un outil pour la formulation et la résolution de nombreux problèmes :

- ▶ dénombrer des configurations obéissant à des règles imposées;
- ▶ évaluer la complexité d'algorithmes;
- ▶ servir de modèle d'abstraction de situations complexes;
- ▶ comprendre les mécanismes régissant des structures algébriques.

Exemples

- ▶ Problèmes « twelvefold way », théorie de Pólya.
- ▶ Analyse d'algorithmes, permutations et algorithmes de tri, arbres et algorithmes de gestion d'ensembles dynamiques.
- ▶ Modèles de calcul, codage d'information.
- ▶ Algèbres associatives et mots, algèbres dendriformes et arbres binaires, algèbres pré-Lie et arbres enracinés.

Différents styles de combinatoire

Il existe plusieurs façons d'approcher ces questions.

La combinatoire se décline ainsi en plusieurs styles comprenant la combinatoire

- ▶ **énumérative** (bijections, séries génératrices);
- ▶ **analytique** (analyse complexe, étude asymptotique);
- ▶ **probabiliste** (méthodes probabilistes, théorie de Ramsey);

Différents styles de combinatoire

Il existe plusieurs façons d'approcher ces questions.

La combinatoire se décline ainsi en plusieurs styles comprenant la combinatoire

- ▶ **énumérative** (bijections, séries génératrices);
- ▶ **analytique** (analyse complexe, étude asymptotique);
- ▶ **probabiliste** (méthodes probabilistes, théorie de Ramsey);
- ▶ **algébrique** (structures algébriques).

Point de vue algébrique

Idée principale

Pour comprendre un ensemble combinatoire C , le munir d'opérations.

Point de vue algébrique

Idée principale

Pour comprendre un ensemble combinatoire $\mathcal{C}$, le munir d'opérations.

L'étude de $\mathcal{C}$ en tant que structure algébrique $\mathcal{C}$ mène à la découverte de propriétés sur ses objets.

Point de vue algébrique

Idée principale

Pour comprendre un ensemble combinatoire $\mathcal{C}$, le munir d'opérations.

L'étude de $\mathcal{C}$ en tant que structure algébrique $\mathcal{C}$ mène à la découverte de propriétés sur ses objets. En particulier,

- changements de base dans $\mathcal{C}$
 - ↪ reformulations alternatives d'opérations;

Point de vue algébrique

Idée principale

Pour comprendre un ensemble combinatoire $\mathcal{C}$, le munir d'opérations.

L'étude de $\mathcal{C}$ en tant que structure algébrique $\mathcal{C}$ mène à la découverte de propriétés sur ses objets. En particulier,

- ▶ changements de base dans $\mathcal{C}$
 $\leadsto$ reformulations alternatives d'opérations;
- ▶ ensembles de générateurs minimaux de $\mathcal{C}$
 $\leadsto$ mise en évidence de pièces élémentaires de construction;

Point de vue algébrique

Idée principale

Pour comprendre un ensemble combinatoire $\mathcal{C}$, le munir d'opérations.

L'étude de $\mathcal{C}$ en tant que structure algébrique $\mathcal{C}$ mène à la découverte de propriétés sur ses objets. En particulier,

- ▶ changements de base dans $\mathcal{C}$
 $\leadsto$ reformulations alternatives d'opérations;
- ▶ ensembles de générateurs minimaux de $\mathcal{C}$
 $\leadsto$ mise en évidence de pièces élémentaires de construction;
- ▶ morphismes impliquant $\mathcal{C}$
 $\leadsto$ algorithmes de transformation d'objets combinatoires et révélation de symétries (automorphismes).

Exemple 1 : mélange de permutations

On commence par considérer le $\mathbb{K}$ -espace vectoriel $\mathbb{K} \langle \mathfrak{S} \rangle$ engendré par $\mathfrak{S}$.

Exemple 1 : mélange de permutations

On commence par considérer le $\mathbb{K}$ -espace vectoriel $\mathbb{K} \langle \mathfrak{S} \rangle$ engendré par $\mathfrak{S}$.

Par définition, l'ensemble

$$\{F_\sigma : \sigma \in \mathfrak{S}\}$$

forme une base de $\mathbb{K} \langle \mathfrak{S} \rangle$.

Exemple 1 : mélange de permutations

On commence par considérer le $\mathbb{K}$ -espace vectoriel $\mathbb{K} \langle \mathfrak{S} \rangle$ engendré par $\mathfrak{S}$.

Par définition, l'ensemble

$$\{F_\sigma : \sigma \in \mathfrak{S}\}$$

forme une base de $\mathbb{K} \langle \mathfrak{S} \rangle$.

On munit cet espace du **produit de mélange décalé** .

Exemple

$$F_{12} \cdot F_{21} = F_{1243} + F_{1423} + F_{1432} + F_{4123} + F_{4132} + F_{4312}.$$

Exemple 1 : mélange de permutations

On commence par considérer le $\mathbb{K}$ -espace vectoriel $\mathbb{K} \langle \mathfrak{S} \rangle$ engendré par $\mathfrak{S}$.

Par définition, l'ensemble

$$\{F_\sigma : \sigma \in \mathfrak{S}\}$$

forme une base de $\mathbb{K} \langle \mathfrak{S} \rangle$.

On munit cet espace du produit de mélange décalé $\cdot$.

Exemple

$$F_{12} \cdot F_{21} = F_{1243} + F_{1423} + F_{1432} + F_{4123} + F_{4132} + F_{4312}.$$

L'espace $\mathbb{K} \langle \mathfrak{S} \rangle$ muni du produit $\cdot$ est une algèbre associative.

Exemple 1 : mélange de permutations

On commence par considérer le $\mathbb{K}$ -espace vectoriel $\mathbb{K} \langle \mathfrak{S} \rangle$ engendré par $\mathfrak{S}$.

Par définition, l'ensemble

$$\{F_\sigma : \sigma \in \mathfrak{S}\}$$

forme une base de $\mathbb{K} \langle \mathfrak{S} \rangle$.

On munit cet espace du **produit de mélange décalé** $\cdot$.

Exemple

$$F_{12} \cdot F_{21} = F_{1243} + F_{1423} + F_{1432} + F_{4123} + F_{4132} + F_{4312}.$$

L'espace $\mathbb{K} \langle \mathfrak{S} \rangle$ muni du produit $\cdot$ est une **algèbre associative**.

Elle est connue sous le nom d'**algèbre des fonctions quasi-symétriques libres FQSym** [Malvenuto, Reutenauer, 1995], [Duchamp, Hivert, Thibon, 2002].

Exemple 1 : mélange de permutations

Soit $\preceq$, l'ordre partiel sur $\mathfrak{S}$ engendré par la relation $\triangleleft$ vérifiant

$$u \text{ a b } v \triangleleft u \text{ b a } v, \quad u, v \in \mathbb{N}^*, \quad \text{a} < \text{b} \in \mathbb{N}.$$

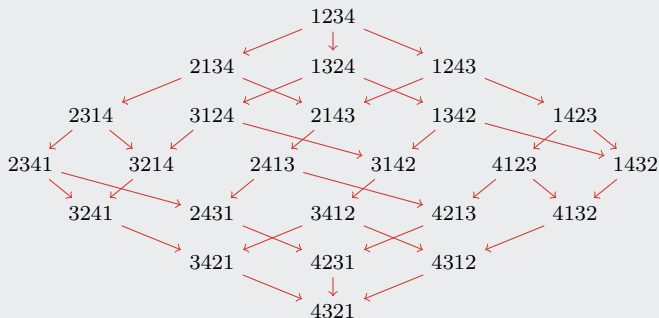
Exemple 1 : mélange de permutations

Soit $\preccurlyeq$, l'ordre partiel sur $\mathfrak{S}$ engendré par la relation $\triangleleft$ vérifiant

$$u \mathbf{a} b v \triangleleft u \mathbf{b} a v, \quad u, v \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{a} < \mathbf{b} \in \mathbb{N}.$$

Exemple

Diagramme de Hasse de l'ordre restreint à $\mathfrak{S}(4)$:



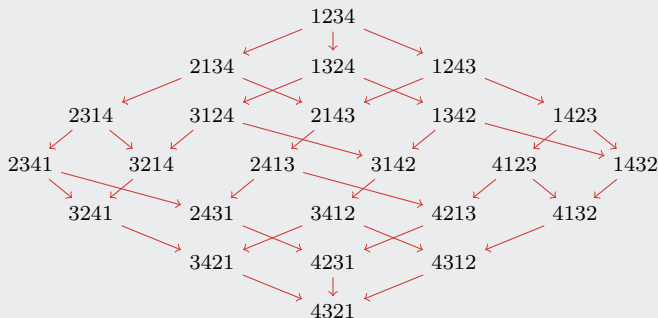
Exemple 1 : mélange de permutations

Soit $\preccurlyeq$, l'ordre partiel sur $\mathfrak{S}$ engendré par la relation $\triangleleft$ vérifiant

$$u \mathbf{a} b v \triangleleft u \mathbf{b} a v, \quad u, v \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{a} < \mathbf{b} \in \mathbb{N}.$$

Exemple

Diagramme de Hasse de l'ordre restreint à $\mathfrak{S}(4)$:



Cet ordre $\preccurlyeq$ munit chaque $\mathfrak{S}(n)$ d'une structure de treillis, appelée **ordre faible droit** [Guilbaud, Rosenstiehl, 1963], [Yanagimoto, Okamoto, 1969].

Exemple 1 : mélange de permutations

Soient les éléments

$$E_{\sigma} := \sum_{\substack{\nu \in \mathfrak{S} \\ \sigma \prec \nu}} F_{\nu}.$$

Exemple 1 : mélange de permutations

Soient les éléments

$$E_{\sigma} := \sum_{\substack{\nu \in \mathfrak{S} \\ \sigma \prec \nu}} F_{\nu}.$$

Exemple

$$E_{2341} = F_{2341} + F_{2431} + F_{3241} + F_{3421} + F_{4231} + F_{4321}$$

Exemple 1 : mélange de permutations

Soient les éléments

$$E_{\sigma} := \sum_{\substack{\nu \in \mathfrak{S} \\ \sigma \prec \nu}} F_{\nu}.$$

Exemple

$$E_{2341} = F_{2341} + F_{2431} + F_{3241} + F_{3421} + F_{4231} + F_{4321}$$

Par triangularité, $\{E_{\sigma} : \sigma \in \mathfrak{S}\}$ forme une base de $\mathbb{K}\langle \mathfrak{S} \rangle$.

Exemple 1 : mélange de permutations

Soient les éléments

$$E_\sigma := \sum_{\substack{\nu \in \mathfrak{S} \\ \sigma \prec \nu}} F_\nu.$$

Exemple

$$E_{2341} = F_{2341} + F_{2431} + F_{3241} + F_{3421} + F_{4231} + F_{4321}$$

Par triangularité, $\{E_\sigma : \sigma \in \mathfrak{S}\}$ forme une base de $\mathbb{K}\langle \mathfrak{S} \rangle$.

Proposition [Duchamp, Hivert, Thibon, 2002]

$$E_\sigma \cdot E_\nu = E_{\sigma/\nu}$$

Exemple 1 : mélange de permutations

Soient les éléments

$$E_\sigma := \sum_{\substack{\nu \in \mathfrak{S} \\ \sigma \prec \nu}} F_\nu.$$

Exemple

$$E_{2341} = F_{2341} + F_{2431} + F_{3241} + F_{3421} + F_{4231} + F_{4321}$$

Par triangularité, $\{E_\sigma : \sigma \in \mathfrak{S}\}$ forme une base de $\mathbb{K}\langle \mathfrak{S} \rangle$.

Proposition [Duchamp, Hivert, Thibon, 2002]

$$E_\sigma \cdot E_\nu = E_{\sigma/\nu}$$

L'opération $/$ est le produit de **concaténation décalée** des permutations.

Exemple

$$312/21 = 31254$$

Exemple 1 : mélange de permutations

Générateurs minimaux de $(\mathbb{K} \langle \mathfrak{S} \rangle, \cdot)$; les éléments E_σ tels que

$$E_\sigma = E_\nu \cdot E_\pi \quad \text{implique} \quad \{\nu, \pi\} = \{\epsilon, \sigma\}.$$

Exemple 1 : mélange de permutations

Générateurs minimaux de $(\mathbb{K} \langle \mathfrak{S} \rangle, \cdot)$; les éléments E_σ tels que

$$E_\sigma = E_\nu \cdot E_\pi \quad \text{implique} \quad \{\nu, \pi\} = \{\epsilon, \sigma\}.$$

Ce sont les E_σ tels que σ est une **permutation connectée**, c.-à-d. une permutation non vide dont aucun préfixe propre n'est une permutation [Comtet, 1972].

Exemple 1 : mélange de permutations

Générateurs minimaux de $(\mathbb{K} \langle \mathfrak{S} \rangle, \cdot)$; les éléments E_σ tels que

$$E_\sigma = E_\nu \cdot E_\pi \quad \text{implique} \quad \{\nu, \pi\} = \{\epsilon, \sigma\}.$$

Ce sont les E_σ tels que σ est une **permutation connectée**, c.-à-d. une permutation non vide dont aucun préfixe propre n'est une permutation [Comtet, 1972].

Exemple

Quelques permutations connectées :

1, 21, 231, 312, 321,
2341, 2413, 2431, 3142, 3241, 3412, 3421, 4123, 4132, 4213, 4231, 4312, 4321.

Exemple 1 : mélange de permutations

Générateurs minimaux de $(\mathbb{K} \langle \mathfrak{S} \rangle, \cdot)$; les éléments E_σ tels que

$$E_\sigma = E_\nu \cdot E_\pi \quad \text{implique} \quad \{\nu, \pi\} = \{\epsilon, \sigma\}.$$

Ce sont les E_σ tels que σ est une **permutation connectée**, c.-à-d. une permutation non vide dont aucun préfixe propre n'est une permutation [Comtet, 1972].

Exemple

Quelques permutations connectées :

1, 21, 231, 312, 321,
2341, 2413, 2431, 3142, 3241, 3412, 3421, 4123, 4132, 4213, 4231, 4312, 4321.

En résumé, nous avons

- **reformulé** l'opération (assez complexe) de mélange décalé en une opération (plus simple) de concaténation;

Exemple 1 : mélange de permutations

Générateurs minimaux de $(\mathbb{K} \langle \mathfrak{S} \rangle, \cdot)$; les éléments E_σ tels que

$$E_\sigma = E_\nu \cdot E_\pi \quad \text{implique} \quad \{\nu, \pi\} = \{\epsilon, \sigma\}.$$

Ce sont les E_σ tels que σ est une **permutation connectée**, c.-à-d. une permutation non vide dont aucun préfixe propre n'est une permutation [Comtet, 1972].

Exemple

Quelques permutations connectées :

1, 21, 231, 312, 321,
2341, 2413, 2431, 3142, 3241, 3412, 3421, 4123, 4132, 4213, 4231, 4312, 4321.

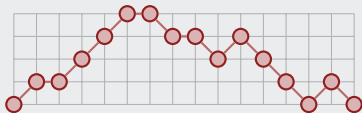
En résumé, nous avons

- ▶ **reformulé** l'opération (assez complexe) de mélange décalé en une opération (plus simple) de concaténation;
- ▶ mis en évidence une famille de permutations particulières pouvant être vues comme **blocs élémentaires** formant les permutations.

Exemple 2 : chemins de Motzkin

Rappel : un chemin de Motzkin est un chemin constitué de pas de $\left\{ \begin{array}{c} \square \circ \\ \circ \square \end{array} \right\}$, se terminant au niveau du départ et n'allant jamais en dessous.

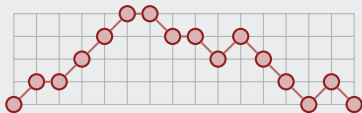
Exemple



Exemple 2 : chemins de Motzkin

Rappel : un chemin de Motzkin est un chemin constitué de pas de $\{\nearrow, \rightarrow, \searrow\}$, se terminant au niveau du départ et n'allant jamais en dessous.

Exemple



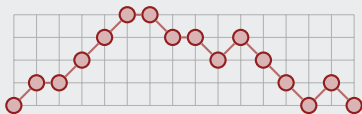
Par des raisonnements assez élémentaires, on obtient que la série génératrice $F(t)$ de ces objets en fonction de leur taille n vérifie

$$F(t) = 1 + tF(t) + t^2F(t)^2$$

Exemple 2 : chemins de Motzkin

Rappel : un chemin de Motzkin est un chemin constitué de pas de $\left\{ \begin{array}{c} \square \\ \circ \end{array} \right\}$, se terminant au niveau du départ et n'allant jamais en dessous.

Exemple



Par des raisonnements assez élémentaires, on obtient que la série génératrice $F(t)$ de ces objets en fonction de leur taille n vérifie

$$F(t) = 1 + tF(t) + t^2F(t)^2$$

et

$$F(t) = 1 + t + 2t^2 + 4t^3 + 9t^4 + 21t^5 + 51t^6 + 127t^7 + \dots$$

Exemple 2 : chemins de Motzkin

Au lieu de considérer cette série de $\mathbb{N}[[t]]$ dénombrant ces chemins, il est possible de travailler avec des **séries d'objets combinatoires**.

Exemple 2 : chemins de Motzkin

Au lieu de considérer cette série de $\mathbb{N}[[t]]$ dénombrant ces chemins, il est possible de travailler avec des **séries d'objets combinatoires**.

Soit la série

$$\mathbf{f} := \circ + \circ\circ + \circ\circ\circ + \begin{array}{c} \circ \\ \diagup \quad \diagdown \\ \circ \quad \circ \end{array} + \circ\circ\circ\circ + \begin{array}{c} \circ \\ \diagup \quad \diagdown \\ \circ \quad \circ \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \diagup \quad \diagdown \\ \circ \quad \circ \end{array} + \begin{array}{c} \circ \\ \diagup \quad \diagdown \\ \circ \quad \circ \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \diagup \quad \diagdown \\ \circ \quad \circ \end{array} + \begin{array}{c} \circ \quad \circ \\ \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \\ \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \end{array} + \cdots,$$

construite comme étant la **somme formelle** de tous les chemins de Motzkin.

Exemple 2 : chemins de Motzkin

Au lieu de considérer cette série de $\mathbb{N}[[t]]$ dénombrant ces chemins, il est possible de travailler avec des **séries d'objets combinatoires**.

Soit la série

$$\mathbf{f} := \circ + \circ\circ + \circ\circ\circ + \begin{array}{c} \circ \\ \diagup \quad \diagdown \\ \circ \quad \circ \end{array} + \circ\circ\circ\circ + \begin{array}{c} \circ \\ \diagup \quad \diagdown \\ \circ \quad \circ \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \diagup \quad \diagdown \\ \circ \quad \circ \end{array} + \begin{array}{c} \circ \\ \diagup \quad \diagdown \\ \circ \quad \circ \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \diagup \quad \diagdown \\ \circ \quad \circ \end{array} + \begin{array}{c} \circ \\ \diagup \quad \diagdown \\ \circ \quad \circ \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \diagup \quad \diagdown \\ \circ \quad \circ \end{array} + \cdots,$$

construite comme étant la **somme formelle** de tous les chemins de Motzkin.

Ici, $\mathbf{f}$ est une application

$$\mathbf{f} : \mathbf{Motz} \rightarrow \mathbb{N},$$

où $\mathbf{Motz}$ est l'ensemble des chemins de Motzkin, qui associe à chaque chemin de Motzkin son coefficient (1 ici) dans la série.

Exemple 2 : chemins de Motzkin

Soit $(\mathcal{M}, \cdot, \odot)$ le monoïde de tous les chemins (pas seulement de Motzkin) dans $\mathbb{N}^2$ où $\cdot$ est le produit consistant à concaténer les chemins.

Exemple 2 : chemins de Motzkin

Soit $(\mathcal{M}, \cdot, \odot)$ le monoïde de tous les chemins (pas seulement de Motzkin) dans $\mathbb{N}^2$ où $\cdot$ est le produit consistant à concaténer les chemins.

L'ensemble **Motz** des chemins de Motzkin forme un sous-monoïde de $\mathcal{M}$.

Exemple



Exemple 2 : chemins de Motzkin

Soit $(\mathcal{M}, \cdot, \circ)$ le monoïde de tous les chemins (pas seulement de Motzkin) dans $\mathbb{N}^2$ où $\cdot$ est le produit consistant à concaténer les chemins.

L'ensemble **Motz** des chemins de Motzkin forme un sous-monoïde de $\mathcal{M}$.

Exemple



Le produit $\cdot$ se prolonge sur les séries de chemins et permet d'écrire (après vérification de quelques détails techniques),

$$f = \circ + \circ\circ \cdot f + \begin{array}{c} \circ \\ \diagup \diagdown \end{array} \cdot f \cdot \begin{array}{c} \circ \\ \diagdown \diagup \end{array} \cdot f.$$

On retrouve ainsi (par l'évaluation $x \mapsto t^{|x|}$) l'expression quadratique précédente pour la série génératrice $F(t)$ des chemins de Motzkin.

Exemple 2 : chemins de Motzkin

On peut également dénombrer les chemins de Motzkin selon la statistique
« nombre de pas  ».

Exemple 2 : chemins de Motzkin

On peut également dénombrer les chemins de Motzkin selon la statistique « nombre de pas  ».

Soit en effet la série

$$g := \text{red circle} + q \text{red circle-red circle} + q^2 \text{red circle-red circle-red circle} + \text{red circle-red circle-red circle} + q^3 \text{red circle-red circle-red circle-red circle} + q \text{red circle-red circle-red circle-red circle} + q \text{red circle-red circle-red circle-red circle} + q \text{red circle-red circle-red circle-red circle} + \dots$$

où le coefficient de chaque chemin de Motzkin est q^k , où k est le nombre de pas  du chemin.

Exemple 2 : chemins de Motzkin

On peut également dénombrer les chemins de Motzkin selon la statistique « nombre de pas  ».

Soit en effet la série

$$g := \text{○} + q \text{○} \text{○} + q^2 \text{○} \text{○} \text{○} + \text{○} \text{○} \text{○} + q^3 \text{○} \text{○} \text{○} \text{○} + q \text{○} \text{○} \text{○} \text{○} + q \text{○} \text{○} \text{○} \text{○} + q \text{○} \text{○} \text{○} \text{○} + \dots$$

où le coefficient de chaque chemin de Motzkin est q^k , où k est le nombre de pas  du chemin.

Elle admet l'expression

$$g = \text{○} + q \text{○} \text{○} \cdot g + \text{○} \text{○} \cdot g \cdot \text{○} \text{○} \cdot g,$$

ce qui implique que la série génératrice des chemins de Motzkin comptés par taille et nombre de pas  vérifie

$$F(t, q) = 1 + tqF(t, q) + t^2 F(t, q)^2.$$

Plan

Aperçu des résultats

Idée directrice

Pour obtenir des informations sur un ensemble combinatoire $\mathcal{C}$, on cherche à définir des (bi)produits $\star$

$$\star : \underbrace{\mathcal{C} \otimes \cdots \otimes \mathcal{C}}_{\times k} \rightarrow \underbrace{\mathcal{C} \otimes \cdots \otimes \mathcal{C}}_{\times \ell}$$

sur $\mathcal{C}$, $\mathbb{K} \langle \mathcal{C} \rangle$ ou $\mathbb{K} \langle\langle \mathcal{C} \rangle\rangle$ (symbolisé par $\mathcal{C}$) puis à les étudier.

Idée directrice

Pour obtenir des informations sur un ensemble combinatoire $\mathcal{C}$, on cherche à définir des (bi)produits $\star$

$$\star : \underbrace{\mathcal{C} \otimes \cdots \otimes \mathcal{C}}_{\times k} \rightarrow \underbrace{\mathcal{C} \otimes \cdots \otimes \mathcal{C}}_{\times \ell}$$

sur $\mathcal{C}$, $\mathbb{K} \langle \mathcal{C} \rangle$ ou $\mathbb{K} \langle\langle \mathcal{C} \rangle\rangle$ (symbolisé par $\mathcal{C}$) puis à les étudier.

Dans la plupart des cas, on arrive à construire des structures algébriques familières, régies par des objets combinatoires.

Idée directrice

Pour obtenir des informations sur un ensemble combinatoire $\mathcal{C}$, on cherche à définir des (bi)produits $\star$

$$\star : \underbrace{\mathcal{C} \otimes \cdots \otimes \mathcal{C}}_{\times k} \rightarrow \underbrace{\mathcal{C} \otimes \cdots \otimes \mathcal{C}}_{\times \ell}$$

sur $\mathcal{C}$, $\mathbb{K} \langle \mathcal{C} \rangle$ ou $\mathbb{K} \langle\langle \mathcal{C} \rangle\rangle$ (symbolisé par $\mathcal{C}$) puis à les étudier.

Dans la plupart des cas, on arrive à construire des structures algébriques familières, régies par des objets combinatoires.

Dans ce travail, on rencontre plus particulièrement

- ▶ des opérades ;
- ▶ des bigèbres de Hopf ;
- ▶ des pros ;

Idée directrice

Pour obtenir des informations sur un ensemble combinatoire $\mathcal{C}$, on cherche à définir des (bi)produits $\star$

$$\star : \underbrace{\mathcal{C} \otimes \cdots \otimes \mathcal{C}}_{\times k} \rightarrow \underbrace{\mathcal{C} \otimes \cdots \otimes \mathcal{C}}_{\times \ell}$$

sur $\mathcal{C}$, $\mathbb{K}\langle\mathcal{C}\rangle$ ou $\mathbb{K}\langle\langle\mathcal{C}\rangle\rangle$ (symbolisé par $\mathcal{C}$) puis à les étudier.

Dans la plupart des cas, on arrive à construire des structures algébriques familières, régies par des objets combinatoires.

Dans ce travail, on rencontre plus particulièrement

- ▶ des opérades;
- ▶ des bigèbres de Hopf;
- ▶ des pros;

mais aussi des algèbres dendriformes [Loday, 2001], des bigèbres bidendriformes [Foissy, 2007], des algèbres pré-Lie [Vinberg, 1963] [Gerstenhaber, 1963], *etc.*

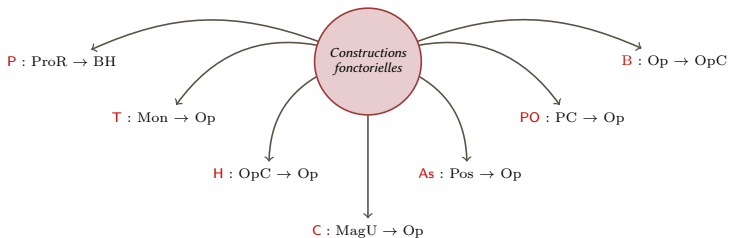
Synthèse des travaux

*Constructions
fonctorielles*

*Constructions
algébriques*

*Combi. énum.
et algo.*

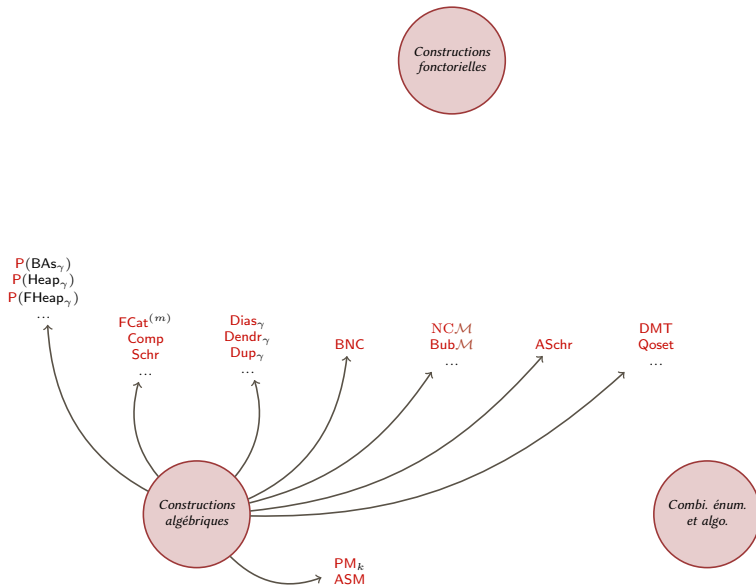
Synthèse des travaux



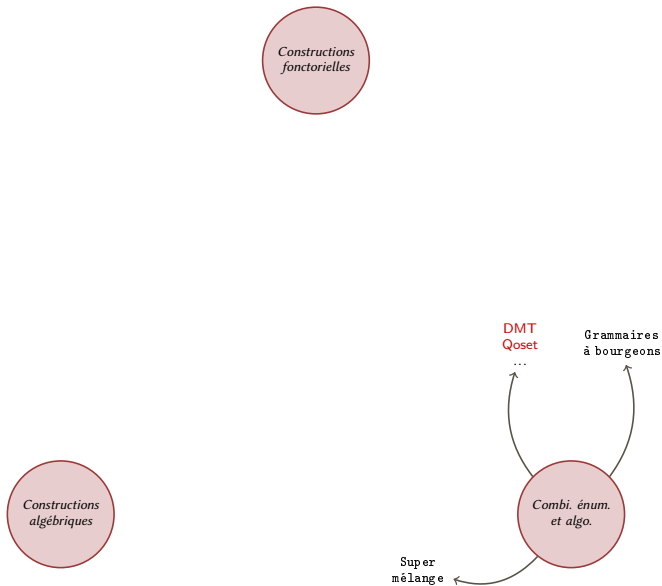
*Constructions
algébriques*

*Combi. énum.
et algo.*

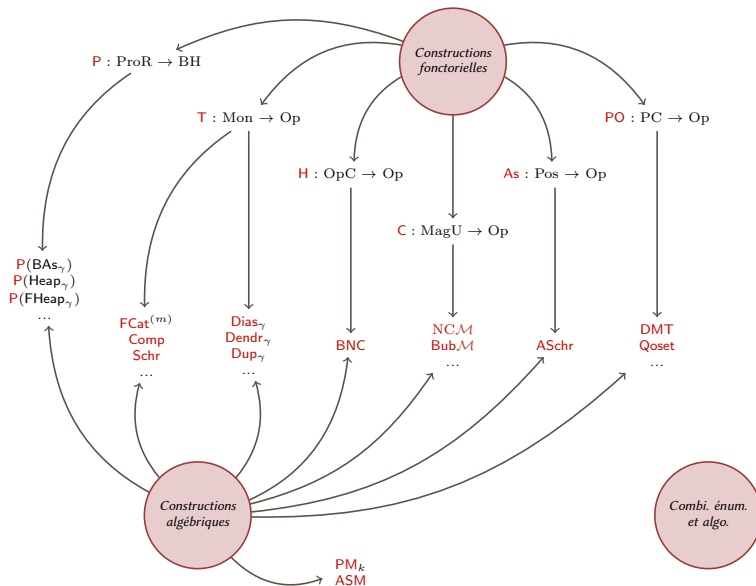
Synthèse des travaux



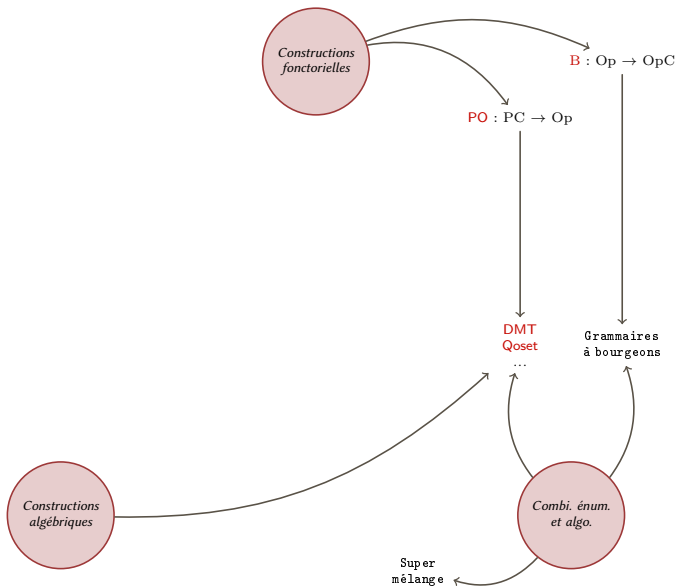
Synthèse des travaux



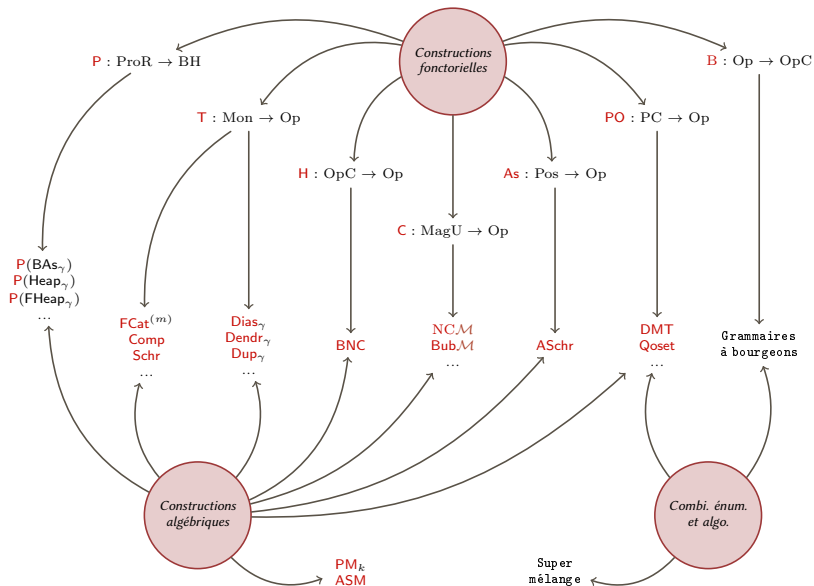
Synthèse des travaux



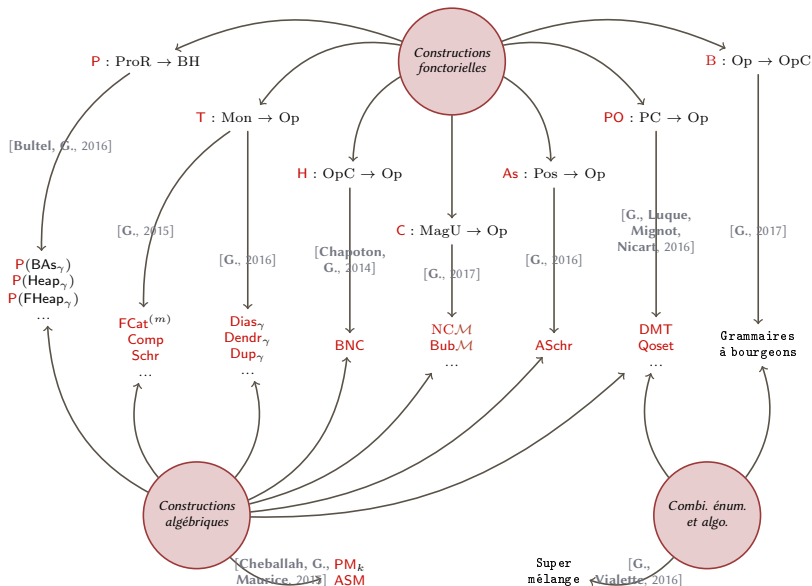
Synthèse des travaux



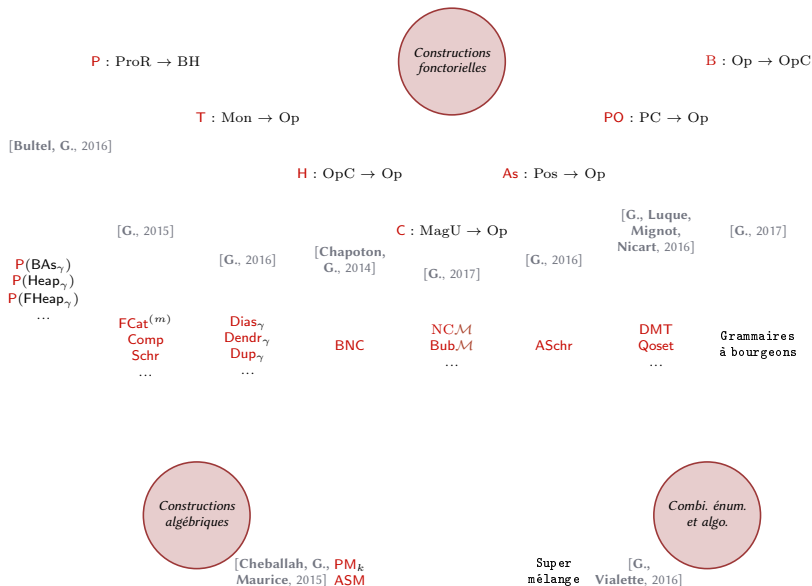
Synthèse des travaux



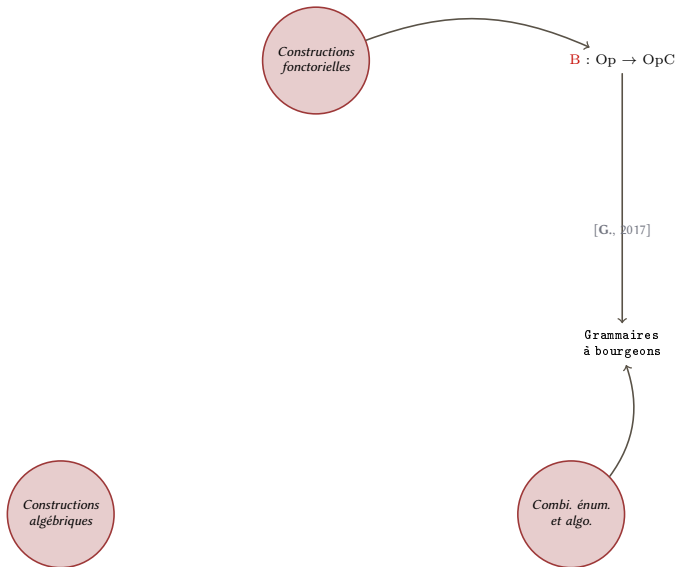
Synthèse des travaux



Synthèse des travaux



Synthèse des travaux



Plan

Systèmes de génération à bourgeons

Grammaires de mots

Soit A un alphabet fini partitionné en deux parts

- ▶ V , un ensemble de **variables**;
- ▶ T , un ensemble de **symboles terminaux**.

Grammaires de mots

Soit A un alphabet fini partitionné en deux parts

- ▶ V , un ensemble de **variables**;
- ▶ T , un ensemble de **symboles terminaux**.

Une **règle de production** est un élément (x, u) de $V \times A^*$.

Grammaires de mots

Soit A un alphabet fini partitionné en deux parts

- ▶ V , un ensemble de **variables**;
- ▶ T , un ensemble de **symboles terminaux**.

Une **règle de production** est un élément (x, u) de $V \times A^*$.

Un ensemble P de règles de production se comporte comme une règle de réécriture sur A^* . Si $v, w \in A^*$ et $(x, u) \in P$,

$$v \ x \ w \rightarrow v \ u \ w.$$

Grammaires de mots

Soit A un alphabet fini partitionné en deux parts

- ▶ V , un ensemble de **variables**;
- ▶ T , un ensemble de **symboles terminaux**.

Une **règle de production** est un élément (x, u) de $V \times A^*$.

Un ensemble P de règles de production se comporte comme une règle de réécriture sur A^* . Si $v, w \in A^*$ et $(x, u) \in P$,

$$v \ x \ w \rightarrow v \ u \ w.$$

La clôture réflexive et transitive de $\rightarrow$ est la **relation de dérivation**.

Grammaires de mots

Soit A un alphabet fini partitionné en deux parts

- ▶ V , un ensemble de **variables**;
- ▶ T , un ensemble de **symboles terminaux**.

Une **règle de production** est un élément (x, u) de $V \times A^*$.

Un ensemble P de règles de production se comporte comme une règle de réécriture sur A^* . Si $v, w \in A^*$ et $(x, u) \in P$,

$$v \ x \ w \rightarrow v \ u \ w.$$

La clôture réflexive et transitive de $\rightarrow$ est la **relation de dérivation**.

Exemple

Soient $V := \{x, y\}$, $T := \{a, b, c\}$ et $P := \{(x, b), (x, xay), (y, ac)\}$.

Comme

$$bxx \rightarrow bxayx \rightarrow bbayx \rightarrow bbaacx,$$

le mot **bbaacx** est dérivable depuis **bxx**.

Grammaires de mots

Une **grammaire non contextuelle** G est un quadruplet (V, T, P, s) où

- ▶ V est un ensemble fini de **variables**;
- ▶ T est un ensemble fini de **symboles terminaux**;
- ▶ P est un ensemble de **règles de production**;
- ▶ s est la **variable de départ**.

Grammaires de mots

Une **grammaire non contextuelle** G est un quadruplet (V, T, P, s) où

- ▶ V est un ensemble fini de **variables**;
- ▶ T est un ensemble fini de **symboles terminaux**;
- ▶ P est un ensemble de **règles de production**;
- ▶ s est la **variable de départ**.

Un mot $u \in (V \sqcup T)^*$ est **engendré** par G si

$$s \rightarrow \dots \rightarrow u$$

et u ne possède aucune occurrence de variable ($u \in T^*$).

Grammaires de mots

Une **grammaire non contextuelle** G est un quadruplet (V, T, P, s) où

- ▶ V est un ensemble fini de **variables**;
- ▶ T est un ensemble fini de **symboles terminaux**;
- ▶ P est un ensemble de **règles de production**;
- ▶ s est la **variable de départ**.

Un mot $u \in (V \sqcup T)^*$ est **engendré** par G si

$$s \rightarrow \dots \rightarrow u$$

et u ne possède aucune occurrence de variable ($u \in T^*$).

Exemple

Soit G la grammaire non contextuelle où $V := \{x, y\}$, $T := \{a, b, c\}$,
 $P := \{(x, b), (x, xay), (y, ac)\}$ et $s := x$. Comme

$$x \rightarrow xay \rightarrow bay \rightarrow baac,$$

le mot **baac** est engendré par G .

Objectifs

Objectifs :

- ▶ développer des grammaires pouvant engendrer toutes sortes d'objets combinatoires ;

Objectifs

Objectifs :

- ▶ développer des grammaires pouvant engendrer toutes sortes d'objets combinatoires ;
- ▶ on souhaite retrouver les cas des grammaires de mots et grammaires d'arbres comme cas particuliers de la construction ;

Objectifs

Objectifs :

- ▶ développer des grammaires pouvant engendrer toutes sortes d'objets combinatoires ;
- ▶ on souhaite retrouver les cas des grammaires de mots et grammaires d'arbres comme cas particuliers de la construction ;
- ▶ on espère disposer d'une boîte à outils pour extraire une expression pour la série génératrice des objets engendrés par la grammaire.

Objectifs

Objectifs :

- ▶ développer des grammaires pouvant engendrer toutes sortes d'objets combinatoires ;
- ▶ on souhaite retrouver les cas des grammaires de mots et grammaires d'arbres comme cas particuliers de la construction ;
- ▶ on espère disposer d'une boîte à outils pour extraire une expression pour la série génératrice des objets engendrés par la grammaire.

Clé

Utiliser les opérades colorées.

Objectifs

Objectifs :

- ▶ développer des grammaires pouvant engendrer toutes sortes d'objets combinatoires ;
- ▶ on souhaite retrouver les cas des grammaires de mots et grammaires d'arbres comme cas particuliers de la construction ;
- ▶ on espère disposer d'une boîte à outils pour extraire une expression pour la série génératrice des objets engendrés par la grammaire.

Clé

Utiliser les **opérades colorées**.

- ▶ Les couleurs jouent le rôle des variables et symboles terminaux.

Objectifs

Objectifs :

- ▶ développer des grammaires pouvant engendrer toutes sortes d'objets combinatoires ;
- ▶ on souhaite retrouver les cas des grammaires de mots et grammaires d'arbres comme cas particuliers de la construction ;
- ▶ on espère disposer d'une boîte à outils pour extraire une expression pour la série génératrice des objets engendrés par la grammaire.

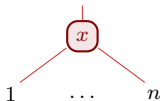
Clé

Utiliser les **opérades colorées**.

- ▶ Les couleurs jouent le rôle des variables et symboles terminaux.
- ▶ Les séries sur opérades colorées et les produits naturels qu'il est possible de définir rendent le dénombrement accessible.

Opérateurs

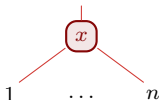
Un **opérateur** est une entité ayant $n \geq 1$ entrées et une sortie.



Son **arité** est son nombre n d'entrées.

Opérateurs

Un **opérateur** est une entité ayant $n \geq 1$ entrées et une sortie.



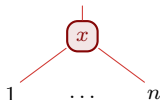
Son **arité** est son nombre n d'entrées.

Composer deux opérateurs x et y consiste à

1. choisir une entrée de x identifiée par sa position i ;
2. greffer la sortie de y sur cette entrée.

Opérateurs

Un **opérateur** est une entité ayant $n \geq 1$ entrées et une sortie.

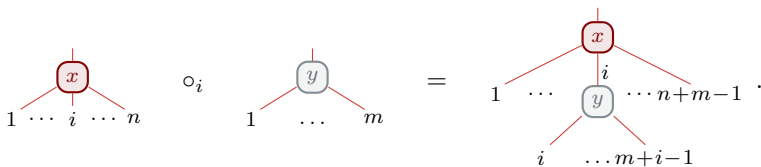


Son **arité** est son nombre n d'entrées.

Composer deux opérateurs x et y consiste à

1. choisir une entrée de x identifiée par sa position i ;
2. greffer la sortie de y sur cette entrée.

Ceci produit un nouvel opérateur $x \circ_i y$ d'arité $n + m - 1$:



Opérades

Les opérades sont des structures algébriques formalisant la notion d'opérateur (munis de leur composition).

Opérades

Les opérades sont des structures algébriques formalisant la notion d'opérateur (munis de leur composition).

Une **opérade** (non symétrique) est un triplet $(\mathcal{O}, \circ_i, \mathbb{1})$ où

1. $\mathcal{O}$ est un **ensemble gradué**

$$\mathcal{O} := \bigsqcup_{n \geq 1} \mathcal{O}(n) ;$$

Opérades

Les opérades sont des structures algébriques formalisant la notion d'opérateur (munis de leur composition).

Une **opérade** (non symétrique) est un triplet $(\mathcal{O}, \circ_i, \mathbb{1})$ où

1. $\mathcal{O}$ est un **ensemble gradué**

$$\mathcal{O} := \bigsqcup_{n \geq 1} \mathcal{O}(n) ;$$

2. $\circ_i$ est une application de **composition partielle**,

$$\circ_i : \mathcal{O}(n) \times \mathcal{O}(m) \rightarrow \mathcal{O}(n + m - 1), \quad n, m \geq 1, i \in [n] ;$$

Opérades

Les opérades sont des structures algébriques formalisant la notion d'opérateur (munis de leur composition).

Une **opérade** (non symétrique) est un triplet $(\mathcal{O}, \circ_i, \mathbb{1})$ où

1. $\mathcal{O}$ est un **ensemble gradué**

$$\mathcal{O} := \bigsqcup_{n \geq 1} \mathcal{O}(n) ;$$

2. $\circ_i$ est une application de **composition partielle**,

$$\circ_i : \mathcal{O}(n) \times \mathcal{O}(m) \rightarrow \mathcal{O}(n + m - 1), \quad n, m \geq 1, i \in [n] ;$$

3. $\mathbb{1}$ est un élément de $\mathcal{O}(1)$, appelé **unité**.

Opérades

Les opérades sont des structures algébriques formalisant la notion d'opérateur (munis de leur composition).

Une **opérade** (non symétrique) est un triplet $(\mathcal{O}, \circ_i, \mathbb{1})$ où

1. $\mathcal{O}$ est un **ensemble gradué**

$$\mathcal{O} := \bigsqcup_{n \geq 1} \mathcal{O}(n) ;$$

2. $\circ_i$ est une application de **composition partielle**,

$$\circ_i : \mathcal{O}(n) \times \mathcal{O}(m) \rightarrow \mathcal{O}(n + m - 1), \quad n, m \geq 1, i \in [n] ;$$

3. $\mathbb{1}$ est un élément de $\mathcal{O}(1)$, appelé **unité**.

Ces objets doivent vérifier des axiomes.

Axiomes des opérades

Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$

$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$

$$i \in [n], j \in [m]$$

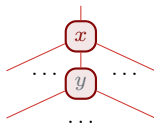
Axiomes des opérades

Associativité :

$$(x \circ_i y)$$

$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$

$$i \in [n], j \in [m]$$



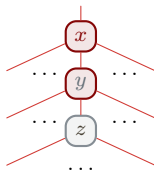
Axiomes des opérades

Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z$$

$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$

$$i \in [n], j \in [m]$$



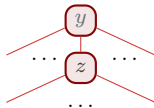
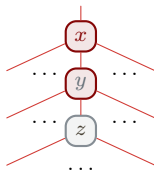
Axiomes des opérades

Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z \quad (y \circ_j z)$$

$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$

$$i \in [n], j \in [m]$$



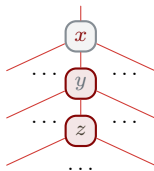
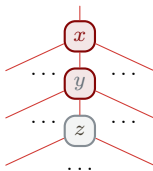
Axiomes des opérades

Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$

$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$

$$i \in [n], j \in [m]$$



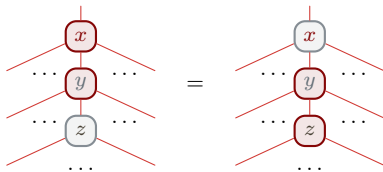
Axiomes des opérades

Associativité :

$$(\mathbf{x} \circ_i \mathbf{y}) \circ_{i+j-1} \mathbf{z} = \mathbf{x} \circ_i (\mathbf{y} \circ_j \mathbf{z})$$

$$\mathbf{x} \in \mathcal{O}(n), \mathbf{y} \in \mathcal{O}(m), \mathbf{z} \in \mathcal{O}$$

$$i \in [n], j \in [m]$$



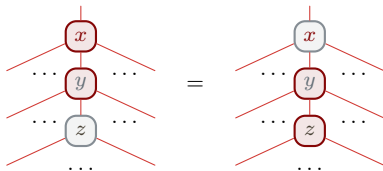
Axiomes des opérades

Associativité :

$$(\mathbf{x} \circ_i \mathbf{y}) \circ_{i+j-1} \mathbf{z} = \mathbf{x} \circ_i (\mathbf{y} \circ_j \mathbf{z})$$

$$\mathbf{x} \in \mathcal{O}(n), \mathbf{y} \in \mathcal{O}(m), \mathbf{z} \in \mathcal{O}$$

$$i \in [n], j \in [m]$$



Commutativité :

$$(\mathbf{x} \circ_i \mathbf{y}) \circ_{j+m-1} \mathbf{z} = (\mathbf{x} \circ_j \mathbf{z}) \circ_i \mathbf{y}$$

$$\mathbf{x} \in \mathcal{O}(n), \mathbf{y} \in \mathcal{O}(m), \mathbf{z} \in \mathcal{O}$$

$$1 \leq i < j \leq n$$

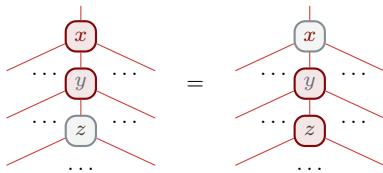
Axiomes des opérades

Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$

$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$

$$i \in [n], j \in [m]$$

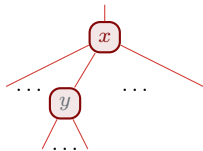


Commutativité :

$$(x \circ_i y)$$

$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$

$$1 \leq i < j \leq n$$



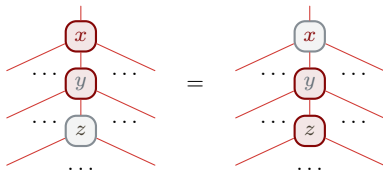
Axiomes des opérades

Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$

$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$

$$i \in [n], j \in [m]$$

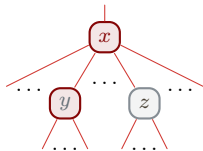


Commutativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{j+m-1} z$$

$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$

$$1 \leq i < j \leq n$$



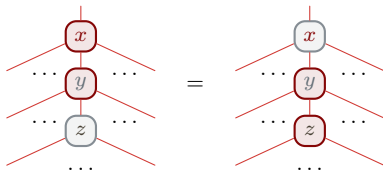
Axiomes des opérades

Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$

$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$

$$i \in [n], j \in [m]$$

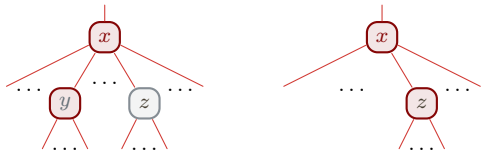


Commutativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{j+m-1} z = (x \circ_j z)$$

$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$

$$1 \leq i < j \leq n$$



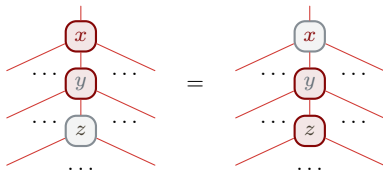
Axiomes des opérades

Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$

$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$

$$i \in [n], j \in [m]$$

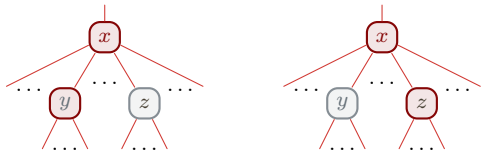


Commutativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{j+m-1} z = (x \circ_j z) \circ_i y$$

$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$

$$1 \leq i < j \leq n$$



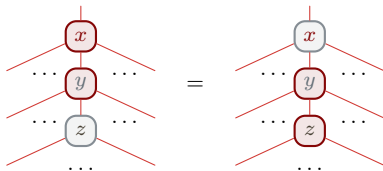
Axiomes des opérades

Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$

$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$

$$i \in [n], j \in [m]$$

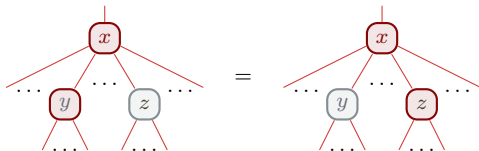


Commutativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{j+m-1} z = (x \circ_j z) \circ_i y$$

$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$

$$1 \leq i < j \leq n$$



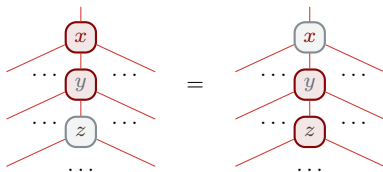
Axiomes des opérades

Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$

$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$

$$i \in [n], j \in [m]$$

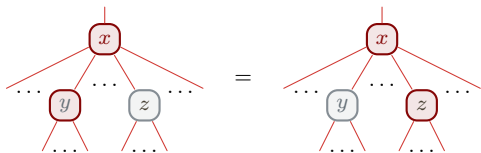


Commutativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{j+m-1} z = (x \circ_j z) \circ_i y$$

$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$

$$1 \leq i < j \leq n$$



Unitalité :

$$1 \circ_1 x = x = x \circ_i 1$$

$$x \in \mathcal{O}(n)$$

$$i \in [n]$$

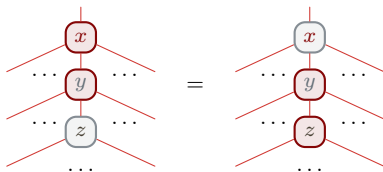
Axiomes des opérades

Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$

$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$

$$i \in [n], j \in [m]$$

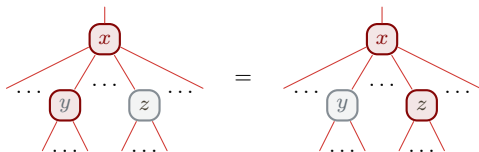


Commutativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{j+m-1} z = (x \circ_j z) \circ_i y$$

$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$

$$1 \leq i < j \leq n$$

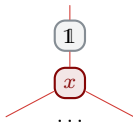


Unitalité :

$$1 \circ_1 x$$

$$x \in \mathcal{O}(n)$$

$$i \in [n]$$



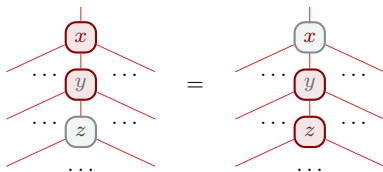
Axiomes des opérades

Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$

$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$

$$i \in [n], j \in [m]$$

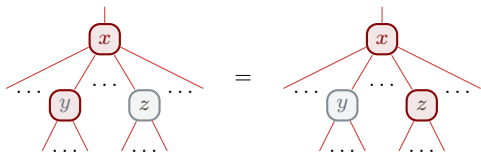


Commutativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{j+m-1} z = (x \circ_j z) \circ_i y$$

$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$

$$1 \leq i < j \leq n$$



Unitalité :

$$1 \circ_1 x = x$$

$$x \in \mathcal{O}(n)$$

$$i \in [n]$$



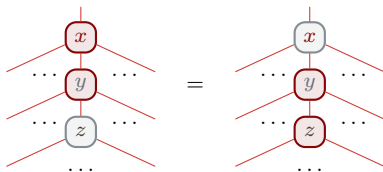
Axiomes des opérades

Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$

$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$

$$i \in [n], j \in [m]$$

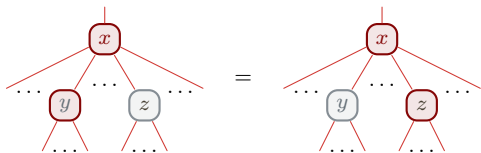


Commutativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{j+m-1} z = (x \circ_j z) \circ_i y$$

$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$

$$1 \leq i < j \leq n$$

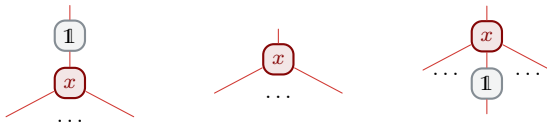


Unitalité :

$$1 \circ_1 x = x = x \circ_i 1$$

$$x \in \mathcal{O}(n)$$

$$i \in [n]$$



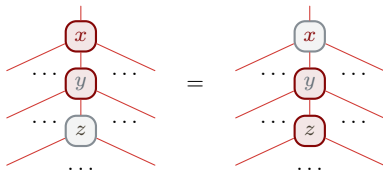
Axiomes des opérades

Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$

$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$

$$i \in [n], j \in [m]$$

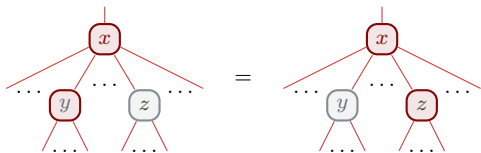


Commutativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{j+m-1} z = (x \circ_j z) \circ_i y$$

$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$

$$1 \leq i < j \leq n$$

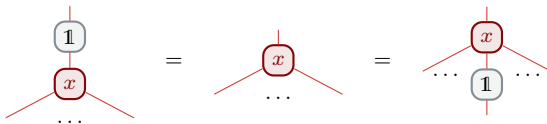


Unitalité :

$$1 \circ_1 x = x = x \circ_i 1$$

$$x \in \mathcal{O}(n)$$

$$i \in [n]$$



Opérades libres

Soit $\mathfrak{G} := \sqcup_{n \geq 1} \mathfrak{G}(n)$ un ensemble gradué.

Exemple

Soit $\mathfrak{G} := \mathfrak{G}(2) \sqcup \mathfrak{G}(3)$ avec $\mathfrak{G}(2) := \{a, b\}$ et $\mathfrak{G}(3) := \{c\}$.

Opérades libres

Soit $\mathfrak{G} := \sqcup_{n \geq 1} \mathfrak{G}(n)$ un ensemble gradué.

L'opérade libre sur $\mathfrak{G}$ est l'opérade $\mathbf{FO}(\mathfrak{G})$ telle que :

- $\mathbf{FO}(\mathfrak{G})(n)$ est l'ensemble des arbres syntaxiques sur $\mathfrak{G}$ avec n feuilles;

Exemple

Soit $\mathfrak{G} := \mathfrak{G}(2) \sqcup \mathfrak{G}(3)$ avec $\mathfrak{G}(2) := \{a, b\}$ et $\mathfrak{G}(3) := \{c\}$.

Les arbres syntaxiques de $\mathbf{FO}(\mathfrak{G})(3)$ sont



Opérades libres

Soit $\mathfrak{G} := \sqcup_{n \geq 1} \mathfrak{G}(n)$ un ensemble gradué.

L'opérade libre sur $\mathfrak{G}$ est l'opérade $\mathbf{FO}(\mathfrak{G})$ telle que :

- $\mathbf{FO}(\mathfrak{G})(n)$ est l'ensemble des arbres syntaxiques sur $\mathfrak{G}$ avec n feuilles;
- la composition partielle est une greffe d'arbres;

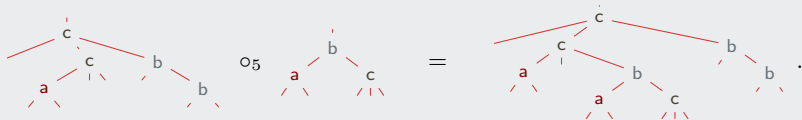
Exemple

Soit $\mathfrak{G} := \mathfrak{G}(2) \sqcup \mathfrak{G}(3)$ avec $\mathfrak{G}(2) := \{a, b\}$ et $\mathfrak{G}(3) := \{c\}$.

Les arbres syntaxiques de $\mathbf{FO}(\mathfrak{G})(3)$ sont



Voici une composition partielle dans $\mathbf{FO}(\mathfrak{G})$:



Opérades libres

Soit $\mathfrak{G} := \sqcup_{n \geq 1} \mathfrak{G}(n)$ un ensemble gradué.

L'opérade libre sur $\mathfrak{G}$ est l'opérade $\mathbf{FO}(\mathfrak{G})$ telle que :

- ▶ $\mathbf{FO}(\mathfrak{G})(n)$ est l'ensemble des arbres syntaxiques sur $\mathfrak{G}$ avec n feuilles;
- ▶ la composition partielle est une greffe d'arbres;
- ▶ l'unité est l'arbre $\mid$ réduit à une feuille.

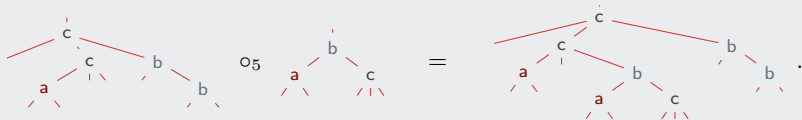
Exemple

Soit $\mathfrak{G} := \mathfrak{G}(2) \sqcup \mathfrak{G}(3)$ avec $\mathfrak{G}(2) := \{a, b\}$ et $\mathfrak{G}(3) := \{c\}$.

Les arbres syntaxiques de $\mathbf{FO}(\mathfrak{G})(3)$ sont

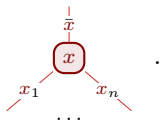


Voici une composition partielle dans $\mathbf{FO}(\mathfrak{G})$:



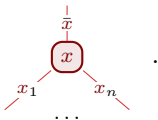
Opérades colorées

Dans une **opérade colorée**, tout élément x d'arité n possède une couleur de sortie $\bar{x}$ et des couleurs d'entrée $x_i, i \in [n]$, prises dans un ensemble $\mathfrak{C}$ de **couleurs** :

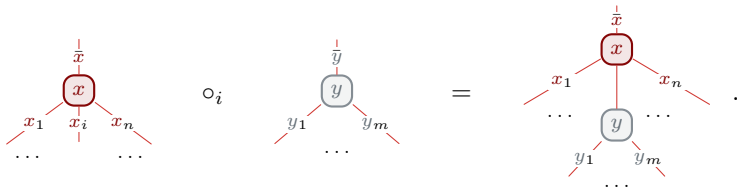


Opérades colorées

Dans une **opérade colorée**, tout élément x d'arité n possède une couleur de sortie $\bar{x}$ et des couleurs d'entrée $x_i, i \in [n]$, prises dans un ensemble $\mathfrak{C}$ de couleurs :

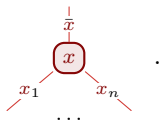


La composition partielle est partiellement définie dans une opérade colorée : $x \circ_i y$ est définie ssi $\bar{y} = x_i$:

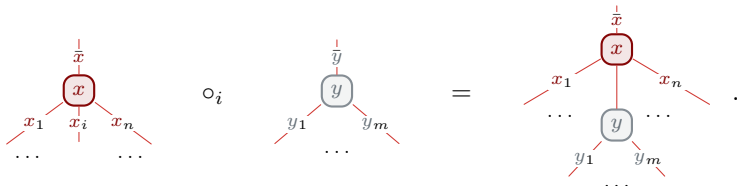


Opérades colorées

Dans une **opérade colorée**, tout élément x d'arité n possède une couleur de sortie $\bar{x}$ et des couleurs d'entrée $x_i, i \in [n]$, prises dans un ensemble $\mathfrak{C}$ de couleurs :



La composition partielle est partiellement définie dans une opérade colorée : $x \circ_i y$ est définie ssi $\bar{y} = x_i$:



Une opérade colorée possède une unité $\mathbb{1}_c$ pour chaque couleur $c \in \mathfrak{C}$.

Opérades à bourgeons

Soient $\mathcal{O}$ une opérade non colorée et $\mathfrak{C}$ un ensemble fini.

L'opérade à bourgeons de $\mathcal{O}$ est l'opérade colorée $B_{\mathfrak{C}}(\mathcal{O})$ telle que

$$B_{\mathfrak{C}}(\mathcal{O})(n) := \mathfrak{C} \times \mathcal{O}(n) \times \mathfrak{C}^n, \quad n \geq 1,$$

telle que

Opérades à bourgeons

Soient $\mathcal{O}$ une opérade non colorée et $\mathfrak{C}$ un ensemble fini.

L'opérade à bourgeons de $\mathcal{O}$ est l'opérade colorée $B_{\mathfrak{C}}(\mathcal{O})$ telle que

$$B_{\mathfrak{C}}(\mathcal{O})(n) := \mathfrak{C} \times \mathcal{O}(n) \times \mathfrak{C}^n, \quad n \geq 1,$$

telle que

- ▶ si $(\mathbf{a}, x, u)$ est un élément de $B_{\mathfrak{C}}(\mathcal{O})$, sa couleur de sortie est $\mathbf{a}$ et sa i^{e} couleur d'entrée est u_i ;

Opérades à bourgeons

Soient $\mathcal{O}$ une opérade non colorée et $\mathfrak{C}$ un ensemble fini.

L'opérade à bourgeons de $\mathcal{O}$ est l'opérade colorée $B_{\mathfrak{C}}(\mathcal{O})$ telle que

$$B_{\mathfrak{C}}(\mathcal{O})(n) := \mathfrak{C} \times \mathcal{O}(n) \times \mathfrak{C}^n, \quad n \geq 1,$$

telle que

- ▶ si $(\mathbf{a}, x, u)$ est un élément de $B_{\mathfrak{C}}(\mathcal{O})$, sa couleur de sortie est $\mathbf{a}$ et sa i^{e} couleur d'entrée est u_i ;
- ▶ si $(\mathbf{a}, x, u)$ et $(\mathbf{b}, y, v)$ sont deux éléments de $B_{\mathfrak{C}}(\mathcal{O})$ tels que $u_i = \mathbf{b}$,

$$(\mathbf{a}, x, u) \circ_i (\mathbf{b}, y, v) := (\mathbf{a}, x \circ_i y, u \leftarrowtail_i v),$$

où $u \leftarrowtail_i v$ est le mot obtenu en remplaçant la i^{e} lettre de u par v .

Opérades à bourgeons

Soient $\mathcal{O}$ une opérade non colorée et $\mathfrak{C}$ un ensemble fini.

L'opérade à bourgeons de $\mathcal{O}$ est l'opérade colorée $B_{\mathfrak{C}}(\mathcal{O})$ telle que

$$B_{\mathfrak{C}}(\mathcal{O})(n) := \mathfrak{C} \times \mathcal{O}(n) \times \mathfrak{C}^n, \quad n \geq 1,$$

telle que

- ▶ si (a, x, u) est un élément de $B_{\mathfrak{C}}(\mathcal{O})$, sa couleur de sortie est a et sa i^{e} couleur d'entrée est u_i ;
- ▶ si (a, x, u) et (b, y, v) sont deux éléments de $B_{\mathfrak{C}}(\mathcal{O})$ tels que $u_i = b$,

$$(a, x, u) \circ_i (b, y, v) := (a, x \circ_i y, u \leftarrowtail_i v),$$

où $u \leftarrowtail_i v$ est le mot obtenu en remplaçant la i^{e} lettre de u par v .

Proposition [G., 2017]

La construction $\mathcal{O} \mapsto B_{\mathfrak{C}}(\mathcal{O})$ est un foncteur de la catégorie des opérades non colorées vers la catégorie des opérades $\mathfrak{C}$ -colorées.

L'opérade à bourgeons de l'opérade associative

L'opérade associative **As** est définie par

► **As**(n) := $\{\star_n\}$ pour tout $n \geq 1$;

► $\star_n \circ_i \star_m := \star_{n+m-1}$.

L'opérade à bourgeons de l'opérade associative

L'opérade associative $\mathbf{As}$ est définie par

► $\mathbf{As}(n) := \{\star_n\}$ pour tout $n \geq 1$;

► $\star_n \circ_i \star_m := \star_{n+m-1}$.

Pour tout ensemble $\mathfrak{C}$ de couleurs, les éléments de $\mathbf{B}_{\mathfrak{C}}(\mathbf{As})$ sont des triplets

$$(\mathbf{a}, \star_n, u_1 \dots u_n)$$

avec $\mathbf{a}, u_1, \dots, u_n \in \mathfrak{C}$.

L'opérade à bourgeons de l'opérade associative

L'opérade associative $\mathbf{As}$ est définie par

► $\mathbf{As}(n) := \{\star_n\}$ pour tout $n \geq 1$;

► $\star_n \circ_i \star_m := \star_{n+m-1}$.

Pour tout ensemble $\mathfrak{C}$ de couleurs, les éléments de $\mathbf{B}_{\mathfrak{C}}(\mathbf{As})$ sont des triplets

$$(\mathbf{a}, \star_n, u_1 \dots u_n)$$

avec $\mathbf{a}, u_1, \dots, u_n \in \mathfrak{C}$.

On peut ainsi voir $\mathbf{B}_{\mathfrak{C}}(\mathbf{As})$ comme une opérade colorée de mots sur $\mathfrak{C}$ dont la composition partielle est une substitution.

L'opérade à bourgeons de l'opérade associative

L'opérade associative $\mathbf{As}$ est définie par

► $\mathbf{As}(n) := \{\star_n\}$ pour tout $n \geq 1$;

► $\star_n \circ_i \star_m := \star_{n+m-1}$.

Pour tout ensemble $\mathfrak{C}$ de couleurs, les éléments de $\mathbf{B}_{\mathfrak{C}}(\mathbf{As})$ sont des triplets

$$(\mathbf{a}, \star_n, u_1 \dots u_n)$$

avec $\mathbf{a}, u_1, \dots, u_n \in \mathfrak{C}$.

On peut ainsi voir $\mathbf{B}_{\mathfrak{C}}(\mathbf{As})$ comme une opérade colorée de mots sur $\mathfrak{C}$ dont la composition partielle est une substitution.

Exemple

Dans $\mathbf{B}_{\{1,2,3\}}(\mathbf{As})$,

$$(2, \star_4, 3112) \circ_2 (1, \star_3, 233) = (2, \star_6, 323312).$$

Grammaires à bourgeons

Une **grammaire à bourgeons** $\mathcal{B}$ est un quintuplet $(\mathcal{O}, \mathfrak{C}, \mathfrak{R}, I, T)$ où

Grammaires à bourgeons

Une **grammaire à bourgeons** $\mathcal{B}$ est un quintuplet $(\mathcal{O}, \mathfrak{C}, \mathfrak{R}, I, T)$ où

- ▶ $\mathcal{O}$ est une opérade non colorée;

Grammaires à bourgeons

Une **grammaire à bourgeons** $\mathcal{B}$ est un quintuplet $(\mathcal{O}, \mathfrak{C}, \mathfrak{R}, I, T)$ où

- ▶ $\mathcal{O}$ est une opérade non colorée;
- ▶ $\mathfrak{C}$ est un ensemble fini de **couleurs**;

Grammaires à bourgeons

Une **grammaire à bourgeons** $\mathcal{B}$ est un quintuplet $(\mathcal{O}, \mathfrak{C}, \mathfrak{R}, I, T)$ où

- ▶ $\mathcal{O}$ est une opérade non colorée;
- ▶ $\mathfrak{C}$ est un ensemble fini de **couleurs**;
- ▶ $\mathfrak{R}$ est un sous-ensemble fini de $\mathbf{B}_{\mathfrak{C}}(\mathcal{O})$ de **règles de production**;

Grammaires à bourgeons

Une **grammaire à bourgeons** $\mathcal{B}$ est un quintuplet $(\mathcal{O}, \mathfrak{C}, \mathfrak{R}, I, T)$ où

- ▶ $\mathcal{O}$ est une opérade non colorée;
- ▶ $\mathfrak{C}$ est un ensemble fini de **couleurs**;
- ▶ $\mathfrak{R}$ est un sous-ensemble fini de $B_{\mathfrak{C}}(\mathcal{O})$ de **règles de production**;
- ▶ I est un sous-ensemble de **couleurs initiales** de $\mathfrak{C}$;

Grammaires à bourgeons

Une **grammaire à bourgeons** $\mathcal{B}$ est un quintuplet $(\mathcal{O}, \mathfrak{C}, \mathfrak{R}, I, T)$ où

- ▶ $\mathcal{O}$ est une opérade non colorée;
- ▶ $\mathfrak{C}$ est un ensemble fini de **couleurs**;
- ▶ $\mathfrak{R}$ est un sous-ensemble fini de $B_{\mathfrak{C}}(\mathcal{O})$ de **règles de production**;
- ▶ I est un sous-ensemble de **couleurs initiales** de $\mathfrak{C}$;
- ▶ T est un sous-ensemble de **couleurs terminales** de $\mathfrak{C}$.

Grammaires à bourgeons

Une **grammaire à bourgeons** $\mathcal{B}$ est un quintuplet $(\mathcal{O}, \mathfrak{C}, \mathfrak{R}, I, T)$ où

- ▶ $\mathcal{O}$ est une opérade non colorée;
- ▶ $\mathfrak{C}$ est un ensemble fini de **couleurs**;
- ▶ $\mathfrak{R}$ est un sous-ensemble fini de $B_{\mathfrak{C}}(\mathcal{O})$ de **règles de production**;
- ▶ I est un sous-ensemble de **couleurs initiales** de $\mathfrak{C}$;
- ▶ T est un sous-ensemble de **couleurs terminales** de $\mathfrak{C}$.

Les grammaires à bourgeons servent à spécifier des ensembles d'éléments de $B_{\mathfrak{C}}(\mathcal{O})$.

Langages

Un ensemble $\mathfrak{R}$ de règles de production décrit une règle de réécriture sur $B_{\mathfrak{C}}(\mathcal{O})$: pour tous $x, x' \in B_{\mathfrak{C}}(\mathcal{O})$, on pose

$$x \rightarrow x'$$

à condition qu'il existe $i \in \mathbb{N}$ et $r \in \mathfrak{R}$ tels que $x' = x \circ_i r$.

Langages

Un ensemble $\mathfrak{R}$ de règles de production décrit une règle de réécriture sur $B_{\mathfrak{C}}(\mathcal{O})$: pour tous $x, x' \in B_{\mathfrak{C}}(\mathcal{O})$, on pose

$$x \rightarrow x'$$

à condition qu'il existe $i \in \mathbb{N}$ et $r \in \mathfrak{R}$ tels que $x' = x \circ_i r$.

La clôture réflexive et transitive de $\rightarrow$ est la **relation de dérivation**.

Langages

Un ensemble $\mathfrak{R}$ de règles de production décrit une règle de réécriture sur $B_{\mathfrak{C}}(\mathcal{O})$: pour tous $x, x' \in B_{\mathfrak{C}}(\mathcal{O})$, on pose

$$x \rightarrow x'$$

à condition qu'il existe $i \in \mathbb{N}$ et $r \in \mathfrak{R}$ tels que $x' = x \circ_i r$.

La clôture réflexive et transitive de $\rightarrow$ est la **relation de dérivation**.

Un élément $x \in B_{\mathfrak{C}}(\mathcal{O})$ est **engendré** par $\mathcal{B}$ si

$$1_c \rightarrow \cdots \rightarrow x$$

où $c \in I$ et toutes les couleurs d'entrée de x sont dans T .

Langages

Un ensemble $\mathfrak{R}$ de règles de production décrit une règle de réécriture sur $B_c(\mathcal{O})$: pour tous $x, x' \in B_c(\mathcal{O})$, on pose

$$x \rightarrow x'$$

à condition qu'il existe $i \in \mathbb{N}$ et $r \in \mathfrak{R}$ tels que $x' = x \circ_i r$.

La clôture réflexive et transitive de $\rightarrow$ est la **relation de dérivation**.

Un élément $x \in B_c(\mathcal{O})$ est **engendré** par $\mathcal{B}$ si

$$1_c \rightarrow \cdots \rightarrow x$$

où $c \in I$ et toutes les couleurs d'entrée de x sont dans T .

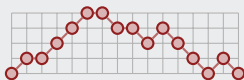
Le **langage** de $\mathcal{B}$ est l'ensemble $L(\mathcal{B})$ des éléments engendrés par $\mathcal{B}$.

Opérade des chemins de Motzkin

L'opérade des chemins de Motzkin est l'opérade **Motz** dans laquelle

- **Motz**(n) est l'ensemble des chemins de Motzkin à $n - 1$ pas.

Exemple



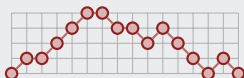
chemin de Motzkin d'arité 16.

Opérade des chemins de Motzkin

L'opérade des chemins de Motzkin est l'opérade **Motz** dans laquelle

- **Motz**(n) est l'ensemble des chemins de Motzkin à $n - 1$ pas.

Exemple



chemin de Motzkin d'arité 16.

- La composition partielle $x \circ_i y$ se calcule en remplaçant le i^{e} point de x par une copie de y .

Exemple

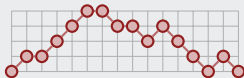


Opérade des chemins de Motzkin

L'opérade des chemins de Motzkin est l'opérade **Motz** dans laquelle

- **Motz**(n) est l'ensemble des chemins de Motzkin à $n - 1$ pas.

Exemple



chemin de Motzkin d'arité 16.

- La composition partielle $x \circ_i y$ se calcule en remplaçant le i^{e} point de x par une copie de y .

Exemple



- L'unité est $\circ$.

Génération de chemins de Motzkin particuliers

Soit la grammaire à bourgeons $\mathcal{B} := (\text{Motz}, \{1, 2\}, \mathfrak{R}, \{1\}, \{1, 2\})$ où

$$\mathfrak{R} := \{(1, \text{---}\bullet\text{---}\bullet, 22), (1, \text{---}\bullet\text{---}\text{---}\bullet\text{---}\bullet, 111)\}.$$

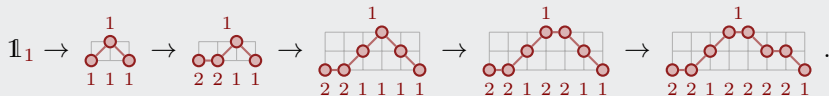
Génération de chemins de Motzkin particuliers

Soit la grammaire à bourgeons $\mathcal{B} := (\text{Motz}, \{1, 2\}, \mathfrak{R}, \{1\}, \{1, 2\})$ où

$$\mathfrak{R} := \{(1, \text{---}, 22), (1, \text{---}, 111)\}.$$

Exemple

Il y a dans $\mathcal{B}$ les dérivations



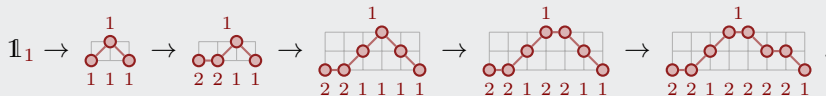
Génération de chemins de Motzkin particuliers

Soit la grammaire à bourgeons $\mathcal{B} := (\text{Motz}, \{1, 2\}, \mathfrak{R}, \{1\}, \{1, 2\})$ où

$$\mathfrak{R} := \{(1, \text{---}, 22), (1, \text{---}, 111)\}.$$

Exemple

Il y a dans $\mathcal{B}$ les dérivations



Proposition [G., 2017]

$L(\mathcal{B})$ est en bijection avec l'ensemble des chemins de Motzkin sans pas horizontaux consécutifs.

Ces chemins sont dénombrés par la suite **A104545** :

1, 1, 1, 3, 5, 11, 25, 55, 129, 303, 721, 1743.

Langages synchrones

Un ensemble τ de règles de production décrit une règle de réécriture sur $B_{\mathfrak{C}}(\mathcal{O})$: pour tous $x, x' \in B_{\mathfrak{C}}(\mathcal{O})$, on pose

$$x \rightsquigarrow x'$$

à condition qu'il existe $r_1, \dots, r_{|x|} \in \mathfrak{R}$ tels que $x' = x \circ [r_1, \dots, r_{|x|}]$.

Langages synchrones

Un ensemble τ de règles de production décrit une règle de réécriture sur $B_{\mathfrak{C}}(\mathcal{O})$: pour tous $x, x' \in B_{\mathfrak{C}}(\mathcal{O})$, on pose

$$x \rightsquigarrow x'$$

à condition qu'il existe $r_1, \dots, r_{|x|} \in \mathfrak{R}$ tels que $x' = x \circ [r_1, \dots, r_{|x|}]$.

La clôture réflexive et transitive de $\rightsquigarrow$ est la **relation de dérivation synchrone**.

Langages synchrones

Un ensemble τ de règles de production décrit une règle de réécriture sur $B_{\mathfrak{C}}(\mathcal{O})$: pour tous $x, x' \in B_{\mathfrak{C}}(\mathcal{O})$, on pose

$$x \leadsto x'$$

à condition qu'il existe $r_1, \dots, r_{|x|} \in \mathfrak{R}$ tels que $x' = x \circ [r_1, \dots, r_{|x|}]$.

La clôture réflexive et transitive de $\leadsto$ est la **relation de dérivation synchrone**.

Un élément $x \in B_{\mathfrak{C}}(\mathcal{O})$ est **engendré de manière synchrone** par $\mathcal{B}$ si

$$1_c \leadsto \dots \leadsto x$$

où $c \in I$ et toutes les couleurs d'entrée de x sont dans T .

Langages synchrones

Un ensemble τ de règles de production décrit une règle de réécriture sur $B_c(\mathcal{O})$: pour tous $x, x' \in B_c(\mathcal{O})$, on pose

$$x \rightsquigarrow x'$$

à condition qu'il existe $r_1, \dots, r_{|x|} \in \mathfrak{R}$ tels que $x' = x \circ [r_1, \dots, r_{|x|}]$.

La clôture réflexive et transitive de $\rightsquigarrow$ est la **relation de dérivation synchrone**.

Un élément $x \in B_c(\mathcal{O})$ est **engendré de manière synchrone** par $\mathcal{B}$ si

$$1_c \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow x$$

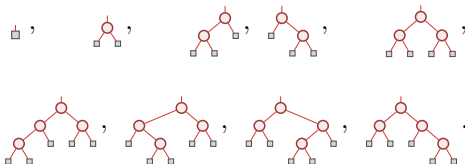
où $c \in I$ et toutes les couleurs d'entrée de x sont dans T .

Le **langage synchrone** de $\mathcal{B}$ est l'ensemble $L_S(\mathcal{B})$ des éléments engendrés de manière synchrone par $\mathcal{B}$.

Arbres binaires équilibrés

Un **arbre binaire équilibré** est un arbre binaire t tel que, pour tout nœud interne x de t , la hauteur du sous-arbre gauche et du sous-arbre droit de x diffèrent d'au plus 1.

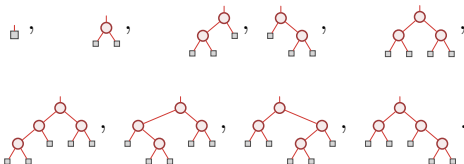
Les premiers arbres binaires équilibrés sont



Arbres binaires équilibrés

Un **arbre binaire équilibré** est un arbre binaire t tel que, pour tout nœud interne x de t , la hauteur du sous-arbre gauche et du sous-arbre droit de x diffèrent d'au plus 1.

Les premiers arbres binaires équilibrés sont



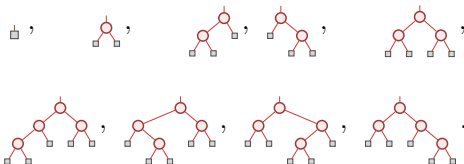
Ces arbres sont dénombrés par la suite **A006265** :

1, 1, 2, 1, 4, 6, 4, 17, 32, 44, 60, 70.

Arbres binaires équilibrés

Un **arbre binaire équilibré** est un arbre binaire t tel que, pour tout nœud interne x de t , la hauteur du sous-arbre gauche et du sous-arbre droit de x diffèrent d'au plus 1.

Les premiers arbres binaires équilibrés sont



Ces arbres sont dénombrés par la suite **A006265** :

1, 1, 2, 1, 4, 6, 4, 17, 32, 44, 60, 70.

Leur série génératrice est $F(x, 0)$ où

$$F(x, y) = x + F(x^2 + 2xy, x).$$

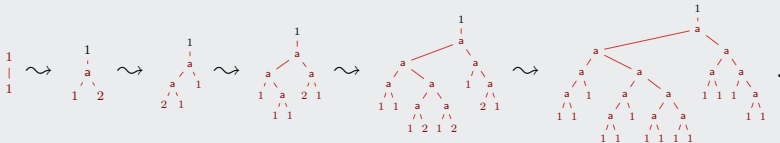
Génération d'arbres binaires équilibrés

Soit la grammaire à bourgeons $\mathcal{B} := (\text{Mag}, \{1, 2\}, \mathfrak{R}, \{1\}, \{1\})$ où $\text{Mag} := \text{FO}(\{a\})$, $|a| := 2$ et

$$\mathfrak{R} := \left\{ \left(1, \begin{array}{c} \cdot \\ \swarrow \quad \searrow \\ 1 \quad 2 \end{array}, 11 \right), \left(1, \begin{array}{c} \cdot \\ \swarrow \quad \searrow \\ 2 \quad 1 \end{array}, 12 \right), \left(1, \begin{array}{c} \cdot \\ \swarrow \quad \searrow \\ 2 \quad 1 \end{array}, 21 \right), \left(2, \begin{array}{c} \cdot \\ \swarrow \quad \searrow \\ 1 \quad 1 \end{array}, 1 \right) \right\}.$$

Exemple

Il y a dans $\mathcal{B}$ les dérivations synchrones



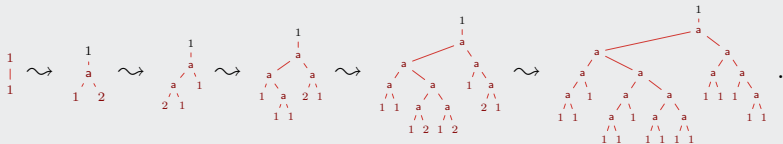
Génération d'arbres binaires équilibrés

Soit la grammaire à bourgeons $\mathcal{B} := (\text{Mag}, \{1, 2\}, \mathfrak{R}, \{1\}, \{1\})$ où $\text{Mag} := \text{FO}(\{a\})$, $|a| := 2$ et

$$\mathfrak{R} := \left\{ \left(1, \begin{array}{c} \cdot \\ \swarrow \quad \searrow \\ 1 \quad 2 \end{array}, 11 \right), \left(1, \begin{array}{c} \cdot \\ \swarrow \quad \searrow \\ 2 \quad 1 \end{array}, 12 \right), \left(1, \begin{array}{c} \cdot \\ \swarrow \quad \searrow \\ 2 \quad 1 \end{array}, 21 \right), \left(2, \begin{array}{c} \cdot \\ \swarrow \quad \searrow \\ 1 \quad 1 \end{array}, 1 \right) \right\}.$$

Exemple

Il y a dans $\mathcal{B}$ les dérivations synchrones



Proposition [G., (2012), 2017]

$L_S(\mathcal{B})$ est en bijection avec l'ensemble des arbres binaires équilibrés.

Séries formelles

Soit $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{Q}(q_0, q_1, q_2, \dots)$ et X un ensemble (combinatoire).

Séries formelles

Soit $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{Q}(q_0, q_1, q_2, \dots)$ et X un ensemble (combinatoire).

Une X -série est une application

$$f : X \rightarrow \mathbb{K}.$$

Séries formelles

Soit $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{Q}(q_0, q_1, q_2, \dots)$ et X un ensemble (combinatoire).

Une X -série est une application

$$\mathbf{f} : X \rightarrow \mathbb{K}.$$

Le coefficient $\mathbf{f}(x)$ de $x \in X$ dans $\mathbf{f}$ est noté par $\langle x, \mathbf{f} \rangle$.

Séries formelles

Soit $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{Q}(q_0, q_1, q_2, \dots)$ et X un ensemble (combinatoire).

Une X -série est une application

$$\mathbf{f} : X \rightarrow \mathbb{K}.$$

Le coefficient $\mathbf{f}(x)$ de $x \in X$ dans $\mathbf{f}$ est noté par $\langle x, \mathbf{f} \rangle$.

L'ensemble de toutes les X -séries est $\mathbb{K} \langle\langle X \rangle\rangle$.

Séries formelles

Soit $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{Q}(q_0, q_1, q_2, \dots)$ et X un ensemble (combinatoire).

Une X -série est une application

$$\mathbf{f} : X \rightarrow \mathbb{K}.$$

Le coefficient $\mathbf{f}(x)$ de $x \in X$ dans $\mathbf{f}$ est noté par $\langle x, \mathbf{f} \rangle$.

L'ensemble de toutes les X -séries est $\mathbb{K} \langle\langle X \rangle\rangle$.

Muni de l'addition point par point

$$\langle x, \mathbf{f} + \mathbf{g} \rangle := \langle x, \mathbf{f} \rangle + \langle x, \mathbf{g} \rangle$$

et de la multiplication par un scalaire

$$\langle x, \lambda \mathbf{f} \rangle := \lambda \langle x, \mathbf{f} \rangle,$$

l'ensemble $\mathbb{K} \langle\langle X \rangle\rangle$ est un espace vectoriel.

Séries formelles

Soit $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{Q}(q_0, q_1, q_2, \dots)$ et X un ensemble (combinatoire).

Une X -série est une application

$$\mathbf{f} : X \rightarrow \mathbb{K}.$$

Le coefficient $\mathbf{f}(x)$ de $x \in X$ dans $\mathbf{f}$ est noté par $\langle x, \mathbf{f} \rangle$.

L'ensemble de toutes les X -séries est $\mathbb{K} \langle\langle X \rangle\rangle$.

Muni de l'addition point par point

$$\langle x, \mathbf{f} + \mathbf{g} \rangle := \langle x, \mathbf{f} \rangle + \langle x, \mathbf{g} \rangle$$

et de la multiplication par un scalaire

$$\langle x, \lambda \mathbf{f} \rangle := \lambda \langle x, \mathbf{f} \rangle,$$

l'ensemble $\mathbb{K} \langle\langle X \rangle\rangle$ est un espace vectoriel.

La notation somme de $\mathbf{f}$ est

$$\mathbf{f} = \sum_{x \in X} \langle x, \mathbf{f} \rangle x.$$

Séries formelles et structures algébriques

Quand X est une structure algébrique, ses opérations s'étendent aux X -séries.

Séries formelles et structures algébriques

Quand X est une structure algébrique, ses opérations s'étendent aux X -séries.

Exemple

Un produit $\star : X \times X \rightarrow X$ sur X donne lieu au produit (partiellement défini)

$$\mathbf{f} \star \mathbf{g} := \sum_{x, y \in X} \langle x, \mathbf{f} \rangle \langle y, \mathbf{g} \rangle x \star y.$$

sur $\mathbb{K} \langle\langle X \rangle\rangle$.

Séries formelles et structures algébriques

Quand X est une structure algébrique, ses opérations s'étendent aux X -séries.

Exemple

Un produit $\star : X \times X \rightarrow X$ sur X donne lieu au produit (partiellement défini)

$$\mathbf{f} \star \mathbf{g} := \sum_{x, y \in X} \langle x, \mathbf{f} \rangle \langle y, \mathbf{g} \rangle x \star y.$$

sur $\mathbb{K} \langle\langle X \rangle\rangle$.

Les exemples les plus courants sont

Structure sur X	Séries
$(\mathbb{N}, +, 0)$	Séries habituelles de $\mathbb{K} \langle\langle t \rangle\rangle$
Monoïde libre commutatif	Séries multivariées
$(A^*, \cdot, \epsilon)$	Séries non commutatives [Eilenberg, 1974]
Monoïde	Séries sur monoïdes [Salomaa, Soittola, 1978]
Opérade	Séries sur opérades [Chapoton, 2002, 2008]

Séries sur les opérades colorées

Il existe plusieurs sortes de séries sur les opérades en fonction des spécificités des opérades considérées :

- ▶ opérades algébriques (et symétriques) [Chapoton, 2002, 2009];
- ▶ opérades algébriques non symétriques [van der Laan, 2004];
- ▶ opérades ensemblistes non symétriques $\mathcal{O}$ avec $\mathcal{O}(1) := \{1\}$ [Frabetti, 2008];
- ▶ opérades algébriques (et symétriques) [Loday, Nikolov, 2013].

Séries sur les opérades colorées

Il existe plusieurs sortes de séries sur les opérades en fonction des spécificités des opérades considérées :

- ▶ opérades algébriques (et symétriques) [Chapoton, 2002, 2009];
- ▶ opérades algébriques non symétriques [van der Laan, 2004];
- ▶ opérades ensemblistes non symétriques $\mathcal{O}$ avec $\mathcal{O}(1) := \{1\}$ [Frabetti, 2008];
- ▶ opérades algébriques (et symétriques) [Loday, Nikolov, 2013].

Ici, on considère des séries sur opérades non symétriques colorées ensemblistes $\mathcal{C}$ sans condition particulière pour $\mathcal{C}(1)$.

Produit pré-Lie

Soit $\mathcal{C}$ une opérade colorée.

Produit pré-Lie

Soit $\mathcal{C}$ une opérade colorée.

Le produit pré-Lie $\mathbf{f} \curvearrowright \mathbf{g}$ de deux séries $\mathbf{f}$ et $\mathbf{g}$ sur $\mathcal{C}$ est défini par

$$\langle x, \mathbf{f} \curvearrowright \mathbf{g} \rangle := \sum_{\substack{y, z \in \mathcal{C} \\ i \in [|y|] \\ x = y \circ_i z}} \langle y, \mathbf{f} \rangle \langle z, \mathbf{g} \rangle .$$

Produit pré-Lie

Soit $\mathcal{C}$ une opérade colorée.

Le produit pré-Lie $\mathbf{f} \curvearrowright \mathbf{g}$ de deux séries $\mathbf{f}$ et $\mathbf{g}$ sur $\mathcal{C}$ est défini par

$$\langle x, \mathbf{f} \curvearrowright \mathbf{g} \rangle := \sum_{\substack{y, z \in \mathcal{C} \\ i \in [|y|] \\ x = y \circ_i z}} \langle y, \mathbf{f} \rangle \langle z, \mathbf{g} \rangle.$$

Exemple

Voici un calcul sur des $B_{\{1,2\}}$ (Mag)-séries :

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ a \\ \swarrow \quad \searrow \\ 2 \quad 1 \end{array} \curvearrowright \left(\begin{array}{c} 2 \\ \vdots \\ a \\ \swarrow \quad \searrow \\ 1 \quad 1 \end{array} + \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ a \\ \swarrow \quad \searrow \\ 1 \quad 2 \end{array} \right) \\
 \\
 = \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ a \\ \swarrow \quad \searrow \\ 1 \quad 2 \end{array} + \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ a \\ \swarrow \quad \searrow \\ 2 \quad 1 \end{array} + \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ a \\ \swarrow \quad \searrow \\ 2 \quad 2 \end{array} .
 \end{array}$$

Propriétés du produit pré-Lie

Le produit pré-Lie $\curvearrowright$ est

- ▶ bilinéaire;
- ▶ défini totalement si les $\mathcal{C}(n)$ sont finis;
- ▶ admet $\mathbf{u}$ comme unité à gauche (mais pas à droite), où $\mathbf{u}$ est la **série des unités colorées** de $\mathcal{C}$ définie par

$$\mathbf{u} := \sum_{c \in \mathfrak{C}} \mathbb{1}_c,$$

avec $\mathfrak{C}$ l'ensemble des couleurs de $\mathcal{C}$.

Propriétés du produit pré-Lie

Le produit pré-Lie $\curvearrowright$ est

- ▶ bilinéaire;
- ▶ défini totalement si les $\mathcal{C}^{(n)}$ sont finis;
- ▶ admet $\mathbf{u}$ comme unité à gauche (mais pas à droite), où $\mathbf{u}$ est la **série des unités colorées** de $\mathcal{C}$ définie par

$$\mathbf{u} := \sum_{c \in \mathfrak{C}} \mathbb{1}_c,$$

avec $\mathfrak{C}$ l'ensemble des couleurs de $\mathcal{C}$.

Proposition [G., 2017]

Le produit pré-Lie vérifie

$$(\mathbf{f} \curvearrowright \mathbf{g}) \curvearrowright \mathbf{h} - \mathbf{f} \curvearrowright (\mathbf{g} \curvearrowright \mathbf{h}) = (\mathbf{f} \curvearrowright \mathbf{h}) \curvearrowright \mathbf{g} - \mathbf{f} \curvearrowright (\mathbf{h} \curvearrowright \mathbf{g}).$$

Ainsi, $(\mathbb{K} \langle \langle \mathcal{C} \rangle \rangle, \curvearrowright)$ est une algèbre pré-Lie.

Étoile pré-Lie

Pour tout $\ell \geq 0$, soit

$$\mathbf{f}^{\curvearrowright \ell} := \begin{cases} \mathbf{u} & \text{si } \ell = 0, \\ \mathbf{f}^{\curvearrowright \ell-1} \curvearrowright \mathbf{f} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Étoile pré-Lie

Pour tout $\ell \geq 0$, soit

$$\mathbf{f}^{\curvearrowright \ell} := \begin{cases} \mathbf{u} & \text{si } \ell = 0, \\ \mathbf{f}^{\curvearrowright \ell-1} \curvearrowright \mathbf{f} & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'étoile pré-Lie de $\mathbf{f}$ est la série sur $\mathcal{C}$

$$\mathbf{f}^{\curvearrowright *} := \sum_{\ell \geq 0} \mathbf{f}^{\curvearrowright \ell}.$$

Étoile pré-Lie

Pour tout $\ell \geq 0$, soit

$$\mathbf{f}^{\curvearrowright \ell} := \begin{cases} \mathbf{u} & \text{si } \ell = 0, \\ \mathbf{f}^{\curvearrowright \ell-1} \curvearrowright \mathbf{f} & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'étoile pré-Lie de $\mathbf{f}$ est la série sur $\mathcal{C}$

$$\mathbf{f}^{\curvearrowright *} := \sum_{\ell \geq 0} \mathbf{f}^{\curvearrowright \ell}.$$

Exemple

Voici un calcul sur des $\mathbf{B}_{\{1\}}$ (Mag)-séries :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^{\curvearrowright *} &= \mathbf{a} + \mathbf{a} + \mathbf{a} + \mathbf{a} + \mathbf{a} + 2 \mathbf{a} + \mathbf{a} + \mathbf{a} + \mathbf{a} \\ &+ \mathbf{a} + 3 \mathbf{a} + 2 \mathbf{a} + 3 \mathbf{a} + 3 \mathbf{a} + \mathbf{a} + \dots \end{aligned}$$

Les coefficients de cette série se calculent par la formule des équerres sur les arbres binaires [Knuth, 1973].

Propriétés de l'étoile pré-Lie

Proposition [G., 2017]

Lorsque $\mathbf{f}$ est une série sur $\mathcal{C}$ telle que $\mathbf{f}^{\curvearrowright*}$ est bien définie,

$$\langle x, \mathbf{f}^{\curvearrowright*} \rangle = \delta_{x, \mathbb{1}_{\bar{x}}} + \sum_{\substack{y, z \in \mathcal{C} \\ i \in [|y|] \\ x = y \circ_i z}} \langle y, \mathbf{f}^{\curvearrowright*} \rangle \langle z, \mathbf{f} \rangle .$$

Propriétés de l'étoile pré-Lie

Proposition [G., 2017]

Lorsque $\mathbf{f}$ est une série sur $\mathcal{C}$ telle que $\mathbf{f}^{\curvearrowright*}$ est bien définie,

$$\langle x, \mathbf{f}^{\curvearrowright*} \rangle = \delta_{x, \mathbb{1}_{\bar{x}}} + \sum_{\substack{y, z \in \mathcal{C} \\ i \in [|y|] \\ x = y \circ_i z}} \langle y, \mathbf{f}^{\curvearrowright*} \rangle \langle z, \mathbf{f} \rangle .$$

Proposition [G., 2017]

Lorsque $\mathbf{f}$ est une série sur $\mathcal{C}$ telle que $\mathbf{f}^{\curvearrowright*}$ est bien définie, l'équation

$$\mathbf{x} - \mathbf{x} \curvearrowright \mathbf{f} = \mathbf{u}$$

admet comme solution unique $\mathbf{x} = \mathbf{f}^{\curvearrowright*}$.

Produit de composition

Le produit de composition $\mathbf{f} \odot \mathbf{g}$ de deux séries $\mathbf{f}$ et $\mathbf{g}$ sur $\mathcal{C}$ est défini par

$$\langle x, \mathbf{f} \odot \mathbf{g} \rangle := \sum_{\substack{y, z_1, \dots, z_{|y|} \in \mathcal{C} \\ x = y \circ [z_1, \dots, z_{|y|}]}} \langle y, \mathbf{f} \rangle \prod_{i \in [|y|]} \langle z_i, \mathbf{g} \rangle.$$

Produit de composition

Le **produit de composition** $\mathbf{f} \odot \mathbf{g}$ de deux séries $\mathbf{f}$ et $\mathbf{g}$ sur $\mathcal{C}$ est défini par

$$\langle x, \mathbf{f} \odot \mathbf{g} \rangle := \sum_{\substack{y, z_1, \dots, z_{|y|} \in \mathcal{C} \\ x = y \circ [z_1, \dots, z_{|y|}]}} \langle y, \mathbf{f} \rangle \prod_{i \in [|y|]} \langle z_i, \mathbf{g} \rangle.$$

Exemple

Voici un calcul sur des $\mathbf{B}_{\{1,2\}}$ (**Mag**)-séries :

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} 1 \\ \cdot \\ a \\ \swarrow \quad \searrow \\ 2 \quad 1 \end{array} \odot \left(\begin{array}{c} 1 \\ \cdot \\ a \\ \swarrow \quad \searrow \\ 1 \quad 1 \end{array} + \begin{array}{c} 1 \\ \cdot \\ a \\ \swarrow \quad \searrow \\ 2 \quad 2 \end{array} + \begin{array}{c} 2 \\ \cdot \\ a \\ \swarrow \quad \searrow \\ 2 \quad 1 \end{array} \right) \\ \\ = \begin{array}{c} \begin{array}{c} 1 \\ \cdot \\ a \\ \swarrow \quad \searrow \\ \begin{array}{c} a \\ \swarrow \quad \searrow \\ 2 \quad 1 \end{array} \quad \begin{array}{c} a \\ \swarrow \quad \searrow \\ 1 \quad 1 \end{array} \end{array} + \begin{array}{c} 1 \\ \cdot \\ a \\ \swarrow \quad \searrow \\ \begin{array}{c} a \\ \swarrow \quad \searrow \\ 2 \quad 1 \end{array} \quad \begin{array}{c} a \\ \swarrow \quad \searrow \\ 2 \quad \begin{array}{c} a \\ \swarrow \quad \searrow \\ 2 \quad 2 \end{array} \end{array} \end{array} \end{array}$$

Propriétés du produit de composition

Le produit de composition $\odot$ est

- ▶ linéaire à gauche (mais pas à droite);
- ▶ défini totalement si les $\mathcal{C}(n)$ sont finis;
- ▶ admet **u** comme unité à gauche et à droite.

Propriétés du produit de composition

Le produit de composition $\odot$ est

- ▶ linéaire à gauche (mais pas à droite);
- ▶ défini totalement si les $\mathcal{C}(n)$ sont finis;
- ▶ admet $\mathbf{u}$ comme unité à gauche et à droite.

Proposition [G., 2017]

Le produit de composition est associatif.

Ainsi, $(\mathbb{K} \langle \mathcal{C} \rangle, \odot, \mathbf{u})$ est un monoïde.

Étoile pour la composition

Pour tout $\ell \geq 0$, soit

$$\mathbf{f}^{\odot \ell} := \underbrace{\mathbf{f} \odot \dots \odot \mathbf{f}}_{\times \ell}.$$

Étoile pour la composition

Pour tout $\ell \geq 0$, soit

$$\mathbf{f}^{\odot \ell} := \underbrace{\mathbf{f} \odot \dots \odot \mathbf{f}}_{\times \ell}.$$

L'étoile pour la composition de $\mathbf{f}$ est la série sur $\mathcal{C}$

$$\mathbf{f}^{\odot *} := \sum_{\ell \geq 0} \mathbf{f}^{\odot \ell}.$$

Étoile pour la composition

Pour tout $\ell \geq 0$, soit

$$\mathbf{f}^{\odot \ell} := \underbrace{\mathbf{f} \odot \dots \odot \mathbf{f}}_{\times \ell}.$$

L'étoile pour la composition de $\mathbf{f}$ est la série sur $\mathcal{C}$

$$\mathbf{f}^{\odot *} := \sum_{\ell \geq 0} \mathbf{f}^{\odot \ell}.$$

Exemple

Voici un calcul sur des $\mathbf{B}_{\{1,2\}}$ (Mag)-séries :

$$\left(\begin{array}{c} 1 \\ \cdot \\ a \\ \swarrow \quad \searrow \\ 1 \quad 2 \end{array} + \begin{array}{c} 2 \\ \cdot \\ a \\ \swarrow \quad \searrow \\ 2 \quad 1 \end{array} \right)^{\odot *} = \begin{array}{c} 1 \\ | \\ 1 \end{array} + \begin{array}{c} 2 \\ | \\ 2 \end{array} + \begin{array}{c} 1 \\ \cdot \\ a \\ \swarrow \quad \searrow \\ 1 \quad 2 \end{array} + \begin{array}{c} 2 \\ \cdot \\ a \\ \swarrow \quad \searrow \\ 2 \quad 1 \end{array} + \begin{array}{c} 1 \\ \cdot \\ a \\ \swarrow \quad \searrow \\ a \quad a \\ \swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \quad \searrow \\ 1 \quad 2 \quad 2 \quad 1 \end{array} + \begin{array}{c} 2 \\ \cdot \\ a \\ \swarrow \quad \searrow \\ a \quad a \\ \swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \quad \searrow \\ 2 \quad 1 \quad 1 \quad 2 \end{array} + \dots$$

Propriétés de l'étoile pour la composition

Proposition [G., 2017]

Lorsque $\mathbf{f}$ est une série sur $\mathcal{C}$ telle que $\mathbf{f}^{\odot*}$ est bien définie,

$$\langle x, \mathbf{f}^{\odot*} \rangle = \delta_{x, \mathbf{1}_{\bar{x}}} + \sum_{\substack{y, z_1, \dots, z_{|y|} \in \mathcal{C} \\ x = y \circ [z_1, \dots, z_{|y|}]}} \langle y, \mathbf{f}^{\odot*} \rangle \prod_{i \in [|y|]} \langle z_i, \mathbf{f} \rangle.$$

Propriétés de l'étoile pour la composition

Proposition [G., 2017]

Lorsque $\mathbf{f}$ est une série sur $\mathcal{C}$ telle que $\mathbf{f}^{\odot*}$ est bien définie,

$$\langle x, \mathbf{f}^{\odot*} \rangle = \delta_{x, \mathbb{1}_{\bar{x}}} + \sum_{\substack{y, z_1, \dots, z_{|y|} \in \mathcal{C} \\ x = y \circ [z_1, \dots, z_{|y|}]}} \langle y, \mathbf{f}^{\odot*} \rangle \prod_{i \in [|y|]} \langle z_i, \mathbf{f} \rangle.$$

Proposition [G., 2017]

Lorsque $\mathbf{f}$ est une série sur $\mathcal{C}$ telle que $\mathbf{f}^{\odot*}$ est bien définie, l'équation

$$\mathbf{x} - \mathbf{x} \odot \mathbf{f} = \mathbf{u}$$

admet comme solution unique $\mathbf{x} = \mathbf{f}^{\odot*}$.

Éléments inversibles pour $\odot$

Théorème [G., 2017]

Lorsque $\mathbf{f}$ est une série sur $\mathcal{C}$, les équations

$$\mathbf{f} \odot \mathbf{x} = \mathbf{u} = \mathbf{x} \odot \mathbf{f}$$

admettent toutes deux au plus une solution notée $\mathbf{x} = \mathbf{f}^{\odot -1}$.

Quand celle-ci existe, elle vérifie

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{f}^{\odot -1} \rangle = \frac{1}{\langle \mathbf{1}_{\bar{x}}, \mathbf{f} \rangle} \sum_{\substack{\mathbf{t} \in \mathbf{FCO}(S) \\ \text{ev}(\mathbf{t}) = \mathbf{x}}} (-1)^{\deg(\mathbf{t})} \prod_{v \in \mathcal{N}_{\bullet}(\mathbf{t})} \frac{\langle \mathbf{t}(v), \mathbf{f} \rangle}{\prod_{j \in [|v|]} \langle \mathbf{1}_{v_j}, \mathbf{f} \rangle}$$

où $S := \text{Supp}(\mathbf{f}) \setminus \{\mathbf{1}_c : c \in \mathcal{C}\}$.

Éléments inversibles pour $\odot$

Théorème [G., 2017]

Lorsque $\mathbf{f}$ est une série sur $\mathcal{C}$, les équations

$$\mathbf{f} \odot \mathbf{x} = \mathbf{u} = \mathbf{x} \odot \mathbf{f}$$

admettent toutes deux au plus une solution notée $\mathbf{x} = \mathbf{f}^{\odot-1}$.

Quand celle-ci existe, elle vérifie

$$\langle x, \mathbf{f}^{\odot-1} \rangle = \frac{1}{\langle \mathbf{1}_{\bar{x}}, \mathbf{f} \rangle} \sum_{\substack{\mathbf{t} \in \mathbf{FCO}(S) \\ \text{ev}(\mathbf{t}) = x}} (-1)^{\deg(\mathbf{t})} \prod_{v \in \mathcal{N}_{\bullet}(\mathbf{t})} \frac{\langle \mathbf{t}(v), \mathbf{f} \rangle}{\prod_{j \in [|v|]} \langle \mathbf{1}_{v_j}, \mathbf{f} \rangle}$$

où $S := \text{Supp}(\mathbf{f}) \setminus \{\mathbf{1}_c : c \in \mathcal{C}\}$.

On appelle $\mathbf{f}^{\odot-1}$ le $\odot$ -inverse de $\mathbf{f}$.

Éléments inversibles pour $\odot$

Théorème [G., 2017]

Lorsque $\mathbf{f}$ est une série sur $\mathcal{C}$, les équations

$$\mathbf{f} \odot \mathbf{x} = \mathbf{u} = \mathbf{x} \odot \mathbf{f}$$

admettent toutes deux au plus une solution notée $\mathbf{x} = \mathbf{f}^{\odot-1}$.

Quand celle-ci existe, elle vérifie

$$\langle x, \mathbf{f}^{\odot-1} \rangle = \frac{1}{\langle \mathbf{1}_{\bar{x}}, \mathbf{f} \rangle} \sum_{\substack{t \in \mathbf{FCO}(S) \\ \text{ev}(t) = x}} (-1)^{\deg(t)} \prod_{v \in \mathcal{N}_{\bullet}(t)} \frac{\langle t(v), \mathbf{f} \rangle}{\prod_{j \in [|v|]} \langle \mathbf{1}_{v_j}, \mathbf{f} \rangle}$$

où $S := \text{Supp}(\mathbf{f}) \setminus \{\mathbf{1}_c : c \in \mathcal{C}\}$.

On appelle $\mathbf{f}^{\odot-1}$ le $\odot$ -inverse de $\mathbf{f}$.

Ainsi, le monoïde $(\mathbb{K} \langle \langle \mathcal{C} \rangle \rangle, \odot)$ contient un sous-groupe (souvent non trivial) formé par les séries qui admettent un $\odot$ -inverse.

Séries des grammaires à bourgeons

Soit $\mathcal{B} := (\mathcal{O}, \mathfrak{C}, \mathfrak{r}, I, T)$ une grammaire à bourgeons.

Soient les trois polynômes

$$\mathbf{i} := \sum_{c \in I} \mathbb{1}_c, \quad \mathbf{r} := \sum_{r \in \mathfrak{R}} r, \quad \mathbf{t} := \sum_{c \in T} \mathbb{1}_c.$$

Séries des grammaires à bourgeons

Soit $\mathcal{B} := (\mathcal{O}, \mathfrak{C}, \mathfrak{r}, I, T)$ une grammaire à bourgeons.

Soient les trois polynômes

$$\mathbf{i} := \sum_{c \in I} \mathbb{1}_c, \quad \mathbf{r} := \sum_{r \in \mathfrak{R}} r, \quad \mathbf{t} := \sum_{c \in T} \mathbb{1}_c.$$

La série des équerres de $\mathcal{B}$ est

$$\text{hook}(\mathcal{B}) := \mathbf{i} \odot \mathbf{r}^{\curvearrowright*} \odot \mathbf{t}.$$

La série synchrone de $\mathcal{B}$ est

$$\text{sync}(\mathcal{B}) := \mathbf{i} \odot \mathbf{r}^{\odot*} \odot \mathbf{t}.$$

La série syntaxique de $\mathcal{B}$ est

$$\text{synt}(\mathcal{B}) := \mathbf{i} \odot (\mathbf{u} - \mathbf{r})^{\odot-1} \odot \mathbf{t}.$$

Séries des grammaires à bourgeons

Soit $\mathcal{B} := (\mathcal{O}, \mathfrak{C}, \mathfrak{r}, I, T)$ une grammaire à bourgeons.

Soient les trois polynômes

$$\mathbf{i} := \sum_{c \in I} \mathbb{1}_c, \quad \mathbf{r} := \sum_{r \in \mathfrak{R}} r, \quad \mathbf{t} := \sum_{c \in T} \mathbb{1}_c.$$

La série des équerres de $\mathcal{B}$ est

$$\text{hook}(\mathcal{B}) := \mathbf{i} \odot \mathbf{r}^{\curvearrowright*} \odot \mathbf{t}.$$

La série synchrone de $\mathcal{B}$ est

$$\text{sync}(\mathcal{B}) := \mathbf{i} \odot \mathbf{r}^{\odot*} \odot \mathbf{t}.$$

La série syntaxique de $\mathcal{B}$ est

$$\text{synt}(\mathcal{B}) := \mathbf{i} \odot (\mathbf{u} - \mathbf{r})^{\odot-1} \odot \mathbf{t}.$$

Proposition [G., 2017]

Quand $\text{hook}(\mathcal{B})$, $\text{synt}(\mathcal{B})$ et $\text{sync}(\mathcal{B})$ sont bien définies,

$$\text{Supp}(\text{hook}(\mathcal{B})) = \text{L}(\mathcal{B}) = \text{Supp}(\text{synt}(\mathcal{B})),$$

$$\text{Supp}(\text{sync}(\mathcal{B})) = \text{L}_S(\mathcal{B}).$$

Un outil pour le dénombrement

Soit X un ensemble d'objets combinatoires que l'on souhaite dénombrer et $\mathcal{B} := (\mathcal{O}, \mathfrak{C}, \mathfrak{A}, I, T)$ telle que

1. $L(\mathcal{B}) = X$ (resp. $L_S(\mathcal{B}) = X$);
2. la série $\mathbf{f}$ (où $\mathbf{f}$ est $\text{hook}(\mathcal{B})$, $\text{synt}(\mathcal{B})$ ou $\text{sync}(\mathcal{B})$) ne possède que des coefficients 0 ou 1.

Un outil pour le dénombrement

Soit X un ensemble d'objets combinatoires que l'on souhaite dénombrer et $\mathcal{B} := (\mathcal{O}, \mathfrak{C}, \mathfrak{A}, I, T)$ telle que

1. $L(\mathcal{B}) = X$ (resp. $L_S(\mathcal{B}) = X$);
2. la série $\mathbf{f}$ (où $\mathbf{f}$ est $\text{hook}(\mathcal{B})$, $\text{synt}(\mathcal{B})$ ou $\text{sync}(\mathcal{B})$) ne possède que des coefficients 0 ou 1.

Dans ce cas, $\mathbf{f}$ est la série caractéristique de X .

Un outil pour le dénombrement

Soit X un ensemble d'objets combinatoires que l'on souhaite dénombrer et $\mathcal{B} := (\mathcal{O}, \mathfrak{C}, \mathfrak{A}, I, T)$ telle que

1. $L(\mathcal{B}) = X$ (resp. $L_S(\mathcal{B}) = X$);
2. la série $\mathbf{f}$ (où $\mathbf{f}$ est $\text{hook}(\mathcal{B})$, $\text{synt}(\mathcal{B})$ ou $\text{sync}(\mathcal{B})$) ne possède que des coefficients 0 ou 1.

Dans ce cas, $\mathbf{f}$ est la série caractéristique de X .

On peut alors utiliser $\mathcal{B}$ pour obtenir une **formule de récurrence** pour dénombrer les éléments de X .

Un outil pour le dénombrement

Soit X un ensemble d'objets combinatoires que l'on souhaite dénombrer et $\mathcal{B} := (\mathcal{O}, \mathfrak{C}, \mathfrak{A}, I, T)$ telle que

1. $L(\mathcal{B}) = X$ (resp. $L_S(\mathcal{B}) = X$);
2. la série $\mathbf{f}$ (où $\mathbf{f}$ est $\text{hook}(\mathcal{B})$, $\text{synt}(\mathcal{B})$ ou $\text{sync}(\mathcal{B})$) ne possède que des coefficients 0 ou 1.

Dans ce cas, $\mathbf{f}$ est la série caractéristique de X .

On peut alors utiliser $\mathcal{B}$ pour obtenir une **formule de récurrence** pour dénombrer les éléments de X .

Exemple

En reprenant le système de génération à bourgeons $\mathcal{B}$ des arbres binaires équilibrés, on a que $\text{sync}(\mathcal{B})$ est la série caractéristique de ces arbres.

Un outil pour le dénombrement

Soit X un ensemble d'objets combinatoires que l'on souhaite dénombrer et $\mathcal{B} := (\mathcal{O}, \mathfrak{C}, \mathfrak{A}, I, T)$ telle que

1. $L(\mathcal{B}) = X$ (resp. $L_S(\mathcal{B}) = X$);
2. la série $\mathbf{f}$ (où $\mathbf{f}$ est $\text{hook}(\mathcal{B})$, $\text{synt}(\mathcal{B})$ ou $\text{sync}(\mathcal{B})$) ne possède que des coefficients 0 ou 1.

Dans ce cas, $\mathbf{f}$ est la série caractéristique de X .

On peut alors utiliser $\mathcal{B}$ pour obtenir une **formule de récurrence** pour dénombrer les éléments de X .

Exemple

En reprenant le système de génération à bourgeons $\mathcal{B}$ des arbres binaires équilibrés, on a que $\text{sync}(\mathcal{B})$ est la série caractéristique de ces arbres.

De plus, on peut obtenir la récurrence

$$g(n, m) = \begin{cases} 1 & \text{si } (n, m) = (1, 0), \\ \sum_{\substack{\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{N} \\ n = 2\ell_1 + \ell_2 + m}} \binom{\ell_1 + m}{\ell_1} 2^m g(\ell_1 + m, \ell_2) & \text{sinon} \end{cases}$$

pour le nombre $g(n, 0)$ d'arbres binaires équilibrés à n feuilles.

Plan

Perspectives

Pros

Un **pro** est une structure algébrique qui peut se voir comme une généralisation des opérades où les éléments peuvent avoir plusieurs sorties.

Pros

Un **pro** est une structure algébrique qui peut se voir comme une généralisation des opérades où les éléments peuvent avoir plusieurs sorties.

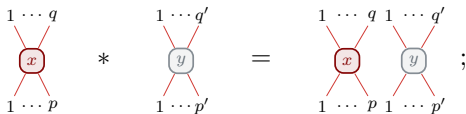
Il y a deux façons d'assembler les éléments d'un pro.

Pros

Un **pro** est une structure algébrique qui peut se voir comme une généralisation des opérades où les éléments peuvent avoir plusieurs sorties.

Il y a deux façons d'assembler les éléments d'un pro.

1. Horizontalement :



Pros

Un **pro** est une structure algébrique qui peut se voir comme une généralisation des opérades où les éléments peuvent avoir plusieurs sorties.

Il y a deux façons d'assembler les éléments d'un pro.

1. Horizontalement :

The diagram illustrates the horizontal composition of two pro elements, x and y . On the left, element x is represented by a red square with inputs $1 \dots p$ at the bottom and outputs $1 \dots q$ at the top. To its right is element y , a blue square with inputs $1 \dots p'$ at the bottom and outputs $1 \dots q'$ at the top. These are followed by an equals sign and the resulting composition: two squares side-by-side, x on the left and y on the right. The inputs of x are $1 \dots p$ and the inputs of y are $1 \dots p'$. The outputs of x are $1 \dots q$ and the outputs of y are $1 \dots q'$. A semicolon follows the final diagram.

$$\begin{array}{c} 1 \dots q \\ \diagup \quad \diagdown \\ \boxed{x} \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \dots p \end{array} * \begin{array}{c} 1 \dots q' \\ \diagup \quad \diagdown \\ \boxed{y} \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \dots p' \end{array} = \begin{array}{cc} \begin{array}{c} 1 \dots q \\ \diagup \quad \diagdown \\ \boxed{x} \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \dots p \end{array} & \begin{array}{c} 1 \dots q' \\ \diagup \quad \diagdown \\ \boxed{y} \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \dots p' \end{array} \end{array} ;$$

2. verticalement :

The diagram illustrates the vertical composition of two pro elements, x and y . On the left, element x is a red square with inputs $1 \dots p$ at the bottom and outputs $1 \dots q$ at the top. To its right is element y , a blue square with inputs $1 \dots r$ at the bottom and outputs $1 \dots p$ at the top. These are followed by an equals sign and the resulting composition: a single vertical stack of two squares. The top square is x (red) with inputs $1 \dots p$ at its bottom and outputs $1 \dots q$ at its top. The bottom square is y (blue) with inputs $1 \dots r$ at its bottom and outputs $1 \dots p$ at its top. Ellipses between the two squares indicate they are connected vertically.

$$\begin{array}{c} 1 \dots q \\ \diagup \quad \diagdown \\ \boxed{x} \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \dots p \end{array} \circ \begin{array}{c} 1 \dots p \\ \diagup \quad \diagdown \\ \boxed{y} \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \dots r \end{array} = \begin{array}{c} 1 \dots q \\ \diagup \quad \diagdown \\ \boxed{x} \\ \vdots \\ \boxed{y} \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \dots r \end{array} .$$

Cette opération $\circ$ est partiellement définie.

Séries sur les pros

Piste 1.

Généraliser les **grammaires à bourgeons** en remplaçant les opérades par des **pros** (colorés).

Séries sur les pros

Piste 1.

Généraliser les **grammaires à bourgeons** en remplaçant les opérades par des **pros** (colorés).

Piste 2.

Introduire les **séries sur les pros** et étudier ce qu'elles permettent d'exprimer.

Séries sur les pros

Piste 1.

Généraliser les **grammaires à bourgeons** en remplaçant les opérades par des **pros** (colorés).

Piste 2.

Introduire les **séries sur les pros** et étudier ce qu'elles permettent d'exprimer.

Plusieurs opérations viennent naturellement :

$$\langle x, \mathbf{f} \leftarrow g \rangle := \sum_{\substack{y, z \in \mathcal{P} \\ i \leq 0 \\ x = y \circ_i z}} \langle y, \mathbf{f} \rangle \langle z, g \rangle, \quad \langle x, \mathbf{f} \rightsquigarrow g \rangle := \sum_{\substack{y, z \in \mathcal{P} \\ \uparrow(y) + \downarrow(z) \leq i \\ x = y \circ_i z}} \langle y, \mathbf{f} \rangle \langle z, g \rangle,$$

$$\langle x, \mathbf{f} \curvearrowright g \rangle := \sum_{\substack{y, z \in \mathcal{P} \\ 1 \leq i \leq \uparrow(y) + \downarrow(z) - 1 \\ x = y \circ_i z}} \langle y, \mathbf{f} \rangle \langle z, g \rangle,$$

$$\langle x, \mathbf{f} \smile g \rangle := \langle x, \mathbf{f} \leftarrow g \rangle + \langle x, \mathbf{f} \curvearrowright g \rangle + \langle x, \mathbf{f} \rightsquigarrow g \rangle,$$

où $\circ_i : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}, i \in \mathbb{Z}$, est une certaine opération de composition (dont la définition dépend de $*$ et de $\circ$).

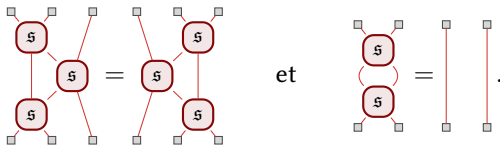
Pro des permutations

Il existe un pro **Per** qui contient tous les groupes symétriques $\mathfrak{S}(n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Ce pro **Per** est défini comme le pro engendré par l'élément



soumis aux relations



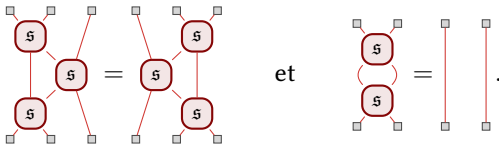
Pro des permutations

Il existe un pro **Per** qui contient tous les groupes symétriques $\mathfrak{S}(n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Ce pro **Per** est défini comme le pro engendré par l'élément



soumis aux relations



Celles-ci codent les relations

$$s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1} \quad \text{et} \quad s_i^2 = 1$$

des groupes symétriques.

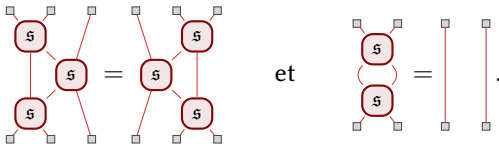
Pro des permutations

Il existe un pro **Per** qui contient tous les groupes symétriques $\mathfrak{S}(n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Ce pro **Per** est défini comme le pro engendré par l'élément



soumis aux relations



Celles-ci codent les relations

$$s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1} \quad \text{et} \quad s_i^2 = 1$$

des groupes symétriques.

Les relations $s_i s_j = s_j s_i$ si $|i - j| \geq 2$ proviennent des axiomes des pros.

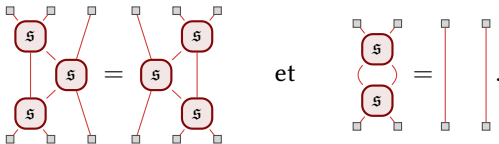
Pro des permutations

Il existe un pro **Per** qui contient tous les groupes symétriques $\mathfrak{S}(n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Ce pro **Per** est défini comme le pro engendré par l'élément



soumis aux relations



Celles-ci codent les relations

$$s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1} \quad \text{et} \quad s_i^2 = 1$$

des groupes symétriques.

Les relations $s_i s_j = s_j s_i$ si $|i - j| \geq 2$ proviennent des axiomes des pros.

Une réalisation combinatoire de **Per** consiste à voir s comme la transposition $x_1 \otimes x_2 \mapsto x_2 \otimes x_1$.

Pros et monoïdes

Piste 3.

Coder une suite de monoïdes $\mathcal{M}(n)$, $n \in \mathbb{N}$, par un pro $\mathcal{P}_{\mathcal{M}}$.

L'ensemble sous-jacent à $\mathcal{P}_{\mathcal{M}}$ est $\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{M}(n)$.

Pros et monoïdes

Piste 3.

Coder une suite de monoïdes $\mathcal{M}(n)$, $n \in \mathbb{N}$, par un pro $\mathcal{P}_{\mathcal{M}}$.

L'ensemble sous-jacent à $\mathcal{P}_{\mathcal{M}}$ est $\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{M}(n)$.

Intérêts et idées :

- ▶ appliquer cette construction à des familles de groupes de Coxeter, des groupes et monoïdes de tresses, *etc.*;

Pros et monoïdes

Piste 3.

Coder une suite de monoïdes $\mathcal{M}(n)$, $n \in \mathbb{N}$, par un pro $\mathcal{P}_{\mathcal{M}}$.

L'ensemble sous-jacent à $\mathcal{P}_{\mathcal{M}}$ est $\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{M}(n)$.

Intérêts et idées :

- ▶ appliquer cette construction à des familles de groupes de Coxeter, des groupes et monoïdes de tresses, *etc.*;
- ▶ découverte de nouvelles présentations des $\mathcal{M}(n)$;

Pros et monoïdes

Piste 3.

Coder une suite de monoïdes $\mathcal{M}(n)$, $n \in \mathbb{N}$, par un pro $\mathcal{P}_{\mathcal{M}}$.

L'ensemble sous-jacent à $\mathcal{P}_{\mathcal{M}}$ est $\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{M}(n)$.

Intérêts et idées :

- ▶ appliquer cette construction à des familles de groupes de Coxeter, des groupes et monoïdes de tresses, *etc.*;
- ▶ découverte de nouvelles présentations des $\mathcal{M}(n)$;
- ▶ découverte de nouvelles réalisations des $\mathcal{M}(n)$;

Pros et monoïdes

Piste 3.

Coder une **suite de monoïdes** $\mathcal{M}(n)$, $n \in \mathbb{N}$, par un pro $\mathcal{P}_{\mathcal{M}}$.

L'ensemble sous-jacent à $\mathcal{P}_{\mathcal{M}}$ est $\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{M}(n)$.

Intérêts et idées :

- ▶ appliquer cette construction à des familles de groupes de Coxeter, des groupes et monoïdes de tresses, *etc.*;
- ▶ découverte de **nouvelles présentations** des $\mathcal{M}(n)$;
- ▶ découverte de **nouvelles réalisations** des $\mathcal{M}(n)$;
- ▶ établir des liens entre les **bigèbres** sur $\mathcal{P}_{\mathcal{M}}$ et les **algèbres associatives des monoïdes** $\mathcal{M}(n)$.

Produits et complexité

Soit $\mathbb{K} \langle C \rangle$ un espace vectoriel gradué de base C (ensemble combinatoire).

On considère un produit linéaire

$$\star : \mathbb{K} \langle C \rangle^{\otimes k} \rightarrow \mathbb{K} \langle C \rangle$$

d'arité $k \in \mathbb{N}$ sur $\mathbb{K} \langle C \rangle$.

Produits et complexité

Soit $\mathbb{K} \langle C \rangle$ un espace vectoriel gradué de base C (ensemble combinatoire).

On considère un produit linéaire

$$\star : \mathbb{K} \langle C \rangle^{\otimes k} \rightarrow \mathbb{K} \langle C \rangle$$

d'arité $k \in \mathbb{N}$ sur $\mathbb{K} \langle C \rangle$.

Piste 4.

Évaluer la **complexité** d'un calcul $\star(x_1 \otimes \cdots \otimes x_k)$ en fonction de la taille $|x_1| + \cdots + |x_k|$.

Produits et complexité

Soit $\mathbb{K} \langle C \rangle$ un espace vectoriel gradué de base C (ensemble combinatoire).

On considère un produit linéaire

$$\star : \mathbb{K} \langle C \rangle^{\otimes k} \rightarrow \mathbb{K} \langle C \rangle$$

d'arité $k \in \mathbb{N}$ sur $\mathbb{K} \langle C \rangle$.

Piste 4.

Évaluer la **complexité** d'un calcul $\star(x_1 \otimes \cdots \otimes x_k)$ en fonction de la taille $|x_1| + \cdots + |x_k|$.

Certains produits peuvent avoir une complexité différente suivant la base regardée (le produit de mélange de **FQSym** sur la base des **F** n'a pas la même complexité que sur la base des **E**).