# Combinatoire algébrique des arbres

Samuele Giraudo

Thèse de doctorat effectuée à l'université Paris-Est Marne-la-Vallée, sous la direction de
**Florent Hivert** et **Jean-Christophe Novelli**

8 décembre 2011

# Plan


Les arbres en informatique
- Le concept d'arbre et exemples
- Problématique

Des structures algébriques sur les arbres
- Aperçu du travail réalisé
- Arbres équilibrés et treillis de Tamari
- L'algèbre de Hopf des couples d'arbres binaires jumeaux

Grammaires synchrones et dénombrement
- Définitions et propriétés
- Motifs de déséquilibre et arbres équilibrés maximaux

Perspectives

# Plan

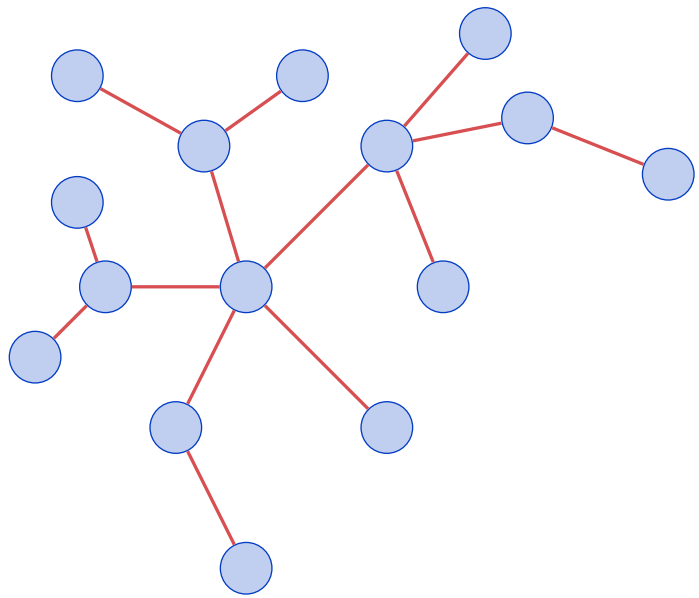
Les arbres en informatique
- Le concept d'arbre et exemples
- Problématique

# Plan

Les arbres en informatique
- Le concept d'arbre et exemples
- Problématique

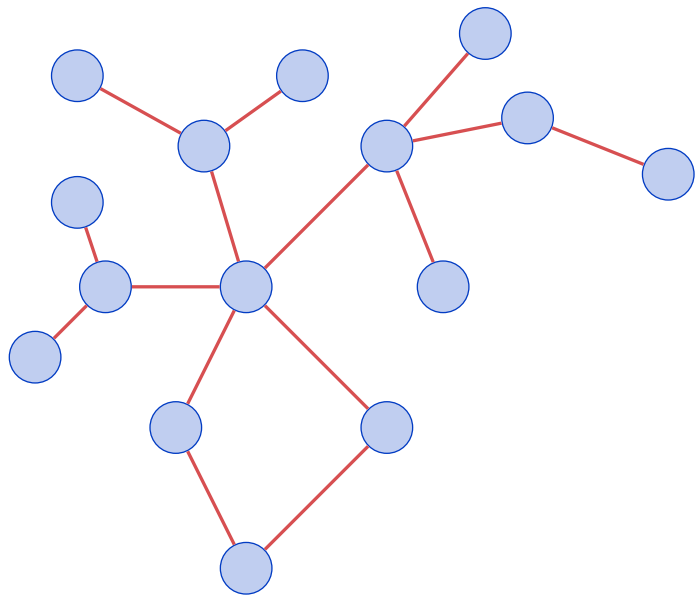
# Les arbres

- Arbre : assemblage de nœuds ● et d'arêtes —.



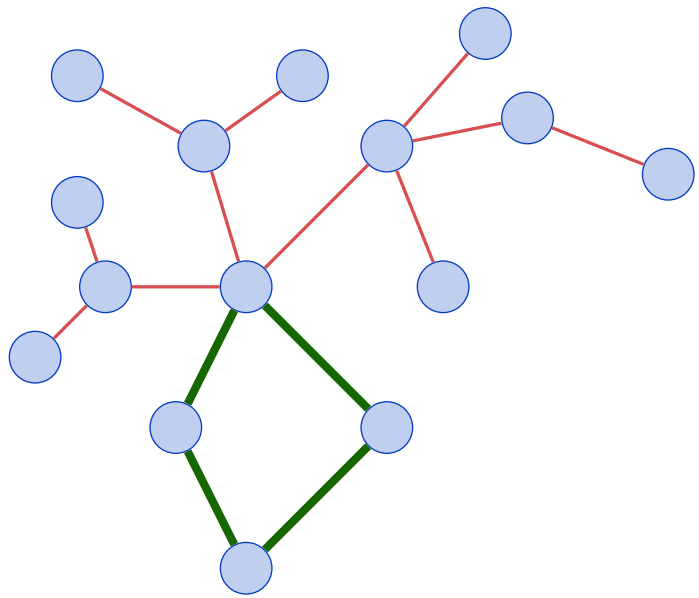
# Les arbres

- Arbre : assemblage de nœuds ● et d'arêtes —.



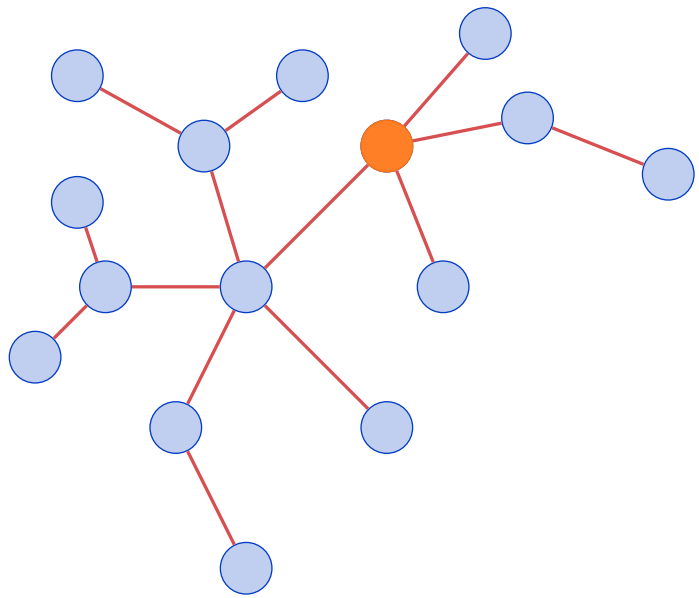
# Les arbres

- Arbre : assemblage de nœuds et d'arêtes —.



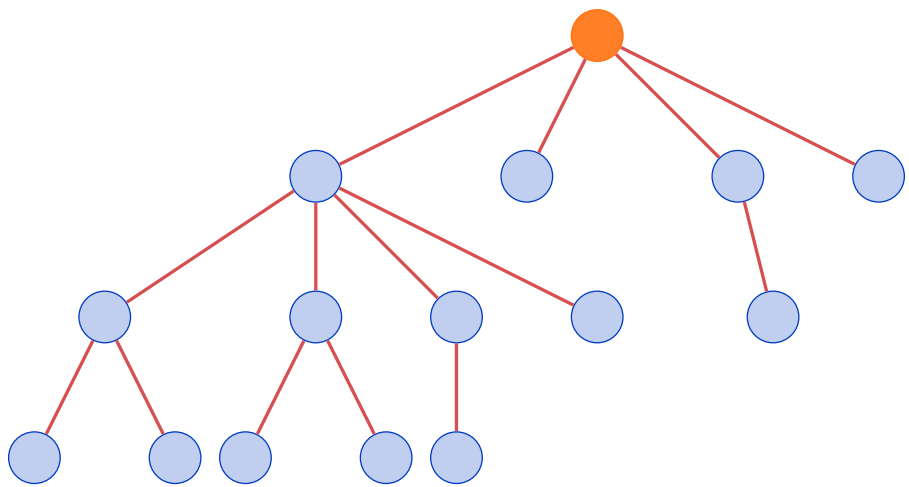
# Les arbres

- Arbre : assemblage de nœuds ● et d'arêtes —.
- Arbre enraciné : nœud distingué ●.



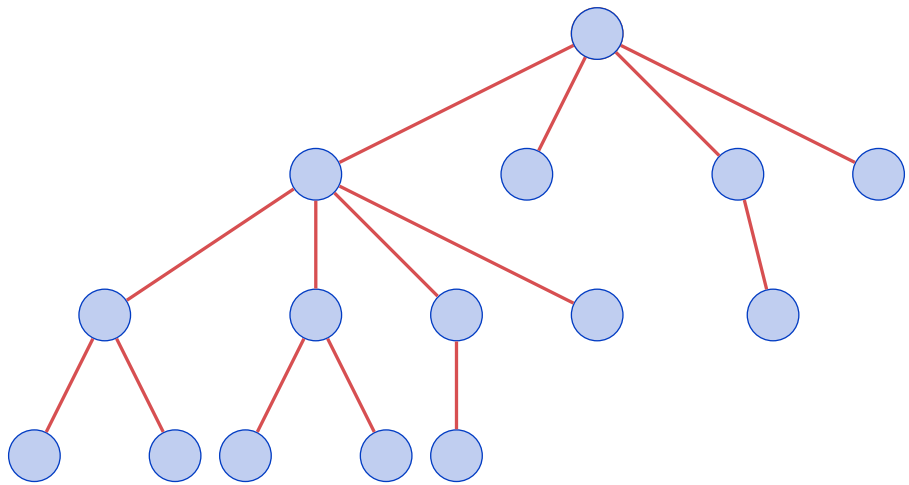
# Les arbres

- Arbre : assemblage de nœuds ● et d'arêtes —.
- Arbre enraciné : nœud distingué ●.



# Les arbres

- Arbre : assemblage de nœuds ● et d'arêtes —.
- Arbre enraciné : nœud distingué ●.

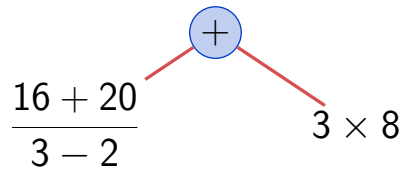


# Les arbres syntaxiques

$$\frac{16+20}{3-2}+3\times 8 \qquad \longleftrightarrow$$

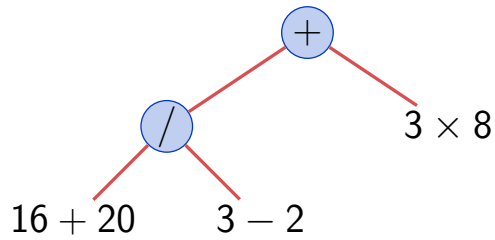
# Les arbres syntaxiques

$$\frac{16+20}{3-2}+3\times 8 \qquad \longleftrightarrow$$



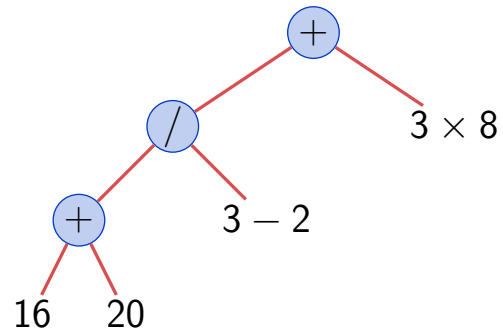
# Les arbres syntaxiques

$$\frac{16+20}{3-2}+3\times 8 \quad \longleftrightarrow$$



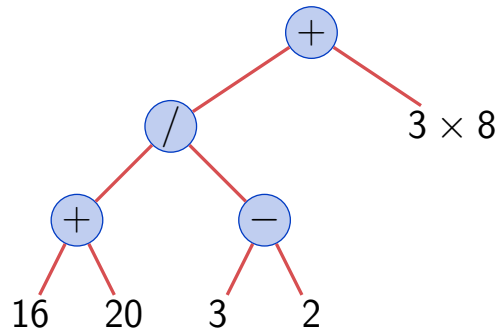
# Les arbres syntaxiques

$$\frac{16+20}{3-2}+3\times 8 \quad \longleftrightarrow$$



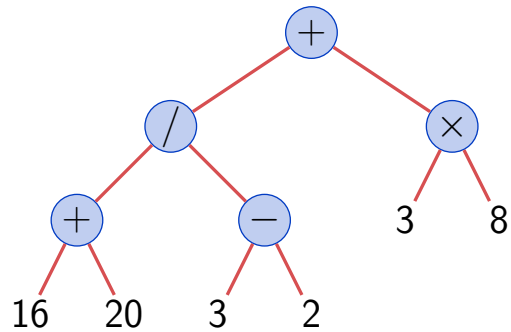
# Les arbres syntaxiques

$$\frac{16+20}{3-2}+3\times 8 \quad \longleftrightarrow$$



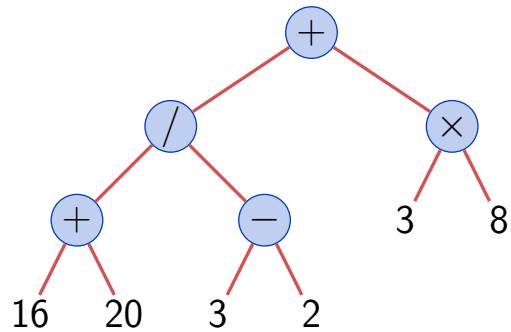
# Les arbres syntaxiques

$$\frac{16+20}{3-2}+3\times 8 \quad \longleftrightarrow$$

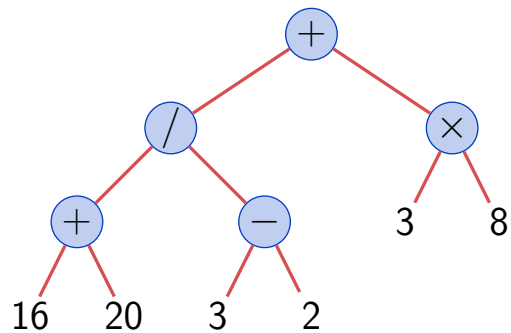


# Les arbres syntaxiques

$$\frac{16+20}{3-2}+3\times 8 \quad \longleftrightarrow$$

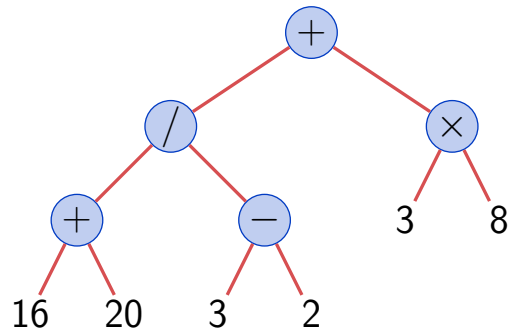



$$\frac{16+20}{3-2}+3\times 8 \quad \longleftrightarrow$$

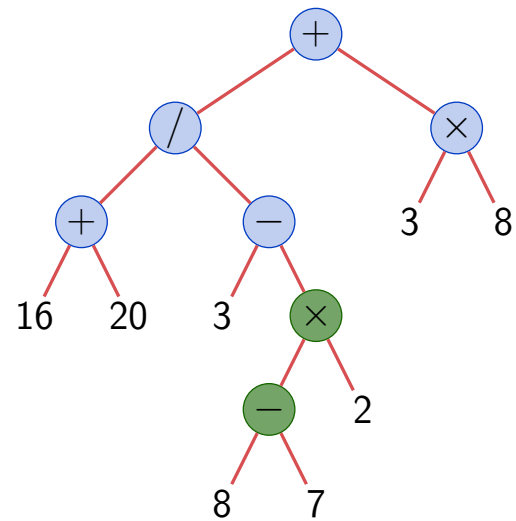


# Les arbres syntaxiques

$$\frac{16+20}{3-2}+3\times 8 \quad \longleftrightarrow$$




$$\frac{16+20}{3-(8-7)\times 2}+3\times 8 \quad \longleftrightarrow$$

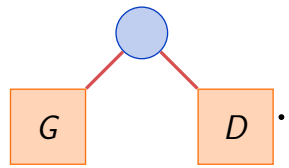



Greffe d'arbres.

# Les arbres binaires de recherche (1/3)

Un arbre binaire est

- soit l'arbre vide ▫ ;
- soit un couple $(G, D)$ d'arbres binaires représenté par

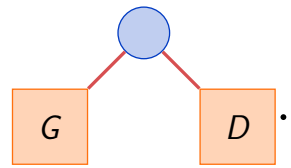



.

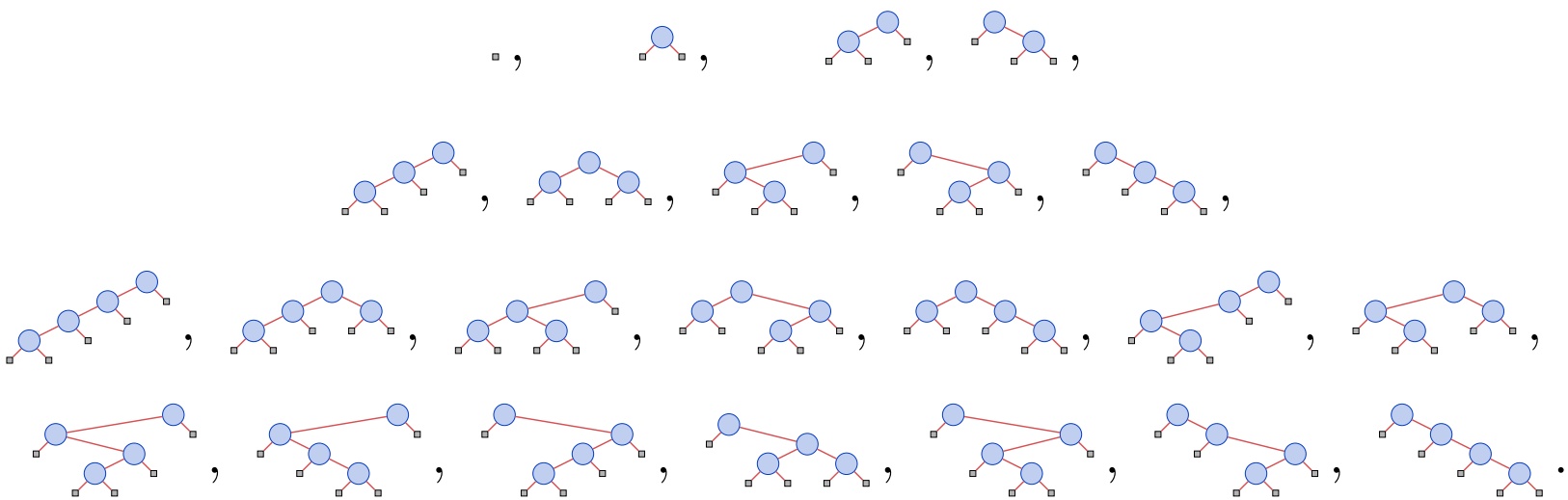
# Les arbres binaires de recherche (1/3)

Un arbre binaire est

- soit l'arbre vide ▫ ;
- soit un couple $(G, D)$ d'arbres binaires représenté par

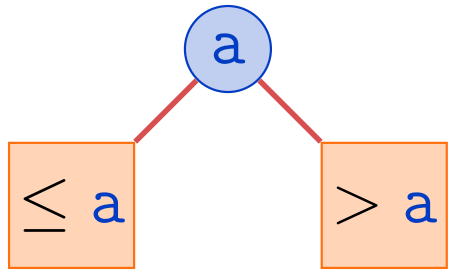



Premiers arbres binaires :



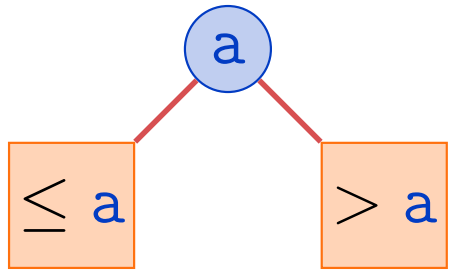
# Les arbres binaires de recherche (2/3)

Arbre binaire de recherche : arbre binaire étiqueté sur un alphabet totalement ordonné, avec la condition

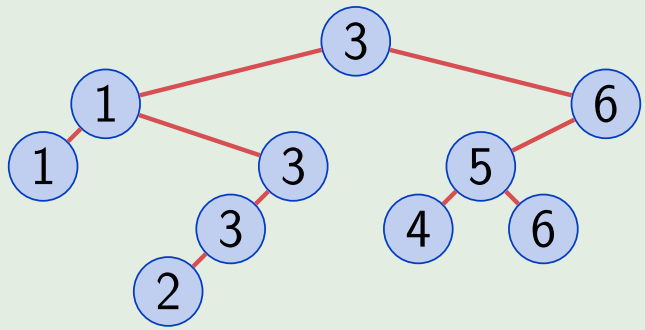


# Les arbres binaires de recherche (2/3)

Arbre binaire de recherche : arbre binaire étiqueté sur un alphabet totalement ordonné, avec la condition

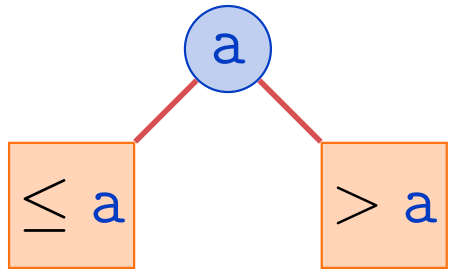



## Exemple



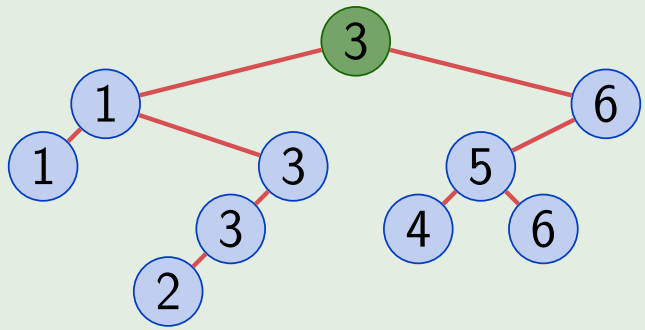
# Les arbres binaires de recherche (2/3)

Arbre binaire de recherche : arbre binaire étiqueté sur un alphabet totalement ordonné, avec la condition



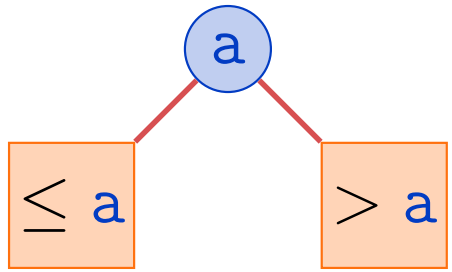

## Exemple

Recherche de 4 :



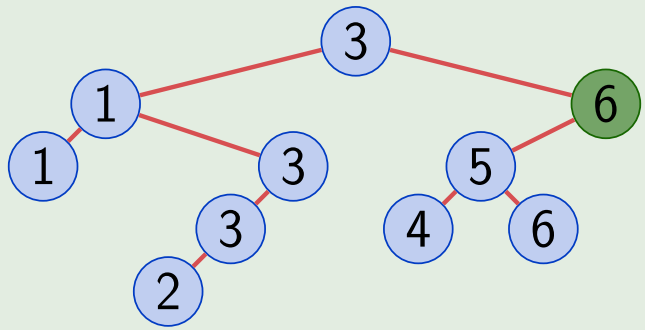
# Les arbres binaires de recherche (2/3)

Arbre binaire de recherche : arbre binaire étiqueté sur un alphabet totalement ordonné, avec la condition



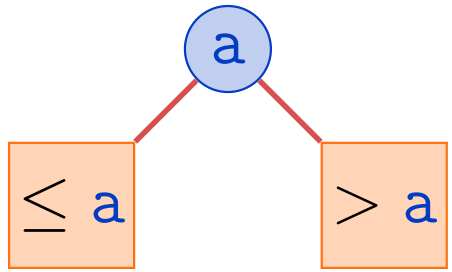

## Exemple

Recherche de 4 :



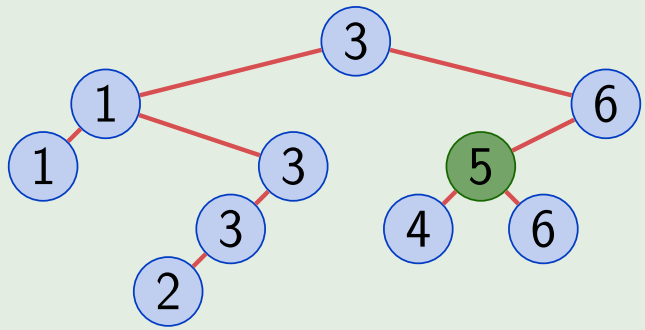
# Les arbres binaires de recherche (2/3)

Arbre binaire de recherche : arbre binaire étiqueté sur un alphabet totalement ordonné, avec la condition



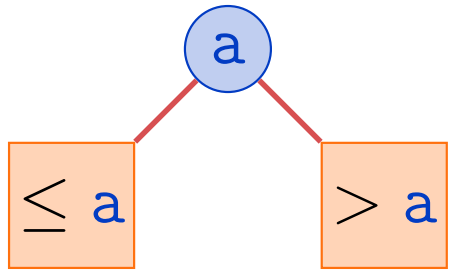

## Exemple

Recherche de 4 :



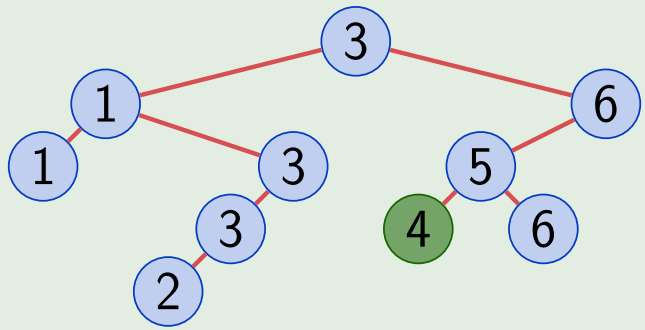
# Les arbres binaires de recherche (2/3)

Arbre binaire de recherche : arbre binaire étiqueté sur un alphabet totalement ordonné, avec la condition



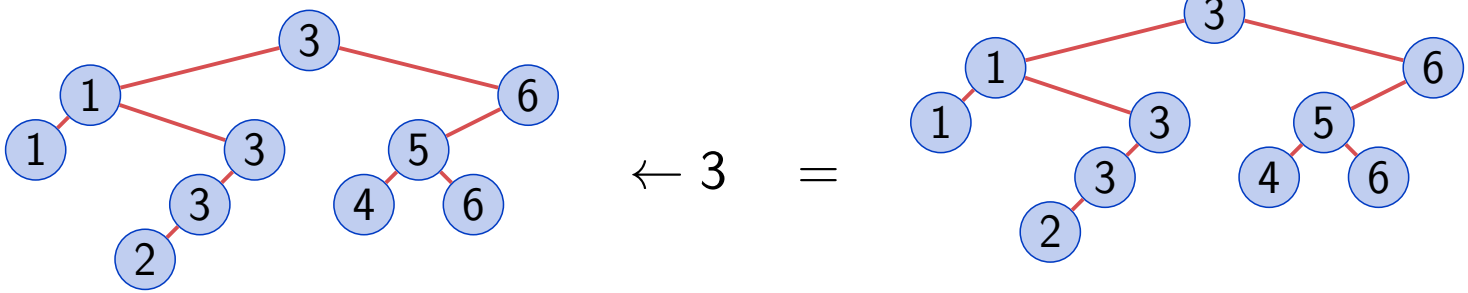

## Exemple

Recherche de 4 :



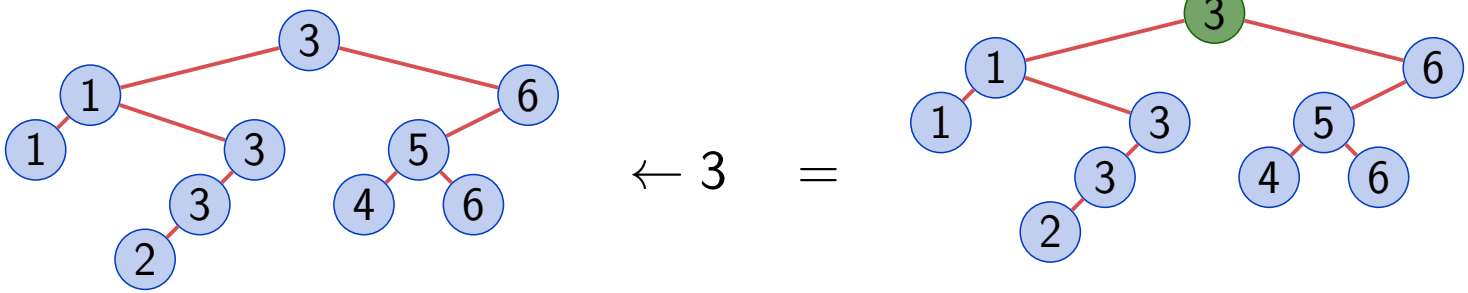
# Les arbres binaires de recherche (3/3)

Insertion d'une lettre dans un arbre binaire de recherche :



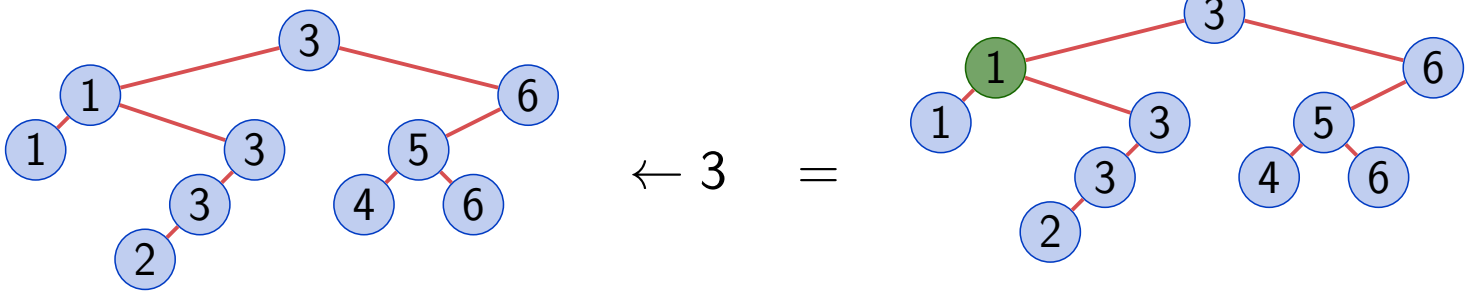
# Les arbres binaires de recherche (3/3)

Insertion d'une lettre dans un arbre binaire de recherche :



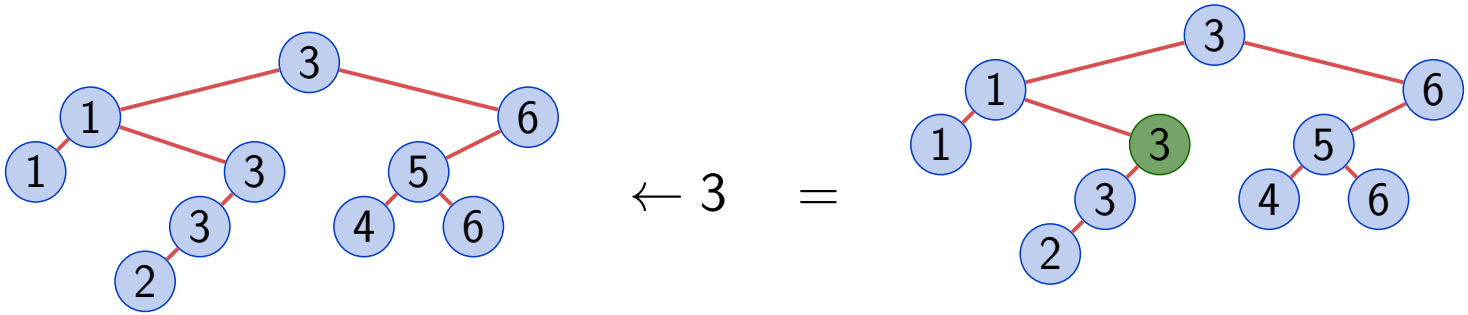
# Les arbres binaires de recherche (3/3)

Insertion d'une lettre dans un arbre binaire de recherche :



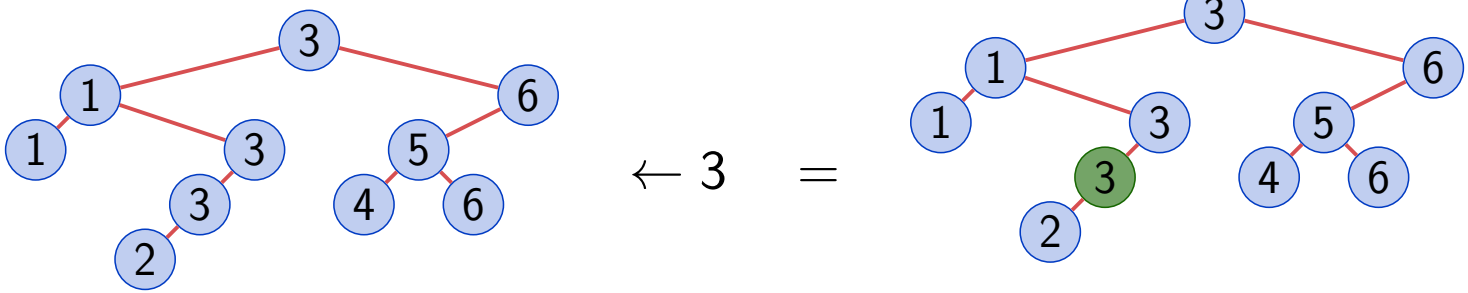
# Les arbres binaires de recherche (3/3)

Insertion d'une lettre dans un arbre binaire de recherche :



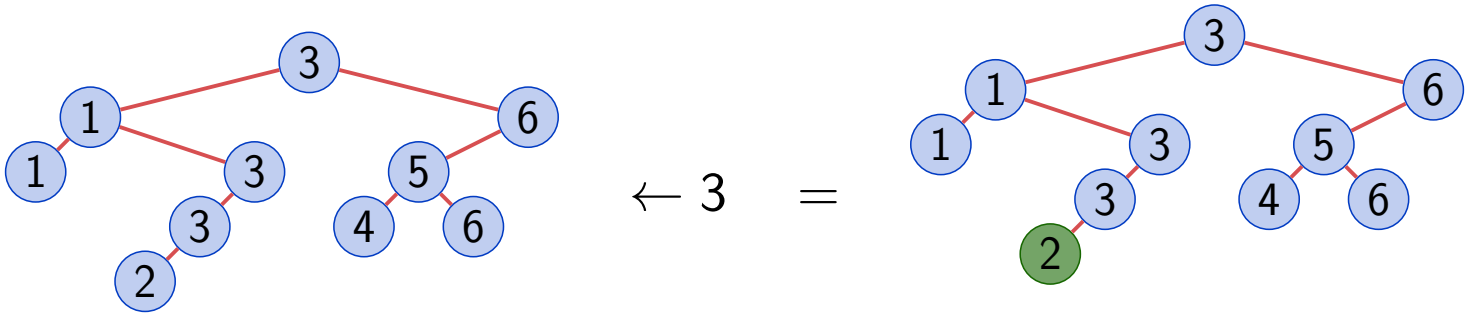
# Les arbres binaires de recherche (3/3)

Insertion d'une lettre dans un arbre binaire de recherche :



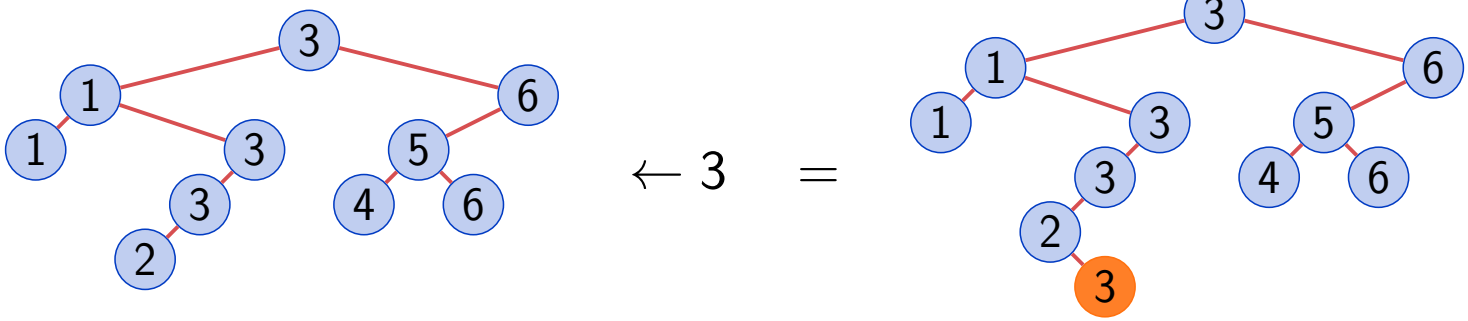
# Les arbres binaires de recherche (3/3)

Insertion d'une lettre dans un arbre binaire de recherche :



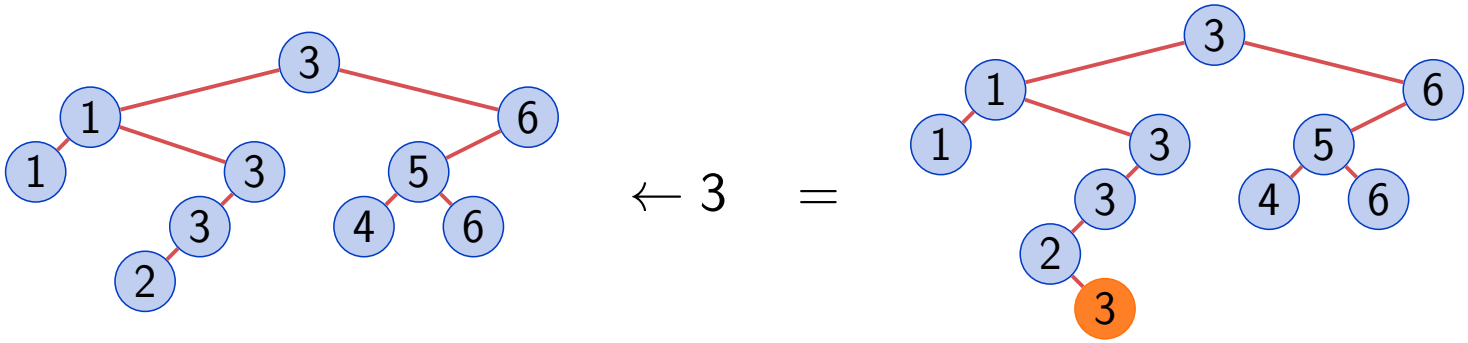
# Les arbres binaires de recherche (3/3)

Insertion d'une lettre dans un arbre binaire de recherche :



# Les arbres binaires de recherche (3/3)

Insertion d'une lettre dans un arbre binaire de recherche :

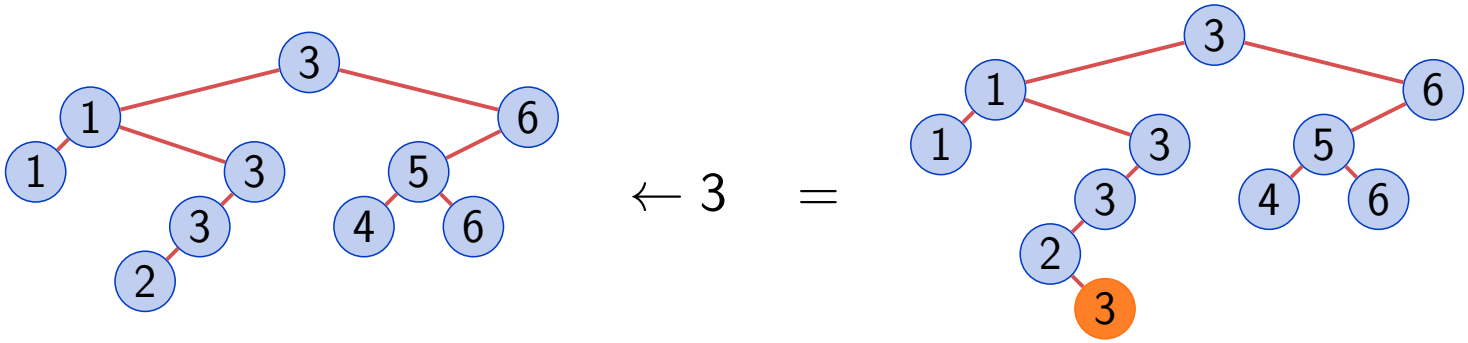



Insertion d'un mot pour obtenir un arbre binaire de recherche :

$$\text{abr}(3121) =$$

# Les arbres binaires de recherche (3/3)

Insertion d'une lettre dans un arbre binaire de recherche :

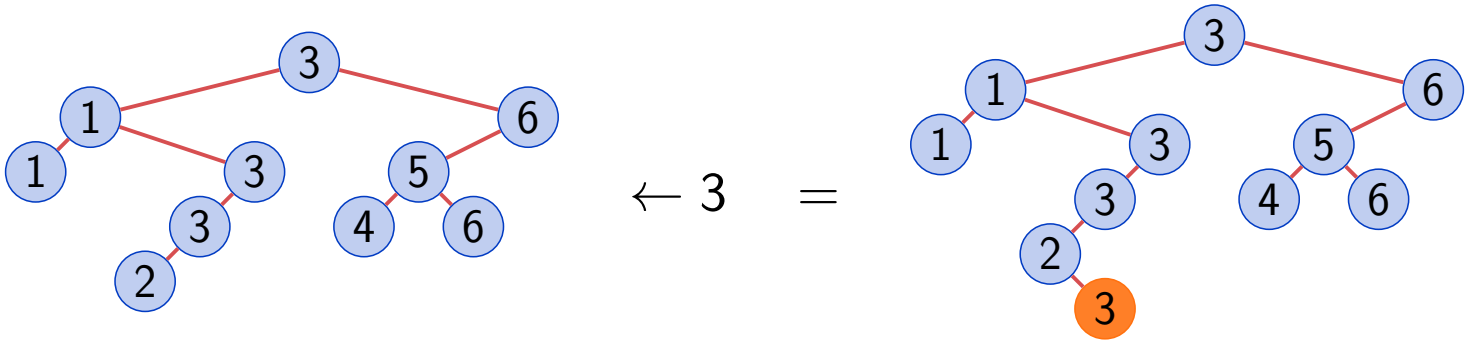



Insertion d'un mot pour obtenir un arbre binaire de recherche :

$\text{abr}(3121) =$

# Les arbres binaires de recherche (3/3)

Insertion d'une lettre dans un arbre binaire de recherche :

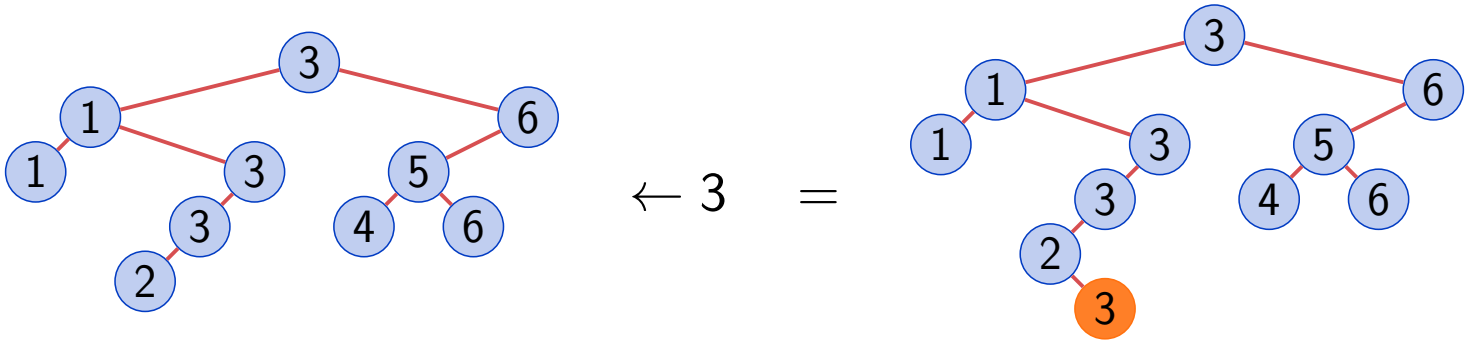



Insertion d'un mot pour obtenir un arbre binaire de recherche :

abr(3121) =

# Les arbres binaires de recherche (3/3)

Insertion d'une lettre dans un arbre binaire de recherche :

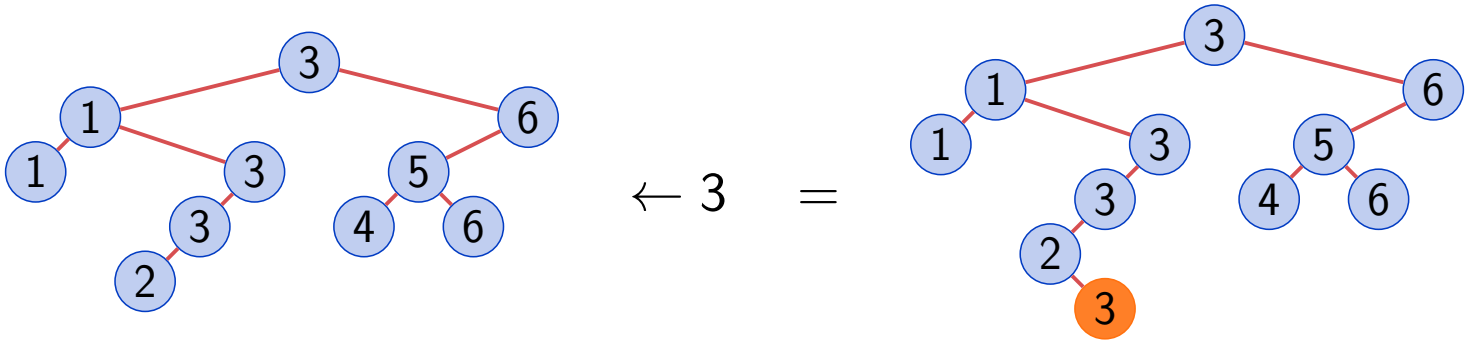



Insertion d'un mot pour obtenir un arbre binaire de recherche :

$$\text{abr}(3121) = \quad 1 \quad 2$$

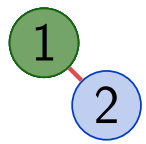
# Les arbres binaires de recherche (3/3)

Insertion d'une lettre dans un arbre binaire de recherche :



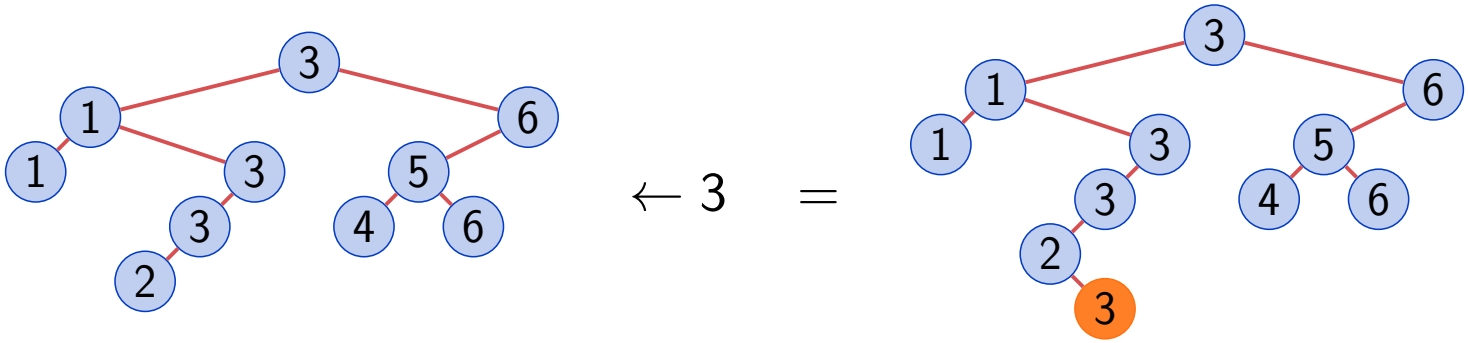

Insertion d'un mot pour obtenir un arbre binaire de recherche :

abr(3121) =



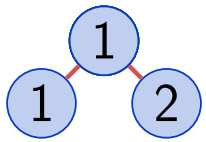
# Les arbres binaires de recherche (3/3)

Insertion d'une lettre dans un arbre binaire de recherche :



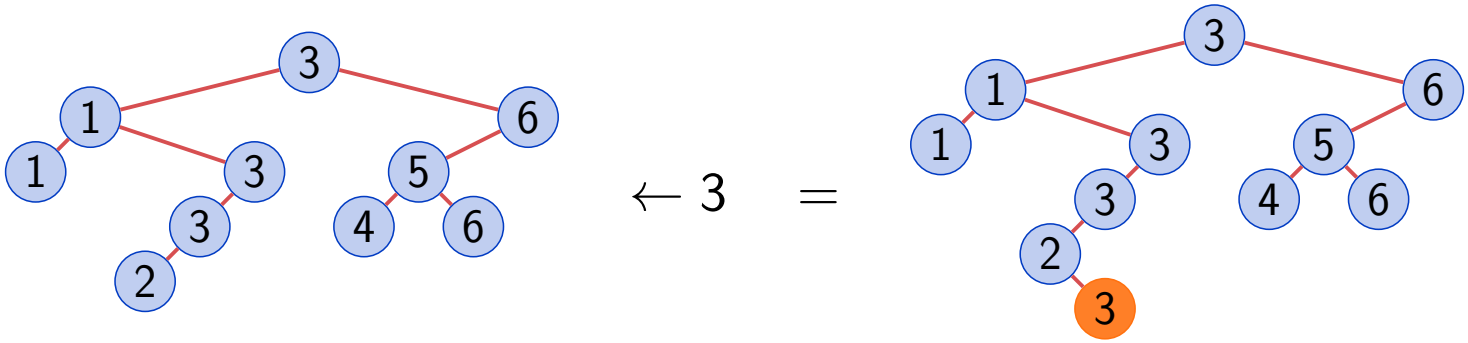

Insertion d'un mot pour obtenir un arbre binaire de recherche :

$$\text{abr}(3121) = \quad$$



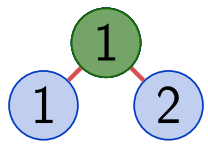
# Les arbres binaires de recherche (3/3)

Insertion d'une lettre dans un arbre binaire de recherche :



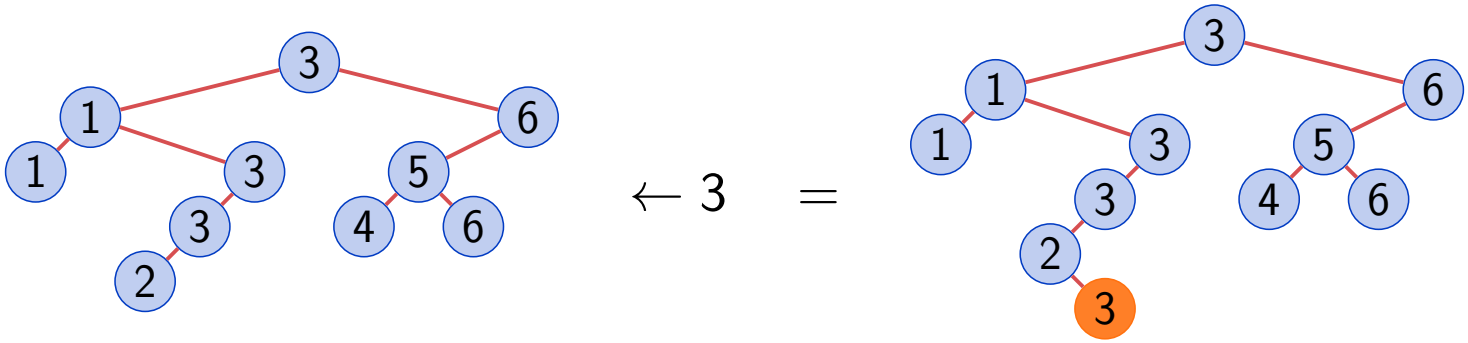

Insertion d'un mot pour obtenir un arbre binaire de recherche :

$$\text{abr}(3121) = \quad$$

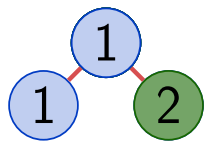


# Les arbres binaires de recherche (3/3)

Insertion d'une lettre dans un arbre binaire de recherche :

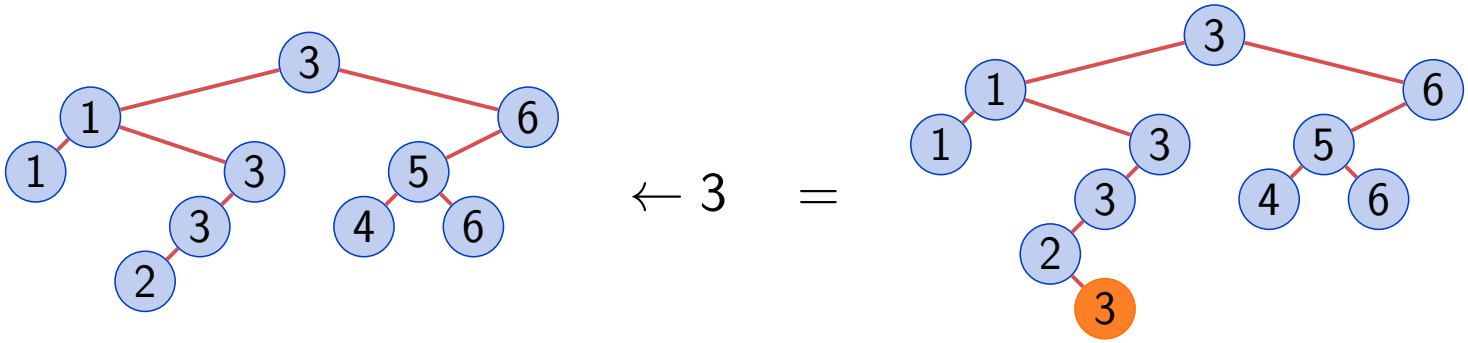



Insertion d'un mot pour obtenir un arbre binaire de recherche :

abr(3121) = 

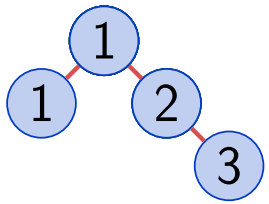
# Les arbres binaires de recherche (3/3)

Insertion d'une lettre dans un arbre binaire de recherche :




Insertion d'un mot pour obtenir un arbre binaire de recherche :

$$\text{abr}(3121) = \quad$$



# Plan

Les arbres en informatique
- Le concept d'arbre et exemples
- Problématique

# Problématique

- Arbres : structures de données omniprésentes en informatique (arbres syntaxiques, arbres binaires de recherche, arbres de décision, arbres d'appels récursifs, *etc.*) ;

# Problématique

- Arbres : structures de données omniprésentes en informatique (arbres syntaxiques, arbres binaires de recherche, arbres de décision, arbres d'appels récursifs, *etc.*) ;
- beaucoup de problèmes ouverts ;

# Problématique

- Arbres : structures de données omniprésentes en informatique (arbres syntaxiques, arbres binaires de recherche, arbres de décision, arbres d'appels récursifs, *etc.*) ;
- beaucoup de problèmes ouverts ;
- angle d'attaque : définition et étude d'opérations sur les arbres.

# Problématique

- Arbres : structures de données omniprésentes en informatique (arbres syntaxiques, arbres binaires de recherche, arbres de décision, arbres d'appels récursifs, *etc.*) ;
- beaucoup de problèmes ouverts ;
- angle d'attaque : définition et étude d'opérations sur les arbres.

$\rightsquigarrow$ Algébrisation des arbres.

# Plan

Des structures algébriques sur les arbres
- Aperçu du travail réalisé
- Arbres équilibrés et treillis de Tamari
- L'algèbre de Hopf des couples d'arbres binaires jumeaux

# Plan

Des structures algébriques sur les arbres
- Aperçu du travail réalisé
- Arbres équilibrés et treillis de Tamari
- L'algèbre de Hopf des couples d'arbres binaires jumeaux

# Travail réalisé

Trois directions principales :

# Travail réalisé

Trois directions principales :

1. rôle des arbres binaires équilibrés dans le treillis de Tamari ;

# Travail réalisé

Trois directions principales :

1. rôle des arbres binaires équilibrés dans le treillis de Tamari ;
2. construction d'une généralisation de l'algèbre de Hopf des arbres binaires : l'algèbre de Hopf des couples d'arbres binaires jumeaux ;

# Travail réalisé

Trois directions principales :

1. rôle des arbres binaires équilibrés dans le treillis de Tamari ;
2. construction d'une généralisation de l'algèbre de Hopf des arbres binaires : l'algèbre de Hopf des couples d'arbres binaires jumeaux ;
3. définition d'une construction qui associe une opérade à un monoïde et construction d'une algèbre de Hopf sur les forêts d'arbres plans.

# Plan

Des structures algébriques sur les arbres
- Aperçu du travail réalisé
- Arbres équilibrés et treillis de Tamari
- L'algèbre de Hopf des couples d'arbres binaires jumeaux

# La rotation dans les arbres binaires

## Définition

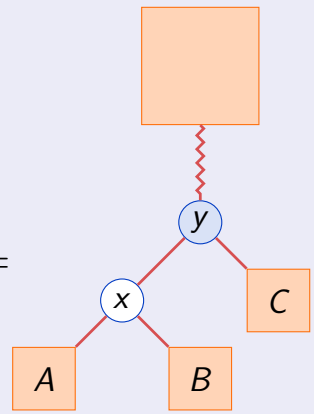
*Rotation (droite) en y dans un arbre $T_0$ :*

# La rotation dans les arbres binaires

## Définition

*Rotation (droite) en y dans un arbre $T_0$ :*

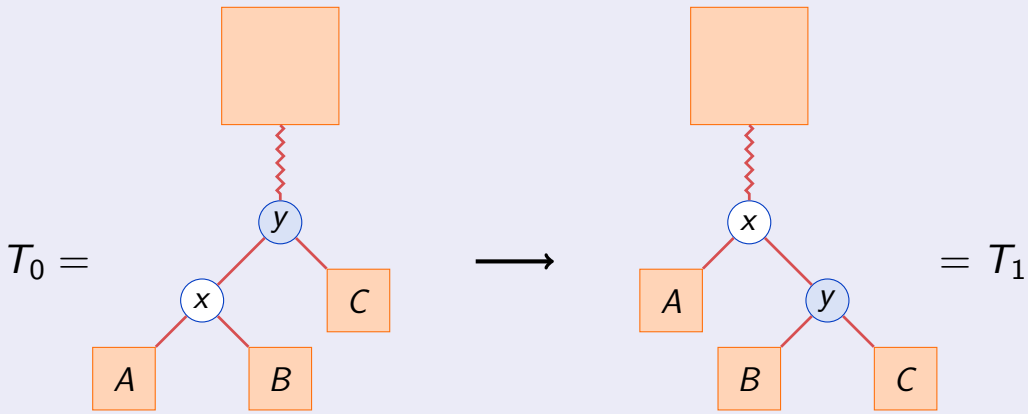
$T_0 =$



# La rotation dans les arbres binaires

## Définition

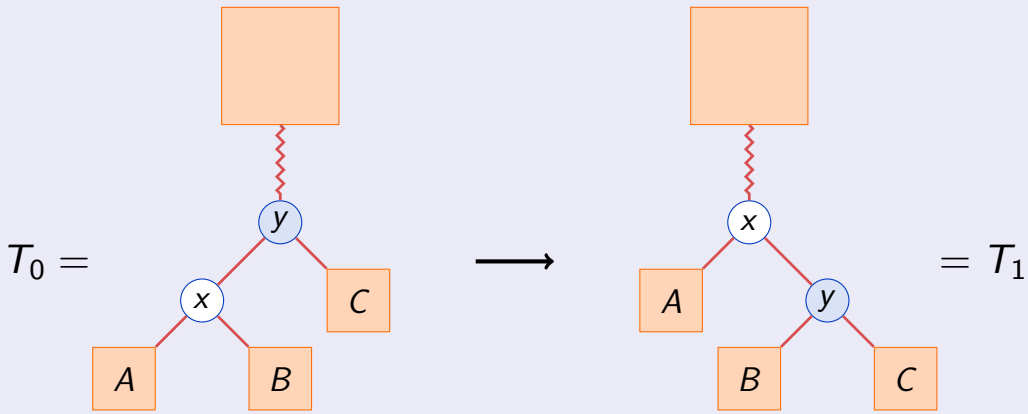
*Rotation (droite) en y dans un arbre $T_0$ :*



# La rotation dans les arbres binaires

## Définition

*Rotation (droite) en y dans un arbre $T_0$ :*

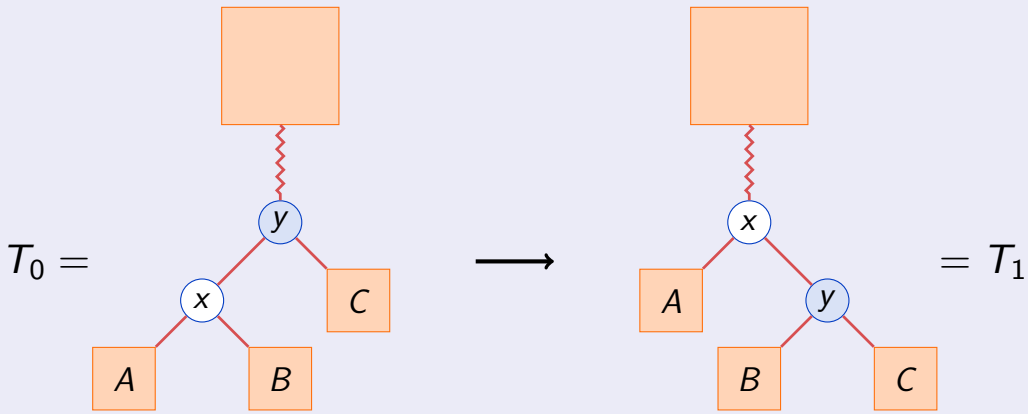



*On note $T_0 \nearrow T_1$.*

# La rotation dans les arbres binaires

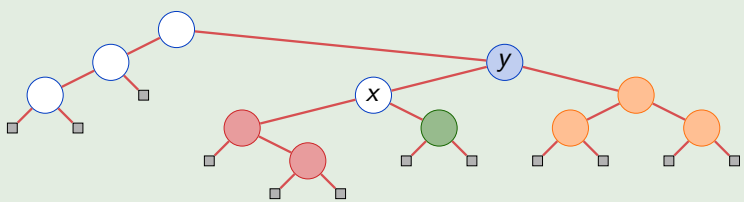
## Définition

*Rotation (droite) en y dans un arbre $T_0$ :*




*On note $T_0 \nearrow T_1$.*

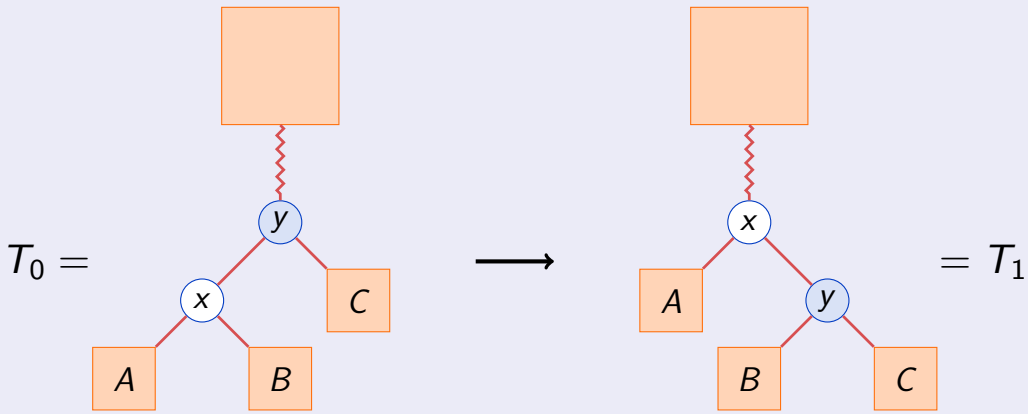
## Exemple



# La rotation dans les arbres binaires

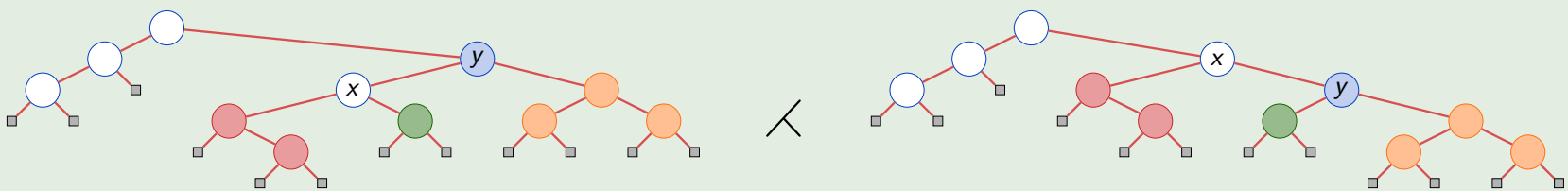
## Définition

*Rotation (droite) en y dans un arbre $T_0$ :*




*On note $T_0 \prec T_1$.*

## Exemple



# Le treillis de Tamari (1/2)

## Définition

*Ordre de Tamari* $\leq_T$ *: clôture réflexive et transitive de* $\lessdot$.

# Le treillis de Tamari (1/2)

## Définition

*Ordre de Tamari* $\leq_{\mathsf{T}}$ *: clôture réflexive et transitive de* $\lessdot$.

- Treillis sur les arbres d'une taille fixée [**Huang, Tamari**, 1972].

# Le treillis de Tamari (1/2)

## Définition

*Ordre de Tamari* $\leq_T$ *: clôture réflexive et transitive de* $\lessdot$.

- Treillis sur les arbres d'une taille fixée [Huang, Tamari, 1972].
- Couverture : rotation droite.

# Le treillis de Tamari (1/2)

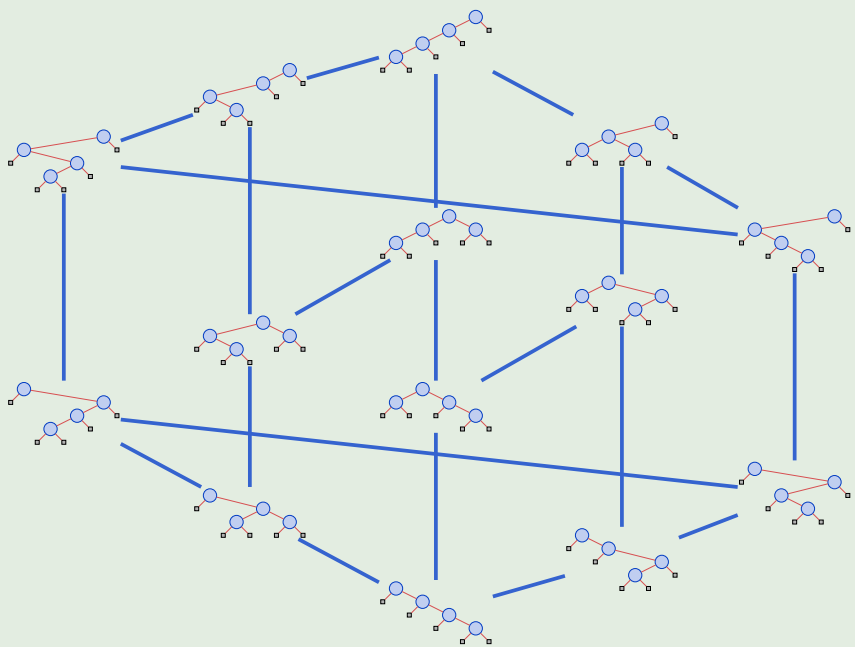
## Définition

*Ordre de Tamari* $\leq_T$ *: clôture réflexive et transitive de* $\lessdot$.

- Treillis sur les arbres d'une taille fixée [**Huang, Tamari**, 1972].
- Couverture : rotation droite.

## Exemple

Diagramme de Hasse du treillis de Tamari d'ordre 4 :



# Le treillis de Tamari (2/2)

- Treillis non gradué, non distributif ;

# Le treillis de Tamari (2/2)

- Treillis non gradué, non distributif ;
- nombre d'intervalles [**Chapoton**, 2006] :

$$\frac{2(4n+1)!}{(n+1)!(3n+2)!} \ ;$$

# Le treillis de Tamari (2/2)

- Treillis non gradué, non distributif ;
- nombre d'intervalles [**Chapoton**, 2006] :

$$\frac{2(4n+1)!}{(n+1)!(3n+2)!} \ ;$$

- exprime le produit de **PBT**, l'algèbre de Hopf des arbres binaires [**Loday, Ronco**, 2002], [**Hivert, Novelli, Thibon**, 2005] ;

# Le treillis de Tamari (2/2)

- Treillis non gradué, non distributif ;
- nombre d'intervalles [**Chapoton**, 2006] :

$$\frac{2(4n+1)!}{(n+1)!(3n+2)!} \; ;$$

- exprime le produit de **PBT**, l'algèbre de Hopf des arbres binaires [**Loday, Ronco**, 2002], [**Hivert, Novelli, Thibon**, 2005] ;
- exprime la composition dans l'opérade dendriforme.

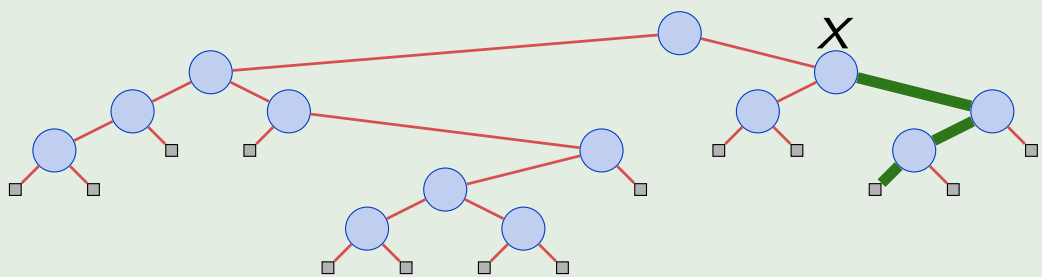
# Les arbres équilibrés (1/2)

Soit $T$ un arbre et $x$ un de ses nœuds.

- Hauteur $h_T(x)$ de $x$ : longueur du plus long chemin qui connecte $x$ à une feuille.

## Exemple

$T :=$




$h_T(x) = 3$

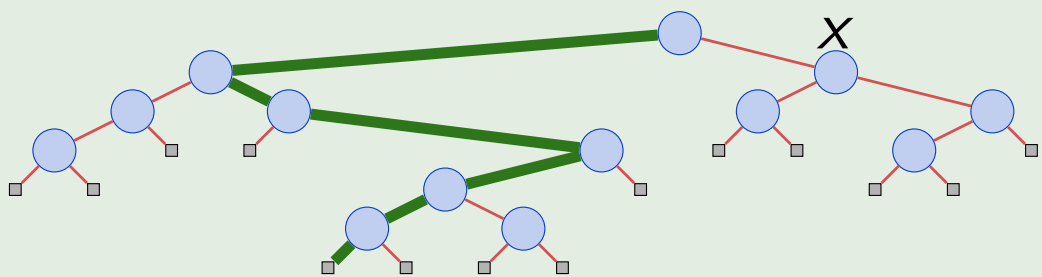
# Les arbres équilibrés (1/2)

Soit $T$ un arbre et $x$ un de ses nœuds.

- Hauteur $h_T(x)$ de $x$ : longueur du plus long chemin qui connecte $x$ à une feuille.
- Hauteur $h(T)$ de $T$ : hauteur de sa racine.

## Exemple

$T :=$




$h_T(x) = 3$, $h(T) = 6$.

# Les arbres équilibrés (1/2)

Soit $T$ un arbre et $x$ un de ses nœuds.

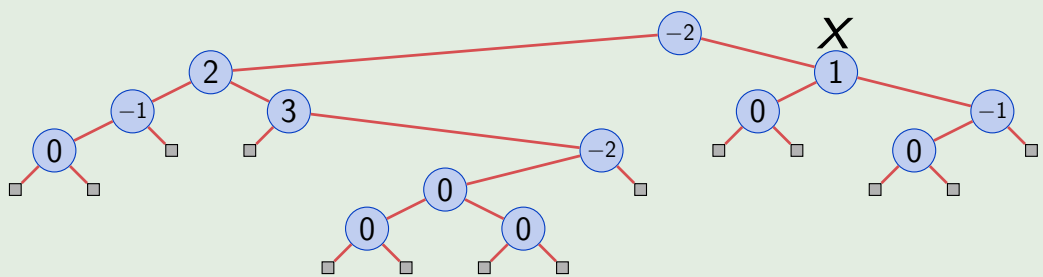
- Hauteur $\mathrm{h}_T(x)$ de $x$ : longueur du plus long chemin qui connecte $x$ à une feuille.
- Hauteur $\mathrm{h}(T)$ de $T$ : hauteur de sa racine.
- Déséquilibre $\mathrm{d}_T(x)$ de $x$ :

$$\mathrm{d}_T(x) := \mathrm{h}(D) - \mathrm{h}(G),$$

où $D$ (resp. $G$) est le sous-arbre gauche (resp. droit) de $x$.

## Exemple

$T :=$




$\mathrm{h}_T(x) = 3$, $\mathrm{h}(T) = 6$.

# Les arbres équilibrés (2/2)

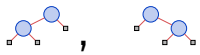
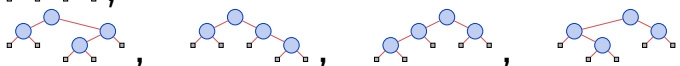
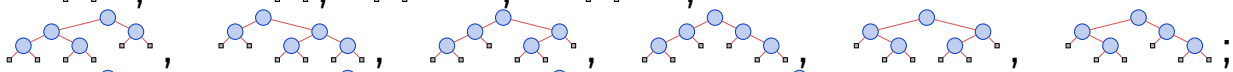
## Définition

*Un arbre $T$ est équilibré si $\mathrm{d}_T(x) \in \{-1, 0, 1\}$ pour tout nœud $x$ de $T$.*

# Les arbres équilibrés (2/2)

## Définition

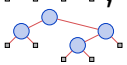
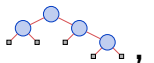
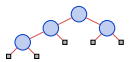
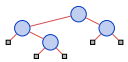
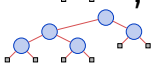
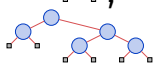
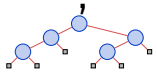
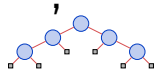
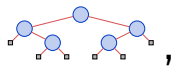
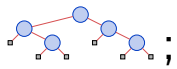
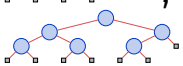
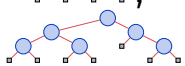
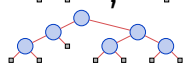
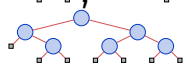
*Un arbre $T$ est équilibré si $\mathrm{d}_T(x) \in \{-1, 0, 1\}$ pour tout nœud $x$ de $T$.*

- Premiers éléments par taille :
  - 0 : .;
  - 1 : ;
  - 2 :  ;
  - 3 : ;
  - 4 :  ;
  - 5 :  ;
  - 6 : .

# Les arbres équilibrés (2/2)

## Définition

*Un arbre $T$ est équilibré si $\mathrm{d}_T(x) \in \{-1, 0, 1\}$ pour tout nœud $x$ de $T$.*

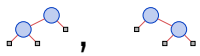
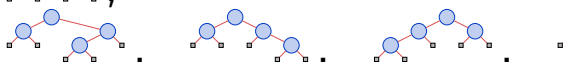
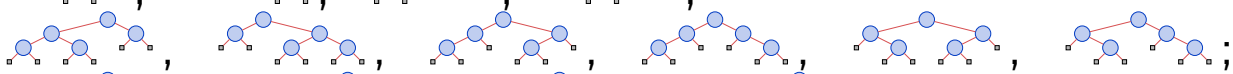
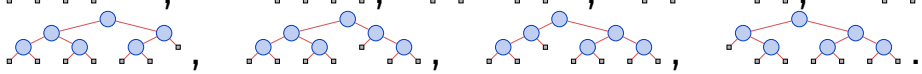
- Premiers éléments par taille :
  - 0 : .;
  - 1 : ;
  - 2 : , ;
  - 3 : ;
  - 4 :  ,  ,  ,  ;
  - 5 :  ,  ,  ,  ,  ,  ;
  - 6 :  ,  ,  ,  .
- Premiers cardinaux :

$$1, 1, 2, 1, 4, 6, 4, 17, 32, 44, 60, 70, 184, 476, 872, 1553.$$

# Les arbres équilibrés (2/2)

## Définition

*Un arbre $T$ est équilibré si $\mathrm{d}_T(x) \in \{-1, 0, 1\}$ pour tout nœud $x$ de $T$.*

- Premiers éléments par taille :
  - 0 : .;
  - 1 : ;
  - 2 :  ;
  - 3 : ;
  - 4 :  ;
  - 5 :  ;
  - 6 :  .
- Premiers cardinaux :

$$1, 1, 2, 1, 4, 6, 4, 17, 32, 44, 60, 70, 184, 476, 872, 1553.$$

- Série génératrice [Bergeron *et al.*, 1988], [Knuth, 1998] : $E(x) := F(x, 0)$ où $F(x, y)$ est solution de l'équation fonctionnelle

$$F(x, y) = x + F(x^2 + 2xy, x).$$

# L'algorithmique des arbres équilibrés

- Représentation d'ensembles [**Adelson-Velsky, Landis**, 1962].

# L'algorithmique des arbres équilibrés

- Représentation d'ensembles [**Adelson-Velsky, Landis**, 1962].
- Ajout et suppression d'éléments efficaces.

# L'algorithmique des arbres équilibrés

- Représentation d'ensembles [**Adelson-Velsky, Landis**, 1962].
- Ajout et suppression d'éléments efficaces.
- Utilité des rotations : maintenir l'équilibre des arbres (deux rotations gauches ou droites suffisent).

# L'algorithmique des arbres équilibrés

- Représentation d'ensembles [**Adelson-Velsky, Landis**, 1962].
- Ajout et suppression d'éléments efficaces.
- Utilité des rotations : maintenir l'équilibre des arbres (deux rotations gauches ou droites suffisent).

Connaissance partielle des complexités de ces algorithmes

$\rightsquigarrow$

approche algébrique des arbres équilibrés par le treillis de Tamari.

# Clôture par intervalle

## Définition

*Soit $(P, \leq)$ un poset. Un sous-ensemble $Q \subseteq P$ est clos par intervalle si pour tous $x, y \in Q$, $[x, y] \subseteq Q$.*

# Clôture par intervalle

## Définition

*Soit $(P, \leq)$ un poset. Un sous-ensemble $Q \subseteq P$ est clos par intervalle si pour tous $x, y \in Q$, $[x, y] \subseteq Q$.*

## Théorème ([G., 2010])

*L'ensemble des arbres équilibrés de taille $n$ est clos par intervalle dans le treillis de Tamari d'ordre $n$.*

# Clôture par intervalle

## Définition

*Soit $(P, \leq)$ un poset. Un sous-ensemble $Q \subseteq P$ est clos par intervalle si pour tous $x, y \in Q$, $[x, y] \subseteq Q$.*

## Théorème ([G., 2010])

*L'ensemble des arbres équilibrés de taille $n$ est clos par intervalle dans le treillis de Tamari d'ordre $n$.*

Reformulation algorithmique : impossible de rééquilibrer par des rotations droites un arbre déséquilibré obtenu par une rotation droite depuis un arbre équilibré.

# Forme des intervalles d'arbres équilibrés (1/2)

## Définition

*Hypercube de dimension $k$ : poset dont les éléments sont les sous-ensembles de $[k]$ et où l'ordre est l'inclusion ensembliste.*

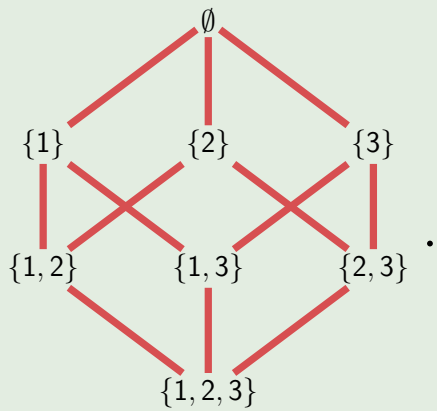
# Forme des intervalles d'arbres équilibrés (1/2)

## Définition

*Hypercube de dimension $k$ : poset dont les éléments sont les sous-ensembles de $[k]$ et où l'ordre est l'inclusion ensembliste.*

## Exemple

$k = 3$ :




.

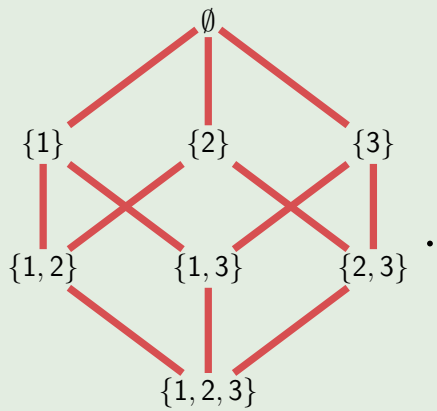
# Forme des intervalles d'arbres équilibrés (1/2)

## Définition

*Hypercube de dimension $k$ : poset dont les éléments sont les sous-ensembles de $[k]$ et où l'ordre est l'inclusion ensembliste.*

## Exemple

$k = 3$ :



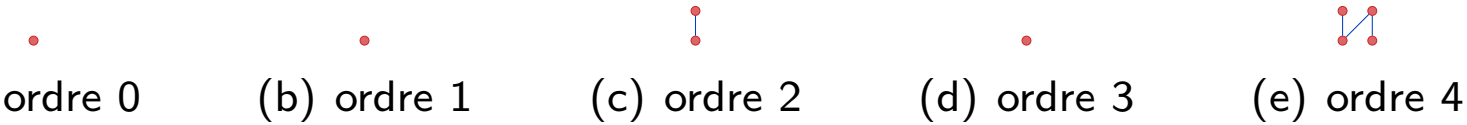

.

## Théorème ([G., 2010])

*Tout intervalle $[T_0, T_1]$ d'arbres équilibrés dans le treillis de Tamari d'ordre $n$ est isomorphe à l'hypercube de dimension $k$ où $k$ est le nombre de rotations nécessaires pour obtenir $T_1$ à partir de $T_0$.*

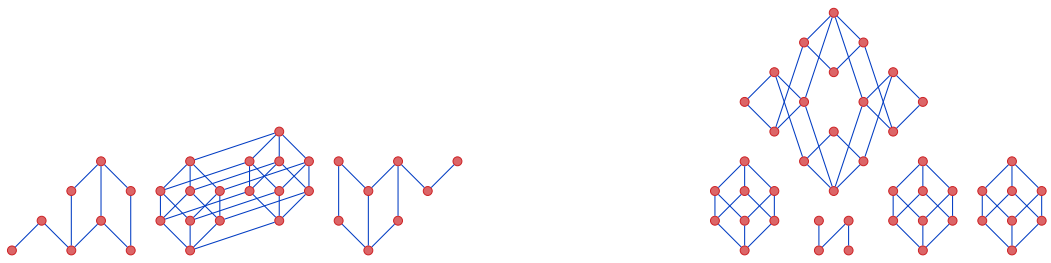
# Forme des intervalles d'arbres équilibrés (2/2)

Restriction de l'ordre de Tamari aux arbres équilibrés :

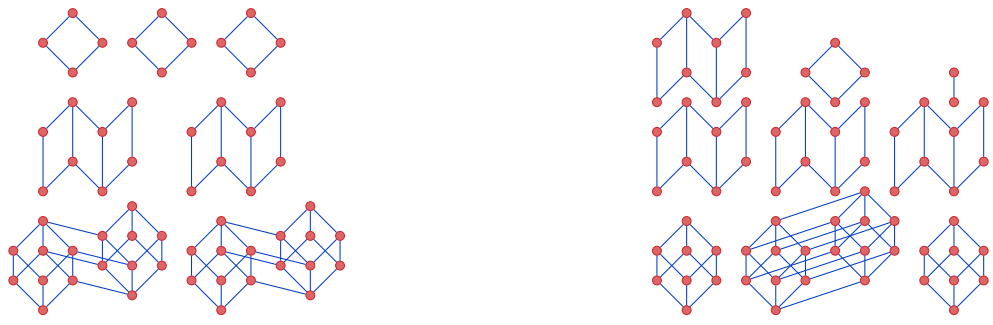


(a) ordre 0 (b) ordre 1 (c) ordre 2 (d) ordre 3 (e) ordre 4

(f) ordre 5 (g) ordre 6 (h) ordre 7



(i) ordre 8 (j) ordre 9



(k) ordre 10 (l) ordre 11

# Plan

Des structures algébriques sur les arbres
- Aperçu du travail réalisé
- Arbres équilibrés et treillis de Tamari
- L'algèbre de Hopf des couples d'arbres binaires jumeaux

# L'algèbre de Hopf **PBT**

- **FQSym** : algèbre de Hopf sur les permutations [Malvenuto, Reutenauer, 1995].

# L'algèbre de Hopf **PBT**

- **FQSym** : algèbre de Hopf sur les permutations [Malvenuto, Reutenauer, 1995].
- Base : $\{\mathbf{F}_\sigma\}_{\sigma\in\mathfrak{S}}$ ; produit : mélange décalé ; coproduit : déconcaténation et standardisation.

# L'algèbre de Hopf **PBT**

- **FQSym** : algèbre de Hopf sur les permutations [Malvenuto, Reutenauer, 1995].
- Base : $\{\mathbf{F}_\sigma\}_{\sigma\in\mathfrak{S}}$ ; produit : mélange décalé ; coproduit : déconcaténation et standardisation.

**Théorème ([Hivert, Novelli, Thibon, 2005])**

*Les éléments*

$$\mathbf{P}_T := \sum_{\substack{\sigma\in\mathfrak{S}\\ \mathrm{abr}(\sigma)=T}} \mathbf{F}_\sigma.$$

*forment une sous-algèbre de Hopf de* **FQSym**, *nommée* **PBT**.

# L'algèbre de Hopf **PBT**

- **FQSym** : algèbre de Hopf sur les permutations [Malvenuto, Reutenauer, 1995].
- Base : $\{\mathbf{F}_\sigma\}_{\sigma\in\mathfrak{S}}$ ; produit : mélange décalé ; coproduit : déconcaténation et standardisation.

## Théorème ([Hivert, Novelli, Thibon, 2005])

*Les éléments*

$$\mathbf{P}_T := \sum_{\substack{\sigma\in\mathfrak{S}\\ \mathrm{abr}(\sigma)=T}} \mathbf{F}_\sigma.$$

*forment une sous-algèbre de Hopf de* **FQSym**, *nommée* **PBT**.

## Exemple

$\mathbf{P}$ $= \mathbf{F}_{132} + \mathbf{F}_{312}$ et $\mathbf{P}$ $= \mathbf{F}_{213}$ .

# L'algèbre de Hopf **PBT**

- **FQSym** : algèbre de Hopf sur les permutations [Malvenuto, Reutenauer, 1995].
- Base : $\{\mathbf{F}_\sigma\}_{\sigma\in\mathfrak{S}}$ ; produit : mélange décalé ; coproduit : déconcaténation et standardisation.

## Théorème ([Hivert, Novelli, Thibon, 2005])

*Les éléments*

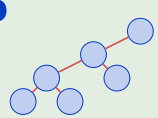
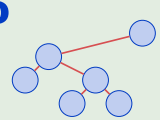
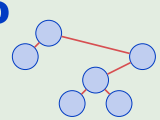
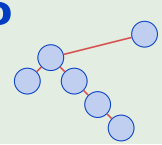
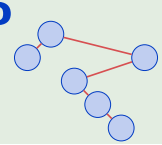
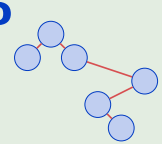
$$\mathbf{P}_T := \sum_{\substack{\sigma\in\mathfrak{S}\\ \mathrm{abr}(\sigma)=T}} \mathbf{F}_\sigma.$$

*forment une sous-algèbre de Hopf de* **FQSym**, *nommée* **PBT**.

## Exemple

$\mathbf{P}$ $= \mathbf{F}_{132} + \mathbf{F}_{312}$ et $\mathbf{P}$ $= \mathbf{F}_{213}$.

## Exemple

$\mathbf{P}$ $\cdot\,\mathbf{P}$ $= \mathbf{P}$  $+\mathbf{P}$  $+\mathbf{P}$  $+\mathbf{P}$  $+\mathbf{P}$  $+\mathbf{P}$  .

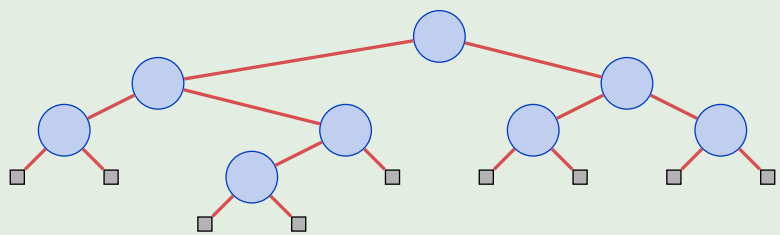
# La canopée de Viennot

Canopée d'un arbre binaire $T$ : mot sur l'alphabet $\{0, 1\}$ décrivant les orientations des feuilles de $T$.

# La canopée de Viennot

Canopée d'un arbre binaire $T$ : mot sur l'alphabet $\{0, 1\}$ décrivant les orientations des feuilles de $T$.

## Exemple

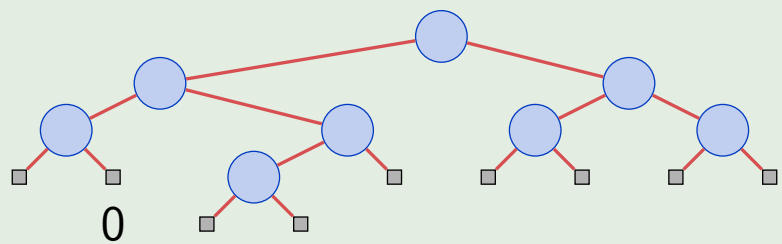


Canopée :

# La canopée de Viennot

Canopée d'un arbre binaire $T$ : mot sur l'alphabet $\{0, 1\}$ décrivant les orientations des feuilles de $T$.

## Exemple

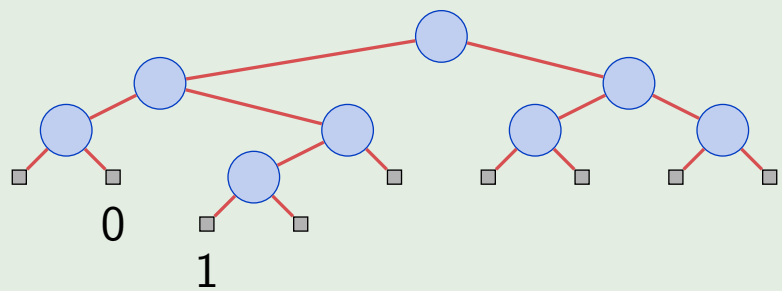



Canopée : 0

# La canopée de Viennot

Canopée d'un arbre binaire $T$ : mot sur l'alphabet $\{0, 1\}$ décrivant les orientations des feuilles de $T$.

## Exemple

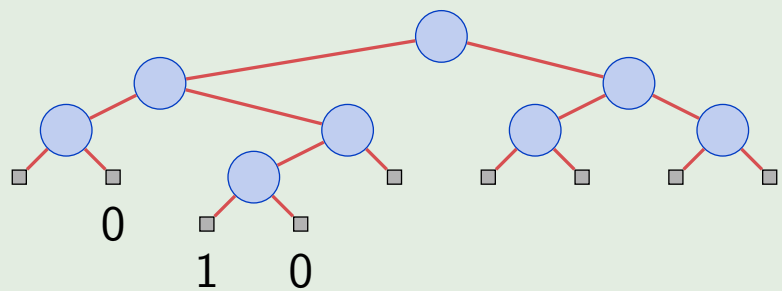



Canopée : 01

# La canopée de Viennot

Canopée d'un arbre binaire $T$ : mot sur l'alphabet $\{0, 1\}$ décrivant les orientations des feuilles de $T$.

## Exemple

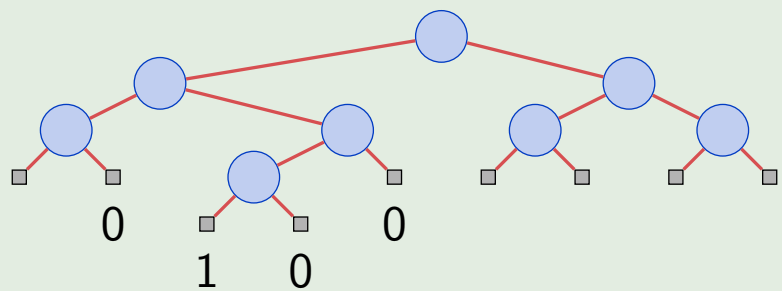



Canopée : 010

# La canopée de Viennot

Canopée d'un arbre binaire $T$ : mot sur l'alphabet $\{0, 1\}$ décrivant les orientations des feuilles de $T$.

## Exemple

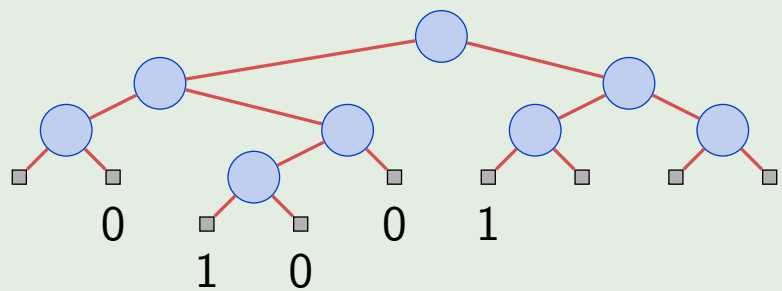



Canopée : 0100

# La canopée de Viennot

Canopée d'un arbre binaire $T$ : mot sur l'alphabet $\{0, 1\}$ décrivant les orientations des feuilles de $T$.

## Exemple

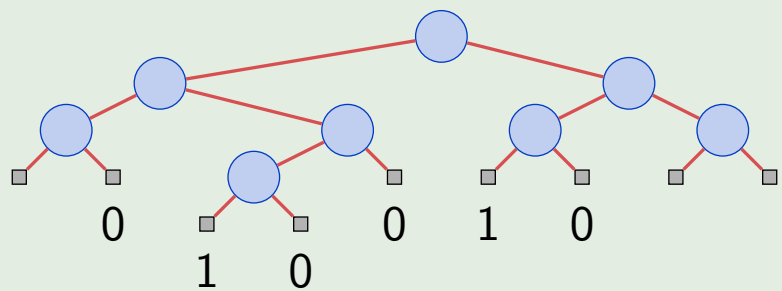



Canopée : 01001

# La canopée de Viennot

Canopée d'un arbre binaire $T$ : mot sur l'alphabet $\{0, 1\}$ décrivant les orientations des feuilles de $T$.

## Exemple

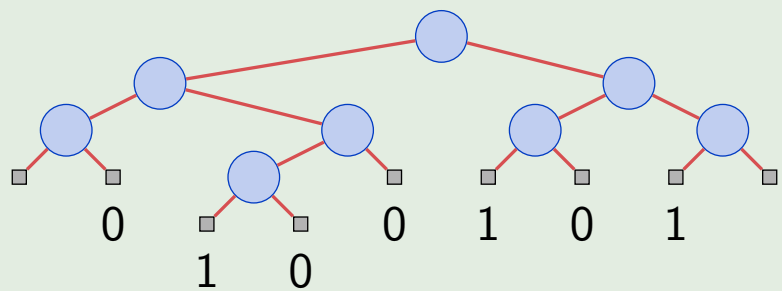



Canopée : 010010

# La canopée de Viennot

Canopée d'un arbre binaire $T$ : mot sur l'alphabet $\{0, 1\}$ décrivant les orientations des feuilles de $T$.

## Exemple




Canopée : 0100101.

# Couples d'arbres binaires jumeaux

## Définition

*Deux arbres binaires $T_G$ et $T_D$ sont jumeaux si la canopée de $T_G$ est complémentaire à celle de $T_D$.*

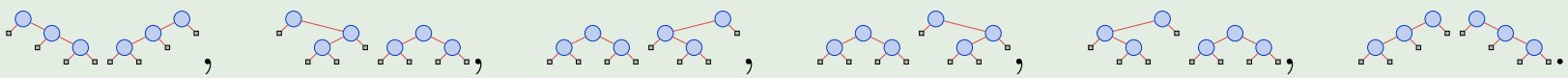
# Couples d'arbres binaires jumeaux

## Définition

*Deux arbres binaires $T_G$ et $T_D$ sont jumeaux si la canopée de $T_G$ est complémentaire à celle de $T_D$.*

## Exemple

Couples d'arbres binaires jumeaux à 3 nœuds :



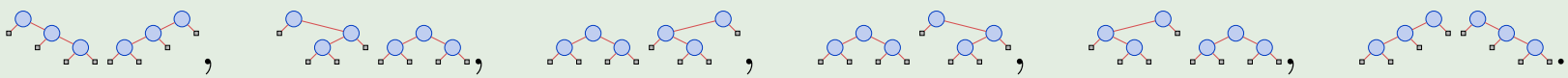
# Couples d'arbres binaires jumeaux

## Définition

*Deux arbres binaires $T_G$ et $T_D$ sont jumeaux si la canopée de $T_G$ est complémentaire à celle de $T_D$.*

## Exemple

Couples d'arbres binaires jumeaux à 3 nœuds :



## Théorème ([Dulucq, Guibert, 1994])

*L'ensemble des couples d'arbres binaires jumeaux à n nœuds est en bijection avec les permutations de Baxter de taille n.*

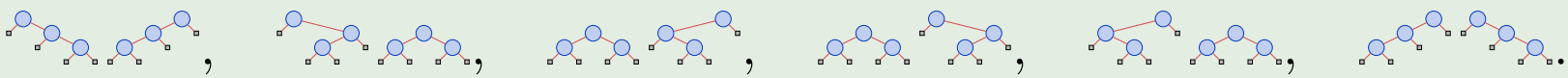
# Couples d'arbres binaires jumeaux

## Définition

*Deux arbres binaires $T_G$ et $T_D$ sont jumeaux si la canopée de $T_G$ est complémentaire à celle de $T_D$.*

## Exemple

Couples d'arbres binaires jumeaux à 3 nœuds :



## Théorème ([Dulucq, Guibert, 1994])

*L'ensemble des couples d'arbres binaires jumeaux à n nœuds est en bijection avec les permutations de Baxter de taille n.*

Permutation de Baxter : évite les motifs $2-41-3$ et $3-14-2$.

# L'insertion de Baxter

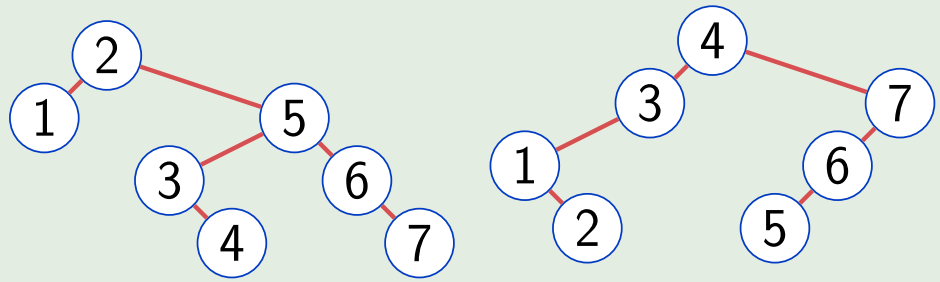
Insertion de Baxter de $\sigma \in \mathfrak{S}$ : $\mathsf{abrj}(\sigma) := (\mathsf{abr}(\sigma^{\sim}), \mathsf{abr}(\sigma))$.

# L'insertion de Baxter

Insertion de Baxter de $\sigma \in \mathfrak{S}$ : $\mathrm{abrj}(\sigma) := (\mathrm{abr}(\sigma^{\sim}), \mathrm{abr}(\sigma))$.

## Exemple

$\mathrm{abrj}(2516374) =$

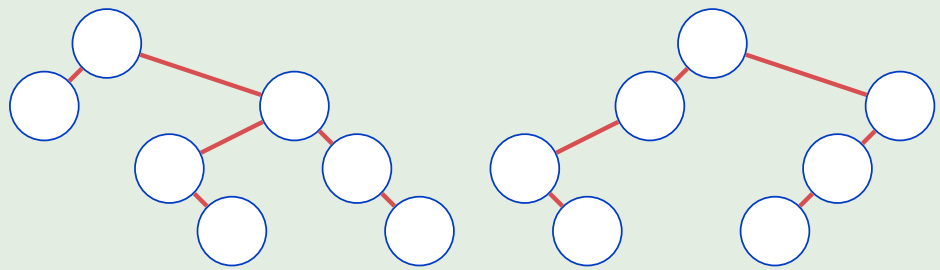


# L'insertion de Baxter

Insertion de Baxter de $\sigma \in \mathfrak{S}$ : $\mathrm{abrj}(\sigma) := (\mathrm{abr}(\sigma^{\sim}), \mathrm{abr}(\sigma))$.

## Exemple

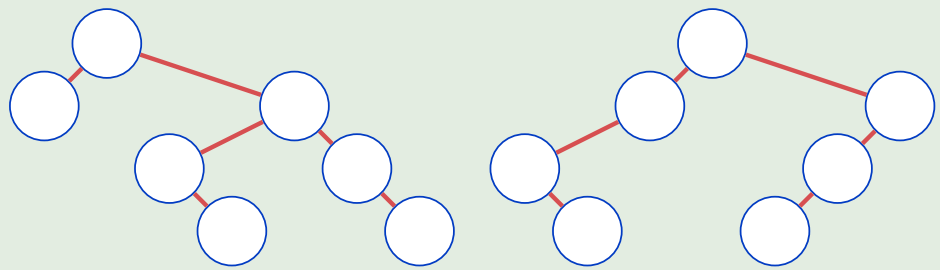
$\mathrm{abrj}(2516374) =$



# L'insertion de Baxter

Insertion de Baxter de $\sigma \in \mathfrak{S}$ : $\mathrm{abrj}(\sigma) := (\mathrm{abr}(\sigma^{\sim}), \mathrm{abr}(\sigma))$.

## Exemple

$\mathrm{abrj}(2516374) =$ 

## Proposition ([G., 2011])

*Pour tout* $\sigma \in \mathfrak{S}$, $\mathrm{abrj}(\sigma)$ *est un couple d'arbres binaires jumeaux.*

# La relation d'équivalence de Baxter

Relation d'équivalence de Baxter $\equiv_{\mathsf{B}}$ :

$$\sigma \equiv_{\mathsf{B}} \nu \quad \text{si} \quad \mathsf{abrj}(\sigma) = \mathsf{abrj}(\nu).$$

# La relation d'équivalence de Baxter

Relation d'équivalence de Baxter $\equiv_B$ :

$$\sigma \equiv_B \nu \quad \text{si} \quad \text{abrj}(\sigma) = \text{abrj}(\nu).$$

**Théorème ([G., 2011])**

*L'algorithme* abrj *est une bijection entre les classes de Baxter de permutations et les couples d'arbres binaires jumeaux.*

# La relation d'équivalence de Baxter

Relation d'équivalence de Baxter $\equiv_{\mathrm{B}}$ :

$$\sigma \equiv_{\mathrm{B}} \nu \quad \text{si} \quad \mathrm{abrj}(\sigma) = \mathrm{abrj}(\nu).$$

**Théorème ([G., 2011])**

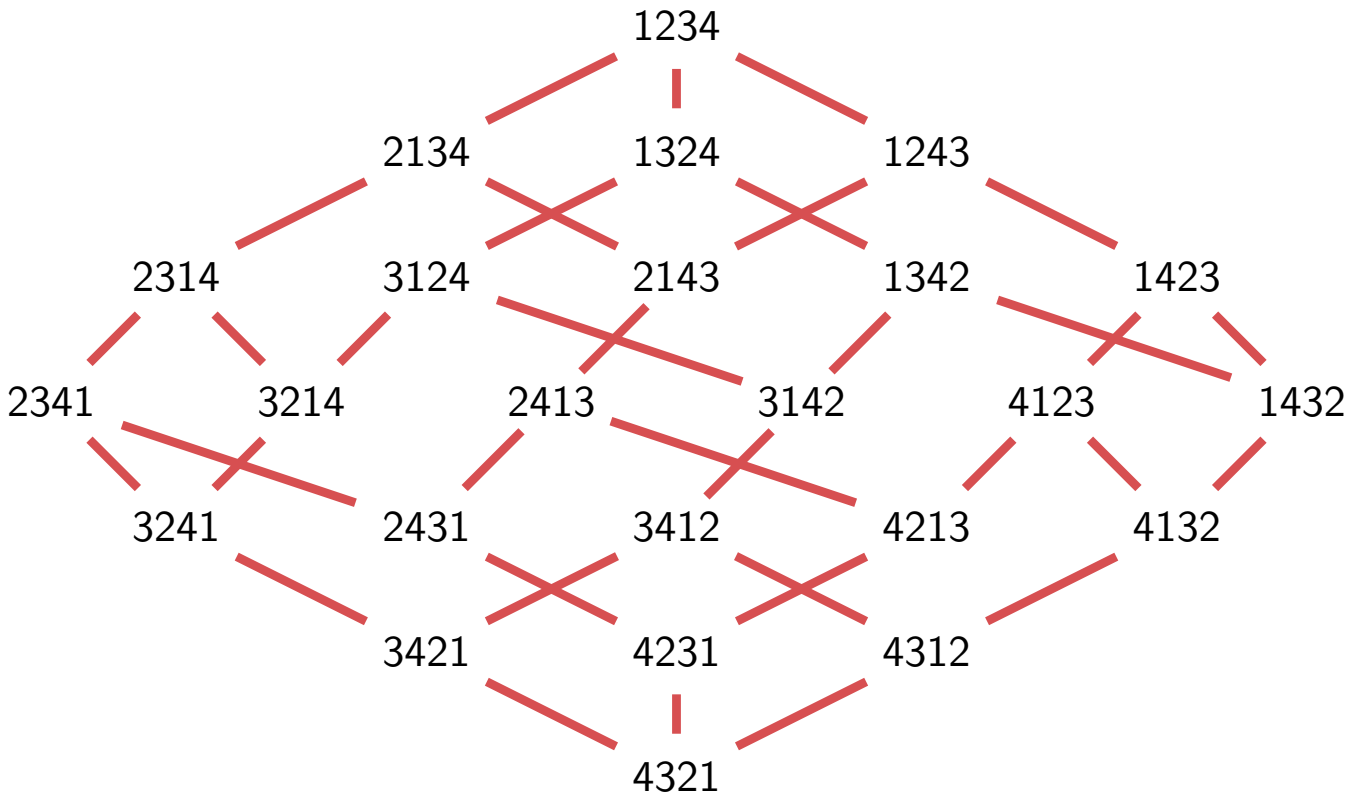
*L'algorithme* abrj *est une bijection entre les classes de Baxter de permutations et les couples d'arbres binaires jumeaux.*

**Théorème ([G., 2011])**

*La relation* $\equiv_{\mathrm{B}}$ *est une congruence de treillis du permutoèdre.*

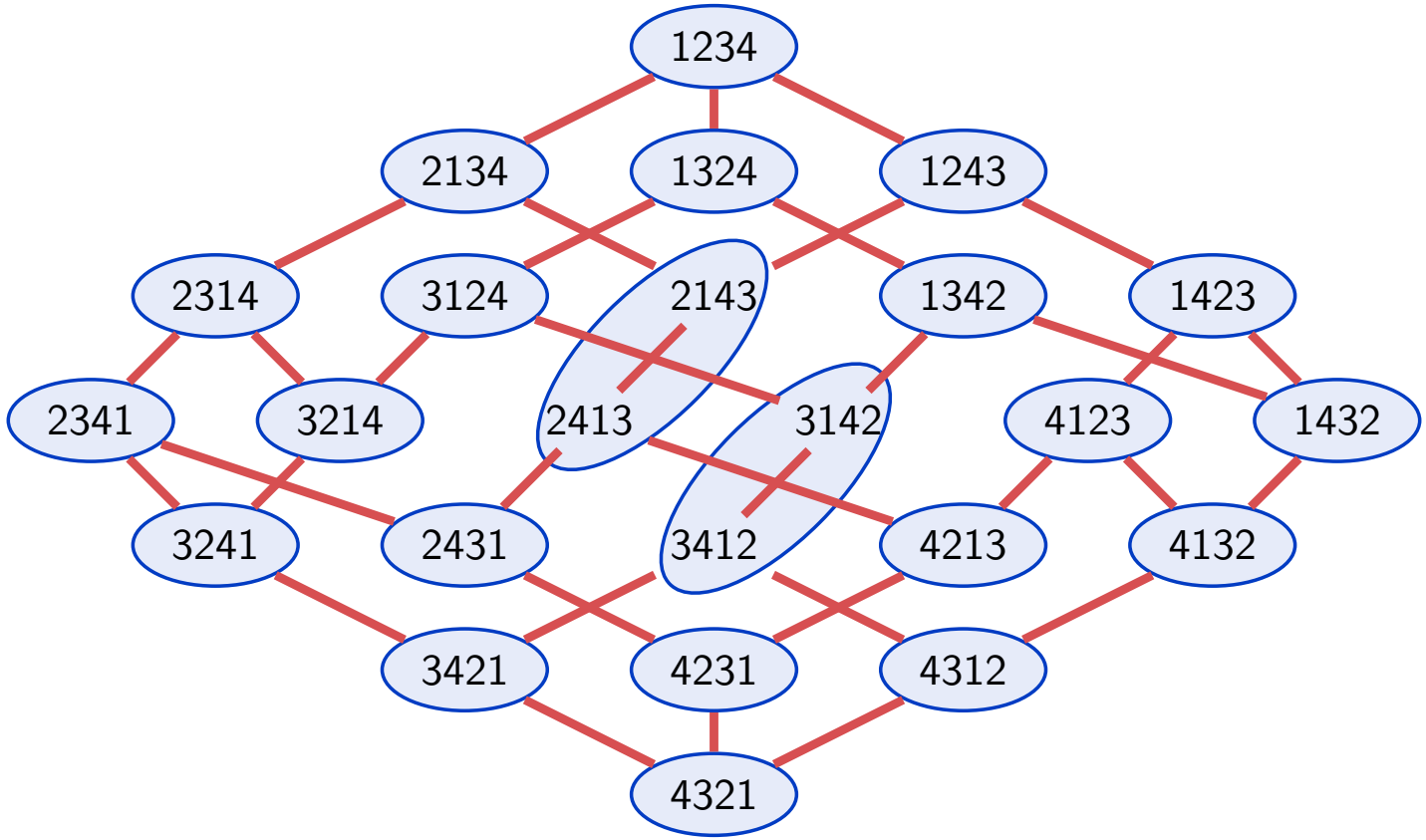
# Un quotient du permutoèdre

Permutoèdre droit d'ordre $n$ : $\mathfrak{S}_n$.



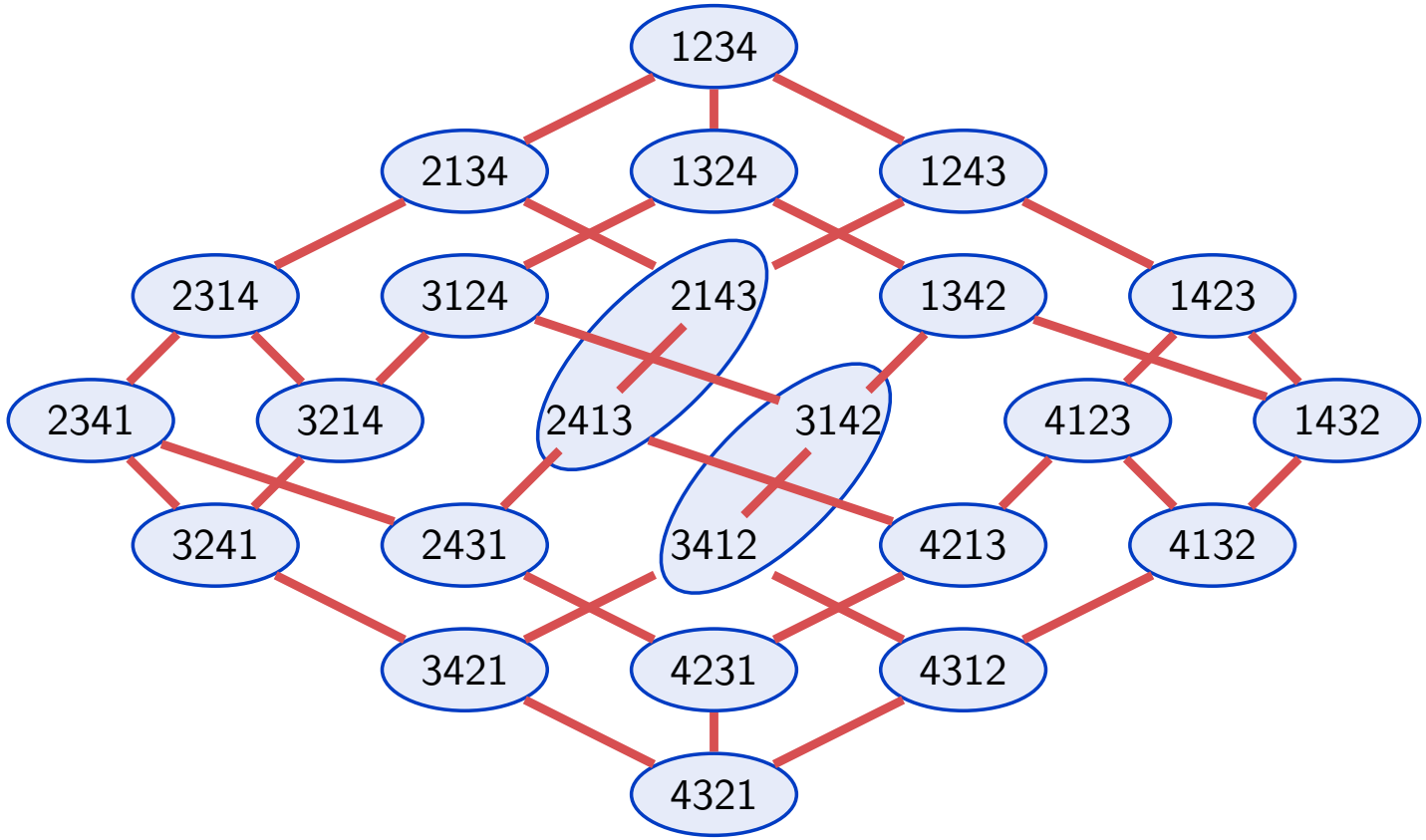
# Un quotient du permutoèdre

Treillis de Baxter d'ordre $n$ : $\mathfrak{S}_n/_{\equiv_B}$.



# Un quotient du permutoèdre

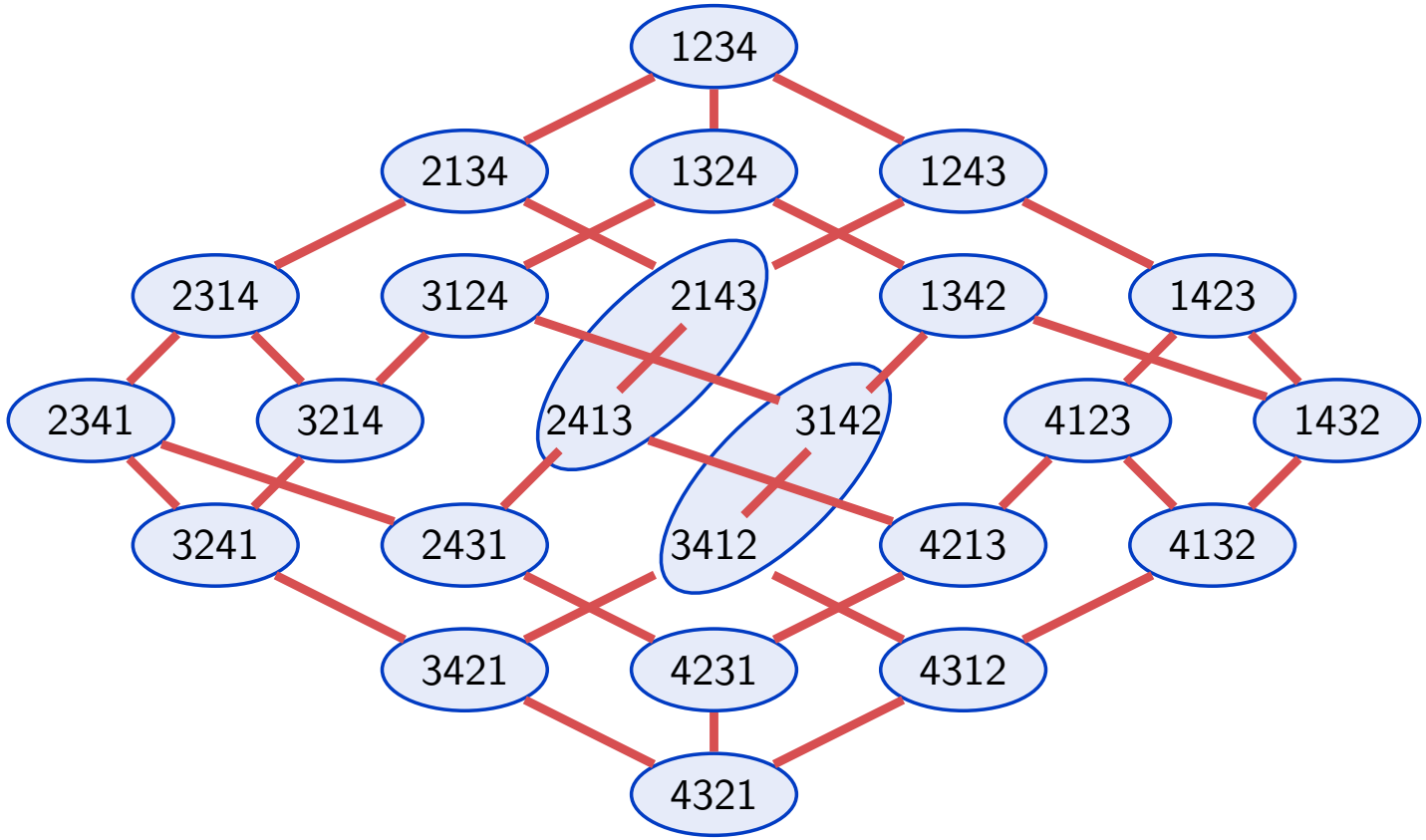
Treillis de Baxter d'ordre $n$ : $\mathfrak{S}_n/_{\equiv_B}$ .




- Treillis sur les couples d'arbres binaires jumeaux ;

# Un quotient du permutoèdre

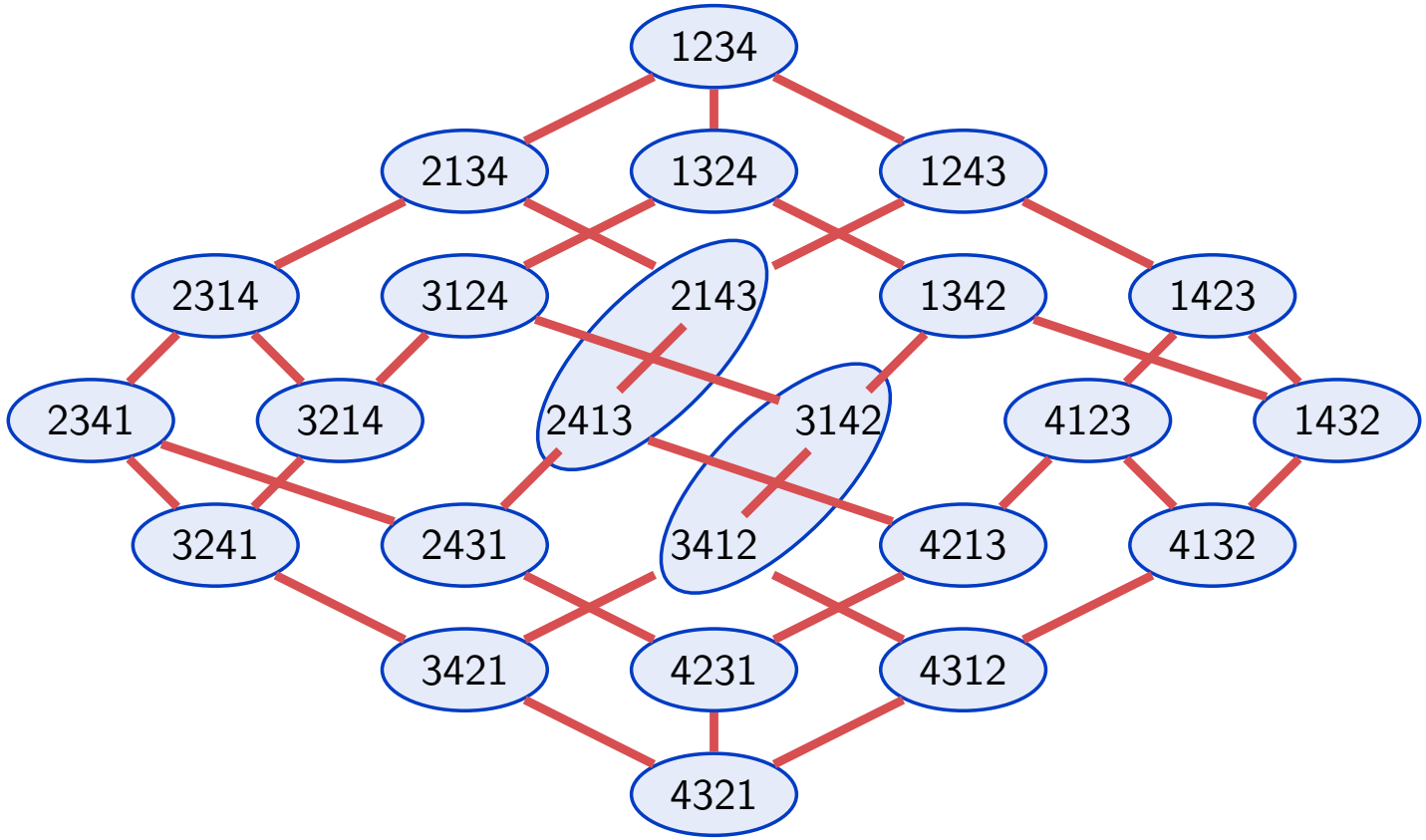
Treillis de Baxter d'ordre $n$ : $\mathfrak{S}_n/_{\equiv_B}$ .




- Treillis sur les couples d'arbres binaires jumeaux ;
- couvertures : rotations gauches et droites ;

# Un quotient du permutoèdre

Treillis de Baxter d'ordre $n$ : $\mathfrak{S}_n/_{\equiv_B}$ .




- Treillis sur les couples d'arbres binaires jumeaux ;
- couvertures : rotations gauches et droites ;
- généralise le treillis de Tamari.

# L'algèbre de Hopf **Baxter** (1/2)

## Théorème ([G., 2011])

*Les éléments*

$$\mathbf{P}_{(T_G,T_D)} := \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S} \\ \mathsf{abrj}(\sigma)=(T_G,T_D)}} \mathbf{F}_\sigma$$

*forment une sous-algèbre de Hopf de* **FQSym**, *nommée* **Baxter**.

# L'algèbre de Hopf **Baxter** (1/2)

## Théorème ([G., 2011])

*Les éléments*

$$\mathbf{P}_{(T_G,T_D)} := \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S} \\ \mathsf{abrj}(\sigma)=(T_G,T_D)}} \mathbf{F}_\sigma$$

*forment une sous-algèbre de Hopf de* **FQSym**, *nommée* **Baxter**.

Quelques propriétés :

- **PBT** est une sous-algèbre de Hopf de **Baxter** ;

# L'algèbre de Hopf **Baxter** (1/2)

## Théorème ([G., 2011])

*Les éléments*

$$\mathbf{P}_{(T_G,T_D)} := \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S} \\ \mathrm{abrj}(\sigma)=(T_G,T_D)}} \mathbf{F}_\sigma$$

*forment une sous-algèbre de Hopf de* **FQSym**, *nommée* **Baxter**.

Quelques propriétés :

- **PBT** est une sous-algèbre de Hopf de **Baxter** ;
- le treillis de Baxter permet de calculer le produit de **Baxter** ;

# L'algèbre de Hopf **Baxter** (1/2)

## Théorème ([G., 2011])

*Les éléments*

$$\mathbf{P}_{(T_G,T_D)} := \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S} \\ \mathrm{abrj}(\sigma)=(T_G,T_D)}} \mathbf{F}_\sigma$$

*forment une sous-algèbre de Hopf de* **FQSym**, *nommée* **Baxter**.

Quelques propriétés :

- **PBT** est une sous-algèbre de Hopf de **Baxter** ;
- le treillis de Baxter permet de calculer le produit de **Baxter** ;
- **Baxter** admet une structure de bigèbre bidendriforme ;

# L'algèbre de Hopf **Baxter** (1/2)

## Théorème ([G., 2011])

*Les éléments*

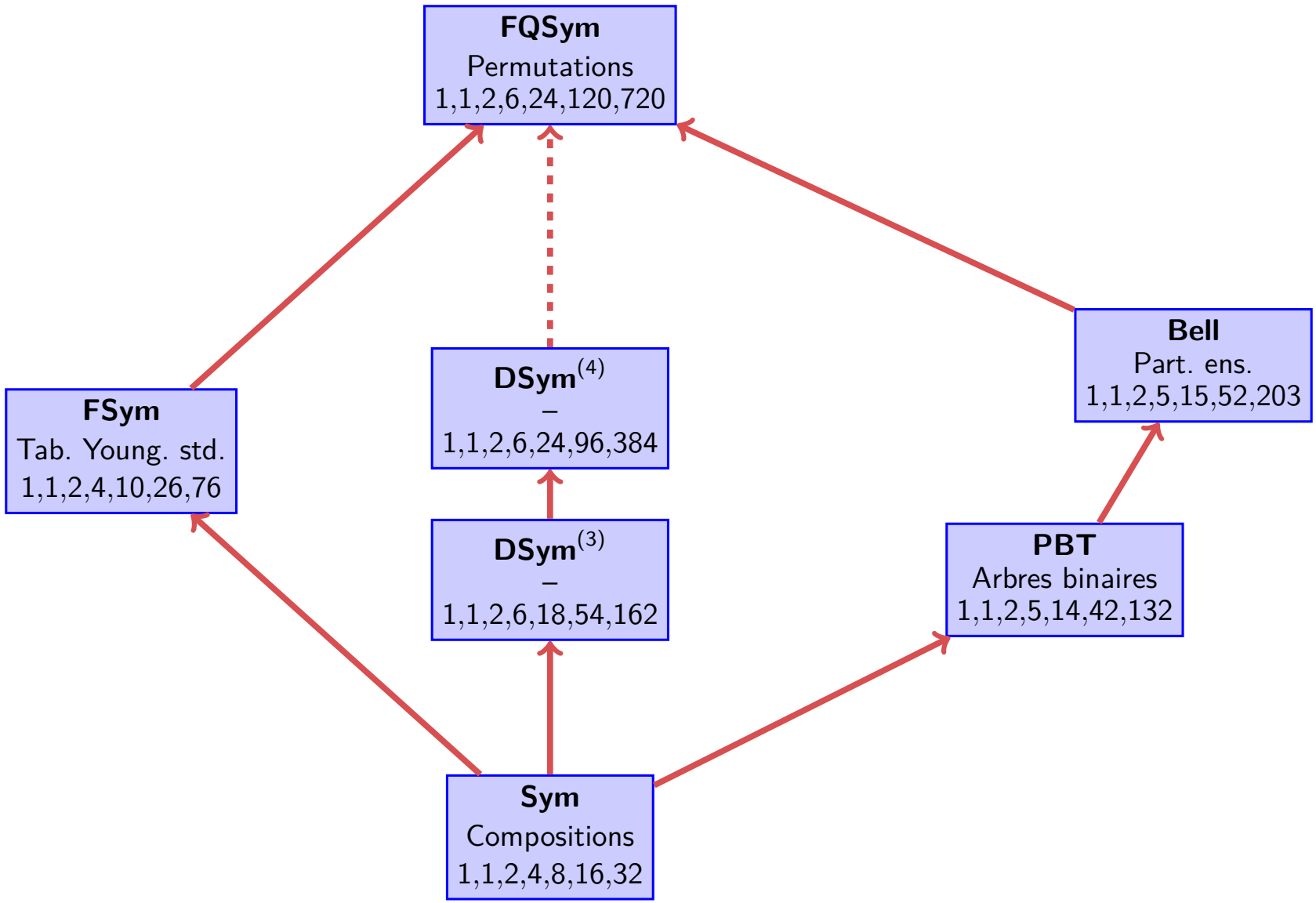
$$\mathbf{P}_{(T_G,T_D)} := \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S} \\ \mathrm{abrj}(\sigma)=(T_G,T_D)}} \mathbf{F}_\sigma$$

*forment une sous-algèbre de Hopf de* **FQSym**, *nommée* **Baxter**.

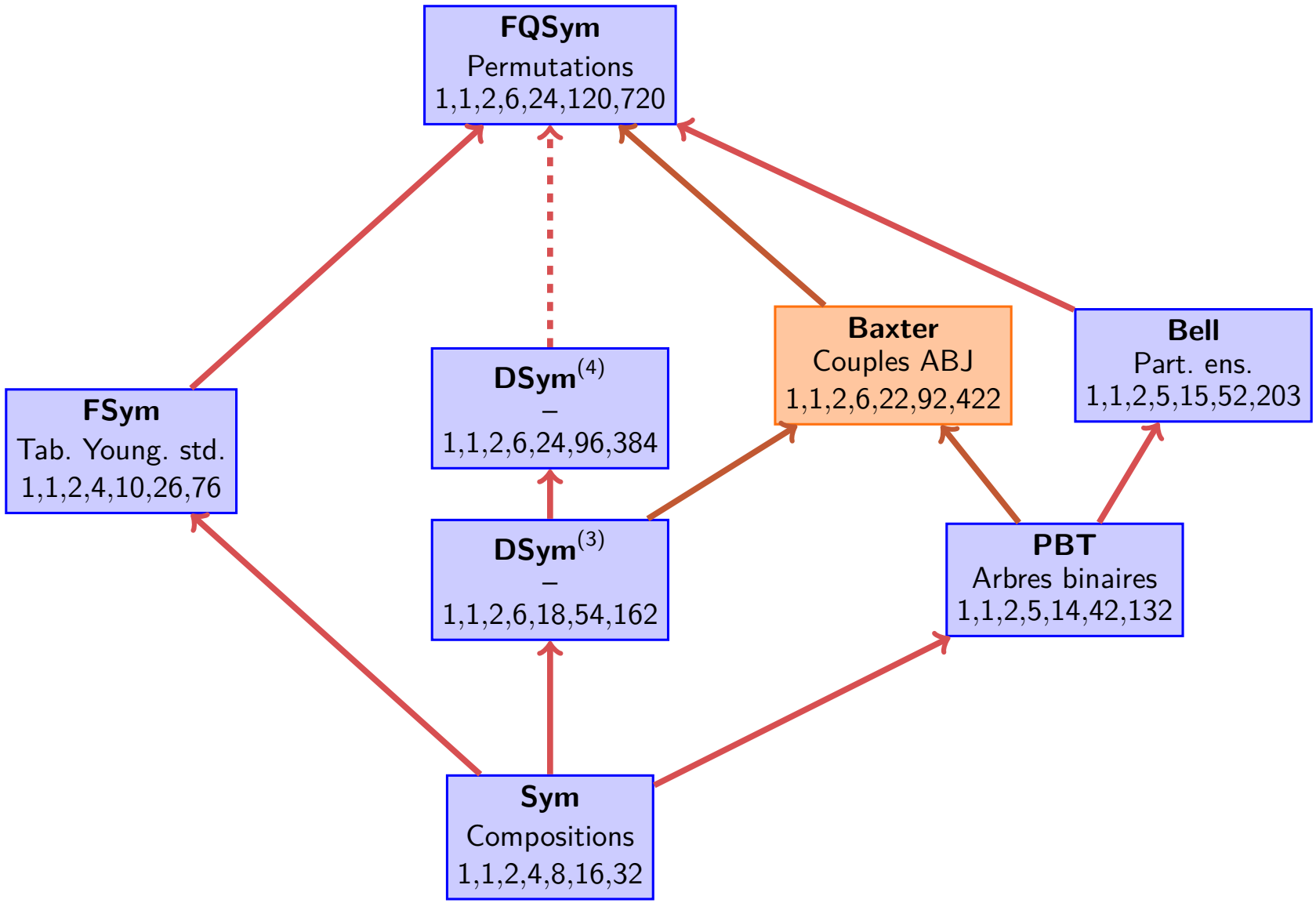
Quelques propriétés :

- **PBT** est une sous-algèbre de Hopf de **Baxter** ;
- le treillis de Baxter permet de calculer le produit de **Baxter** ;
- **Baxter** admet une structure de bigèbre bidendriforme ;
- **Baxter** est libre et autoduale.

# L'algèbre de Hopf **Baxter** (2/2)



# L'algèbre de Hopf **Baxter** (2/2)



# Plan

Grammaires synchrones et dénombrement
- Définitions et propriétés
- Motifs de déséquilibre et arbres équilibrés maximaux

# Plan

Grammaires synchrones et dénombrement
Définitions et propriétés
Motifs de déséquilibre et arbres équilibrés maximaux

# Les arbres à bourgeons

$B := \{x_1, \ldots, x_k\}$ : alphabet fini et non vide.

## Définition

*Arbre à bourgeons : arbre plan enraciné où les feuilles (les bourgeons) sont étiquetées sur $B$.*

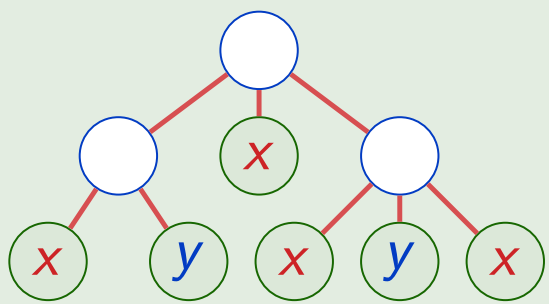
# Les arbres à bourgeons

$B := \{x_1, \ldots, x_k\}$ : alphabet fini et non vide.

## Définition

*Arbre à bourgeons : arbre plan enraciné où les feuilles (les bourgeons) sont étiquetées sur $B$.*

## Exemple



# Les arbres à bourgeons

$B := \{x_1, \ldots, x_k\}$ : alphabet fini et non vide.

## Définition

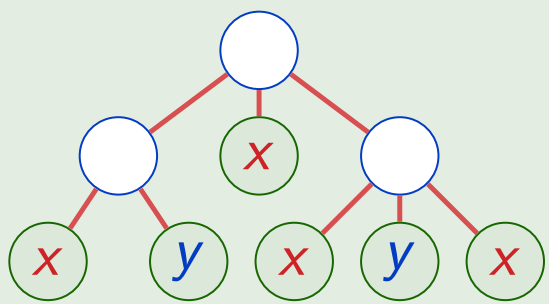
*Arbre à bourgeons : arbre plan enraciné où les feuilles (les bourgeons) sont étiquetées sur $B$.*

Évaluation $\mathrm{ev}(D)$ d'un arbre à bourgeons $D$ :

$$\mathrm{ev}(D) := x_1^{\alpha_1} \ldots x_k^{\alpha_k},$$

où $\alpha_i$ est le nombre d'occurrences de bourgeons étiquetés par $x_i$ dans $D$.

## Exemple



# Les arbres à bourgeons

$B := \{x_1, \ldots, x_k\}$ : alphabet fini et non vide.

## Définition

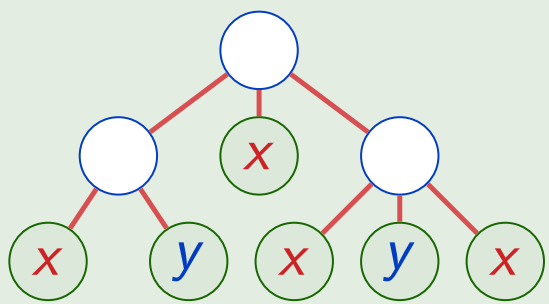
*Arbre à bourgeons : arbre plan enraciné où les feuilles (les bourgeons) sont étiquetées sur $B$.*

Évaluation $\mathrm{ev}(D)$ d'un arbre à bourgeons $D$ :

$$\mathrm{ev}(D) := x_1^{\alpha_1} \ldots x_k^{\alpha_k},$$

où $\alpha_i$ est le nombre d'occurrences de bourgeons étiquetés par $x_i$ dans $D$.

## Exemple




$\xrightarrow{\mathrm{ev}}$ $x^4 y^2$

# Grammaires synchrones (1/4)

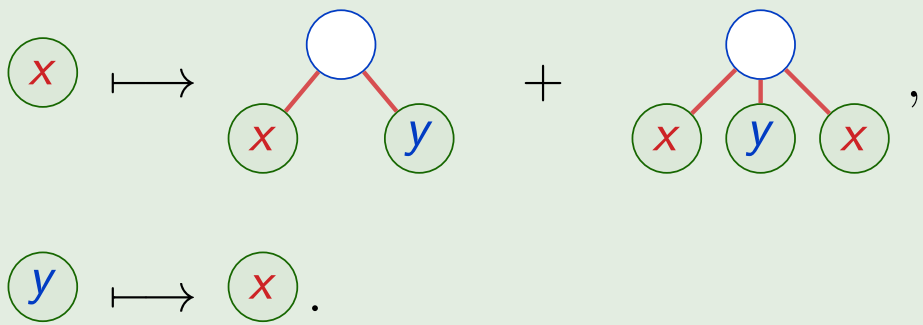
Grammaire synchrone : grammaire d'arbres où la substitution des symboles non terminaux (les bourgeons) se fait de manière synchrone.

# Grammaires synchrones (1/4)

Grammaire synchrone : grammaire d'arbres où la substitution des symboles non terminaux (les bourgeons) se fait de manière synchrone.

## Exemple

Soient les règles de substitution

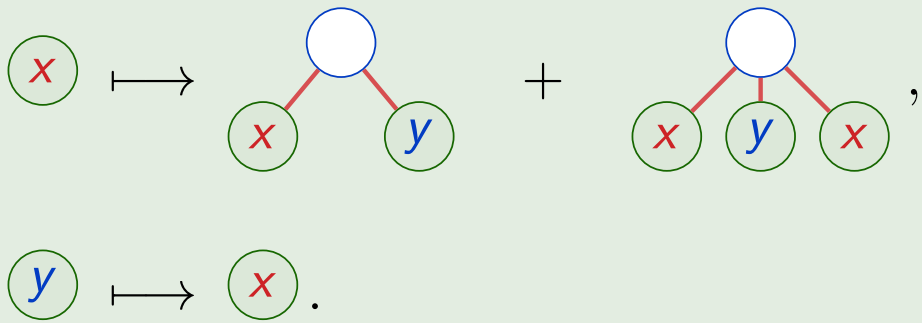


# Grammaires synchrones (1/4)

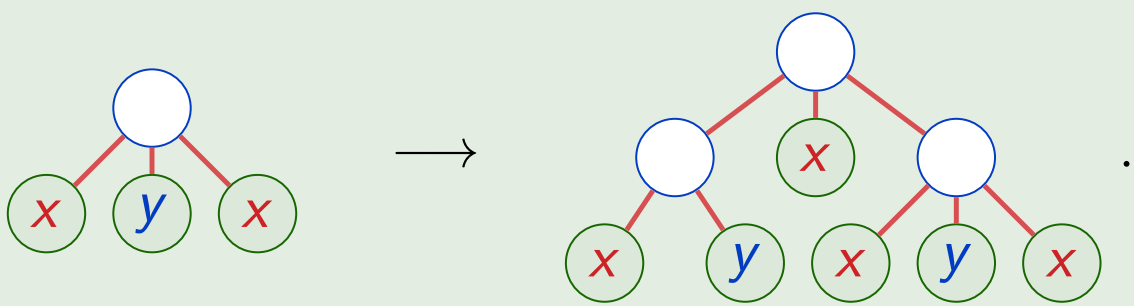
Grammaire synchrone : grammaire d'arbres où la substitution des symboles non terminaux (les bourgeons) se fait de manière synchrone.

## Exemple

Soient les règles de substitution




Une dérivation synchrone :



# Grammaires synchrones (2/4)

## Définition

*Un arbre à bourgeons $D_\ell$ est engendré par une grammaire synchrone $S$ s'il existe des arbres à bourgeons $D_1, \ldots, D_{\ell-1}$ tels que*

$$\textcircled{x} \to D_1 \to \cdots \to D_{\ell-1} \to D_\ell.$$

$\textcircled{x}$ : axiome de la grammaire synchrone.

# Grammaires synchrones (2/4)

## Définition

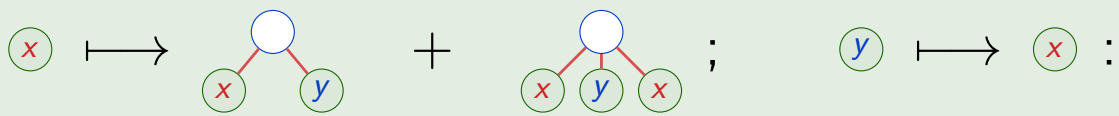
*Un arbre à bourgeons $D_\ell$ est engendré par une grammaire synchrone $S$ s'il existe des arbres à bourgeons $D_1, \ldots, D_{\ell-1}$ tels que*

$$\textcircled{x} \to D_1 \to \cdots \to D_{\ell-1} \to D_\ell.$$

$\textcircled{x}$ : axiome de la grammaire synchrone.

## Exemple

Génération d'un arbre par la grammaire synchrone



# Grammaires synchrones (2/4)

## Définition

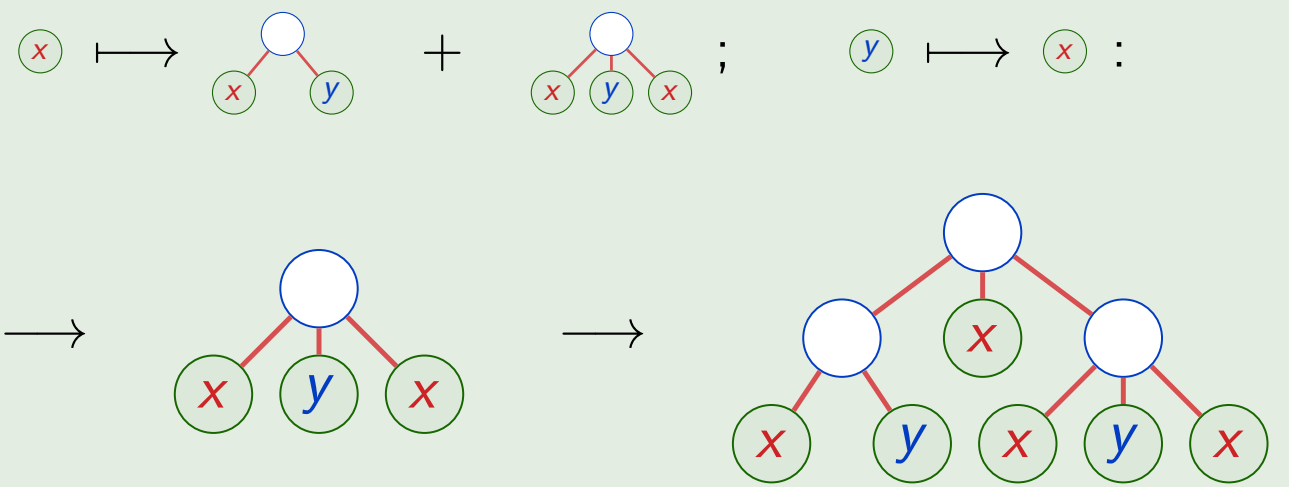
*Un arbre à bourgeons $D_\ell$ est engendré par une grammaire synchrone $S$ s'il existe des arbres à bourgeons $D_1, \ldots, D_{\ell-1}$ tels que*

$$\textcircled{x} \to D_1 \to \cdots \to D_{\ell-1} \to D_\ell.$$

$\textcircled{x}$ : axiome de la grammaire synchrone.

## Exemple

Génération d'un arbre par la grammaire synchrone



# Grammaires synchrones (3/4)

## Définition

*La série génératrice d'une grammaire synchrone $S$ est la série*

$$\mathcal{S}_S(t, x_1, \ldots, x_k) := \sum_{\ell \geq 0} \sum_{\textcircled{x} \to D_1 \to \cdots \to D_\ell} \mathrm{ev}(D_\ell) t^\ell.$$

# Grammaires synchrones (3/4)

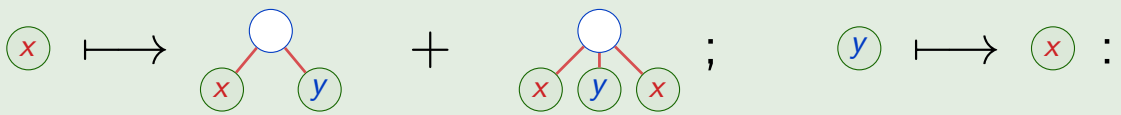
## Définition

*La série génératrice d'une grammaire synchrone $S$ est la série*

$$\mathcal{S}_S(t, x_1, \ldots, x_k) := \sum_{\ell \geq 0} \sum_{x \to D_1 \to \cdots \to D_\ell} \mathrm{ev}(D_\ell) t^\ell.$$

## Exemple

Série génératrice de la grammaire synchrone



# Grammaires synchrones (3/4)

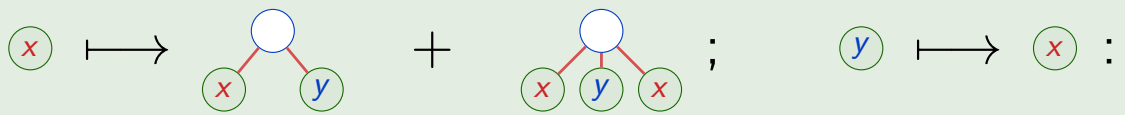
## Définition

*La série génératrice d'une grammaire synchrone $S$ est la série*

$$\mathcal{S}_S(t, x_1, \ldots, x_k) := \sum_{\ell \geq 0} \sum_{x \to D_1 \to \cdots \to D_\ell} \mathrm{ev}(D_\ell) t^\ell.$$

## Exemple

Série génératrice de la grammaire synchrone




$$\begin{aligned}\mathcal{S}_S(t, x, y) = x &\\ &+ \left(xy + x^2 y\right) t \\ &+ \left(x^2 y + x^3 y + x^3 y^2 + 2x^4 y^2 + x^5 y^2\right) t^2 \\ &+ \cdots\end{aligned}$$

# Grammaires synchrones (3/4)

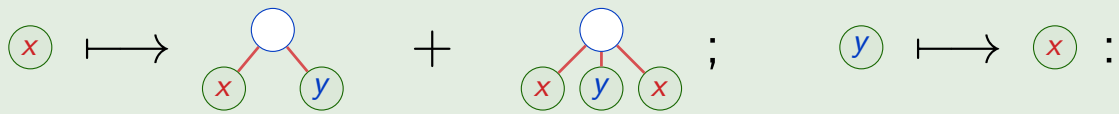
## Définition

*La série génératrice d'une grammaire synchrone $S$ est la série*

$$\mathcal{S}_S(t, x_1, \ldots, x_k) := \sum_{\ell \geq 0} \sum_{x \to D_1 \to \cdots \to D_\ell} \mathrm{ev}(D_\ell) t^\ell.$$

## Exemple

Série génératrice de la grammaire synchrone




$$\begin{aligned}\mathcal{S}_S(t, x, y) = x & \\ & + (xy + x^2 y)\, t \\ & + (x^2 y + x^3 y + x^3 y^2 + 2x^4 y^2 + x^5 y^2)\, t^2 \\ & + \cdots\end{aligned}$$

$\mathcal{S}_S(1, x_1, \ldots, x_k)$ bien définie et $S$ non ambiguë $\Longrightarrow$
$[u]\mathcal{S}_S(1, x_1, \ldots, x_k) =$ nombre d'arbres engendrés par $S$ d'évaluation $u$.

# Grammaires synchrones (4/4)

À chaque lettre $x$ de $B$, on associe le polynôme

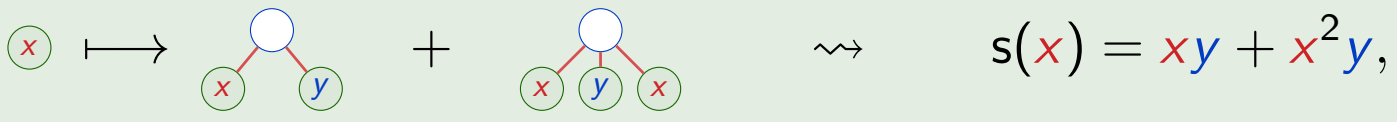
$$\mathsf{s}(x) := \sum_{(x) \mapsto D \in S} \mathsf{ev}(D).$$

# Grammaires synchrones (4/4)

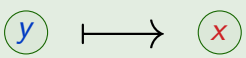
À chaque lettre $x$ de $B$, on associe le polynôme

$$\mathsf{s}(x) := \sum_{x \mapsto D \in S} \mathsf{ev}(D).$$

## Exemple




$$\rightsquigarrow \quad \mathsf{s}(x) = xy + x^2y,$$




$$\rightsquigarrow \quad \mathsf{s}(y) = x.$$

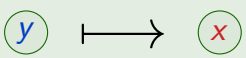
# Grammaires synchrones (4/4)

À chaque lettre $x$ de $B$, on associe le polynôme

$$\mathrm{s}(x) := \sum_{x \mapsto D \in S} \mathrm{ev}(D).$$

## Exemple

$$\rightsquigarrow \quad \mathrm{s}(x) = xy + x^2y,$$




$$\rightsquigarrow \quad \mathrm{s}(y) = x.$$

## Proposition ([G., 2011])

*Si* $\mathcal{S}_S(1, x_1, \ldots, x_k)$ *est bien définie,*

$$\mathcal{S}_S(1, x_1, \ldots, x_k) = x + \mathcal{S}_S(1, \mathrm{s}(x_1), \ldots, \mathrm{s}(x_k)).$$

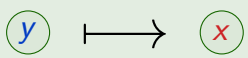
# Grammaires synchrones (4/4)

À chaque lettre $x$ de $B$, on associe le polynôme

$$\mathrm{s}(x) := \sum_{x \mapsto D \in S} \mathrm{ev}(D).$$

## Exemple

$$\rightsquigarrow \quad \mathrm{s}(x) = xy + x^2y,$$




$$\rightsquigarrow \quad \mathrm{s}(y) = x.$$

## Proposition ([G., 2011])

*Si* $\mathcal{S}_S\,(1, x_1, \ldots, x_k)$ *est bien définie,*

$$\mathcal{S}_S\,(1, x_1, \ldots, x_k) = x + \mathcal{S}_S\,(1, \mathrm{s}\,(x_1), \ldots, \mathrm{s}\,(x_k))\,.$$

## Exemple

$$\mathcal{S}_S(1, x, y) = x + \mathcal{S}_S(1, xy + x^2y, x)$$

# Plan

Grammaires synchrones et dénombrement
Définitions et propriétés
Motifs de déséquilibre et arbres équilibrés maximaux

# Motifs de déséquilibre

## Définition

*Motif de déséquilibre : arbre binaire sans feuille, étiqueté sur $\mathbb{Z}$.*

# Motifs de déséquilibre

## Définition

*Motif de déséquilibre : arbre binaire sans feuille, étiqueté sur $\mathbb{Z}$.*

On note $T^{\mathrm{d}}$ l'arbre $T$ étiqueté par les déséquilibres de ses nœuds.

## Définition

*Occurrence d'un motif $m$ dans un arbre $T$ : composante connexe de $T^{\mathrm{d}}$ de même forme et de mêmes étiquettes que $m$.*

# Motifs de déséquilibre

## Définition

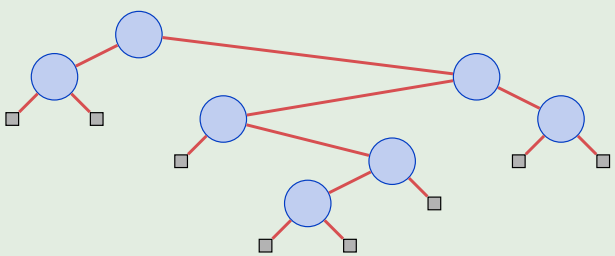
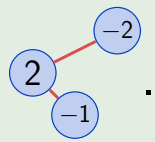
*Motif de déséquilibre : arbre binaire sans feuille, étiqueté sur $\mathbb{Z}$.*

On note $T^{\mathrm{d}}$ l'arbre $T$ étiqueté par les déséquilibres de ses nœuds.

## Définition

*Occurrence d'un motif $m$ dans un arbre $T$ : composante connexe de $T^{\mathrm{d}}$ de même forme et de mêmes étiquettes que $m$.*

## Exemple

L'arbre  admet une occurrence du motif 

.

# Motifs de déséquilibre

## Définition

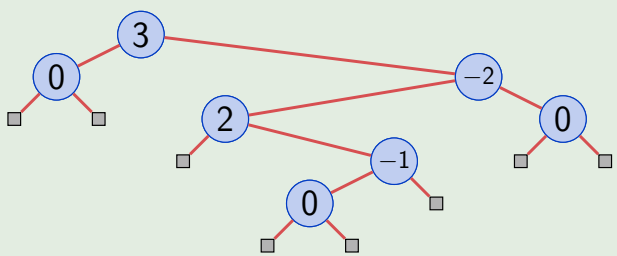
*Motif de déséquilibre : arbre binaire sans feuille, étiqueté sur $\mathbb{Z}$.*

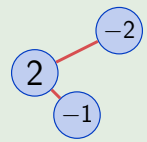
On note $T^{\mathrm{d}}$ l'arbre $T$ étiqueté par les déséquilibres de ses nœuds.

## Définition

*Occurrence d'un motif $m$ dans un arbre $T$ : composante connexe de $T^{\mathrm{d}}$ de même forme et de mêmes étiquettes que $m$.*

## Exemple

L'arbre 

admet une occurrence du motif 

.

# Motifs de déséquilibre

## Définition

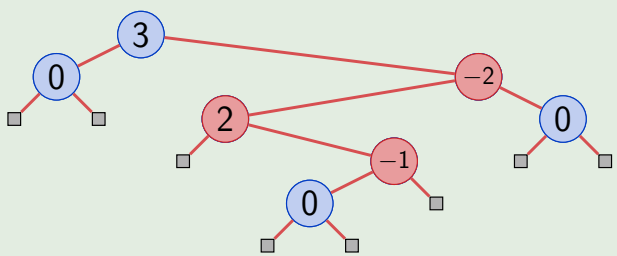
*Motif de déséquilibre : arbre binaire sans feuille, étiqueté sur $\mathbb{Z}$.*

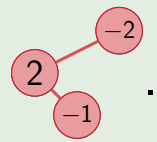
On note $T^{\mathrm{d}}$ l'arbre $T$ étiqueté par les déséquilibres de ses nœuds.

## Définition

*Occurrence d'un motif $m$ dans un arbre $T$ : composante connexe de $T^{\mathrm{d}}$ de même forme et de mêmes étiquettes que $m$.*

## Exemple

L'arbre 

admet une occurrence du motif 

.

# Les arbres équilibrés maximaux

## Définition

*Arbre équilibré maximal : arbre équilibré tel que tout arbre qui lui est supérieur pour l'ordre de Tamari est déséquilibré.*

# Les arbres équilibrés maximaux

## Définition

*Arbre équilibré maximal : arbre équilibré tel que tout arbre qui lui est supérieur pour l'ordre de Tamari est déséquilibré.*

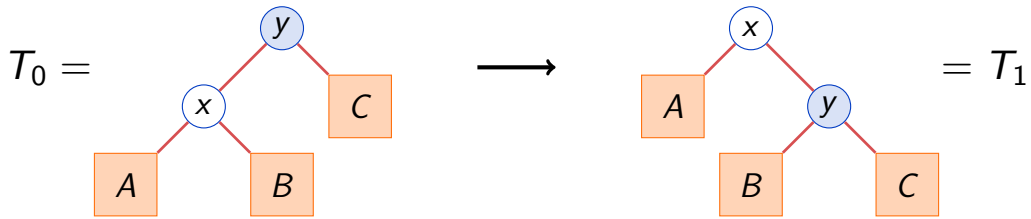
## Proposition ([G., 2010])

*Un arbre équilibré est maximal si et seulement s'il évite l'ensemble de motifs*

$$M_{\max} := \left\{ \begin{array}{c} -1 \\ -1 \end{array}, \quad \begin{array}{c} -1 \\ 0 \end{array} \right\}.$$

# Démonstration (1/3)

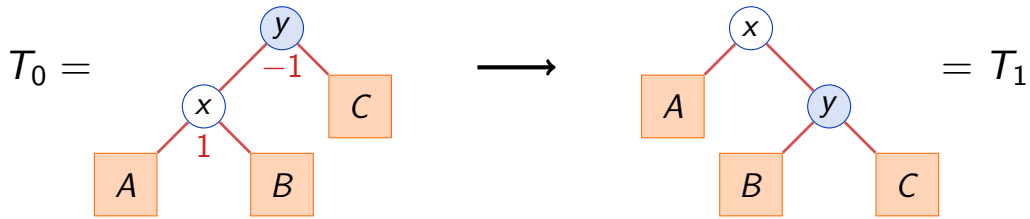
Lors d'une rotation $T_0 \nwarrow T_1$,




les déséquilibres $\mathrm{d}_{T_1}(x)$ et $\mathrm{d}_{T_1}(y)$ dépendent uniquement de $\mathrm{d}_{T_0}(x)$ et $\mathrm{d}_{T_0}(y)$.

# Démonstration (1/3)

Lors d'une rotation $T_0 \nwarrow T_1$,

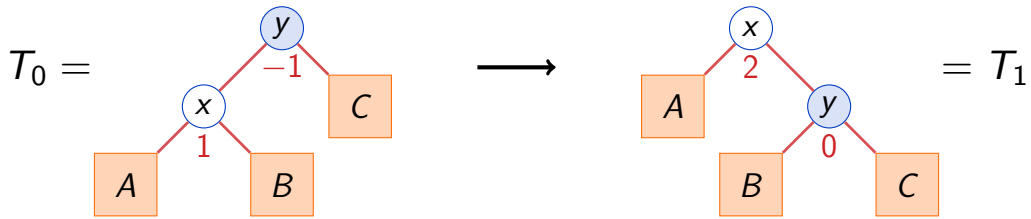



les déséquilibres $\mathrm{d}_{T_1}(x)$ et $\mathrm{d}_{T_1}(y)$ dépendent uniquement de $\mathrm{d}_{T_0}(x)$ et $\mathrm{d}_{T_0}(y)$.

Par exemple, pour $\mathrm{d}_{T_0}(x) = 1$ et $\mathrm{d}_{T_0}(y) = -1$,

# Démonstration (1/3)

Lors d'une rotation $T_0 \nwarrow T_1$,




les déséquilibres $\mathrm{d}_{T_1}(x)$ et $\mathrm{d}_{T_1}(y)$ dépendent uniquement de $\mathrm{d}_{T_0}(x)$ et $\mathrm{d}_{T_0}(y)$.

Par exemple, pour $\mathrm{d}_{T_0}(x) = 1$ et $\mathrm{d}_{T_0}(y) = -1$, on a

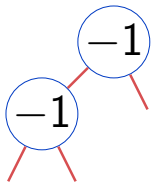
$$\mathrm{d}_{T_1}(y) = \mathrm{h}(C) - \mathrm{h}(B) = 0$$

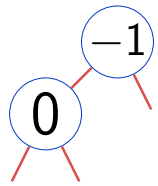
et

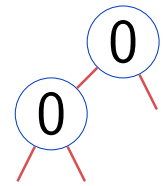
$$\mathrm{d}_{T_1}(x) = \mathrm{h}((B, C)) + 1 - \mathrm{h}(A) = 2.$$

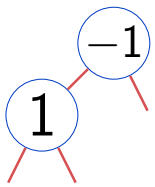
# Démonstration (2/3)

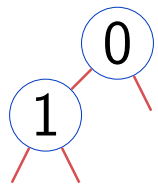
Neuf cas de rotation dans un arbre équilibré :

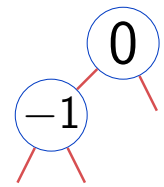


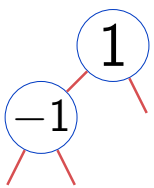



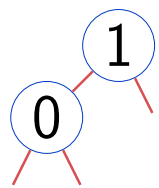



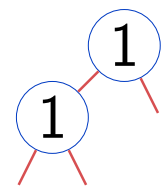



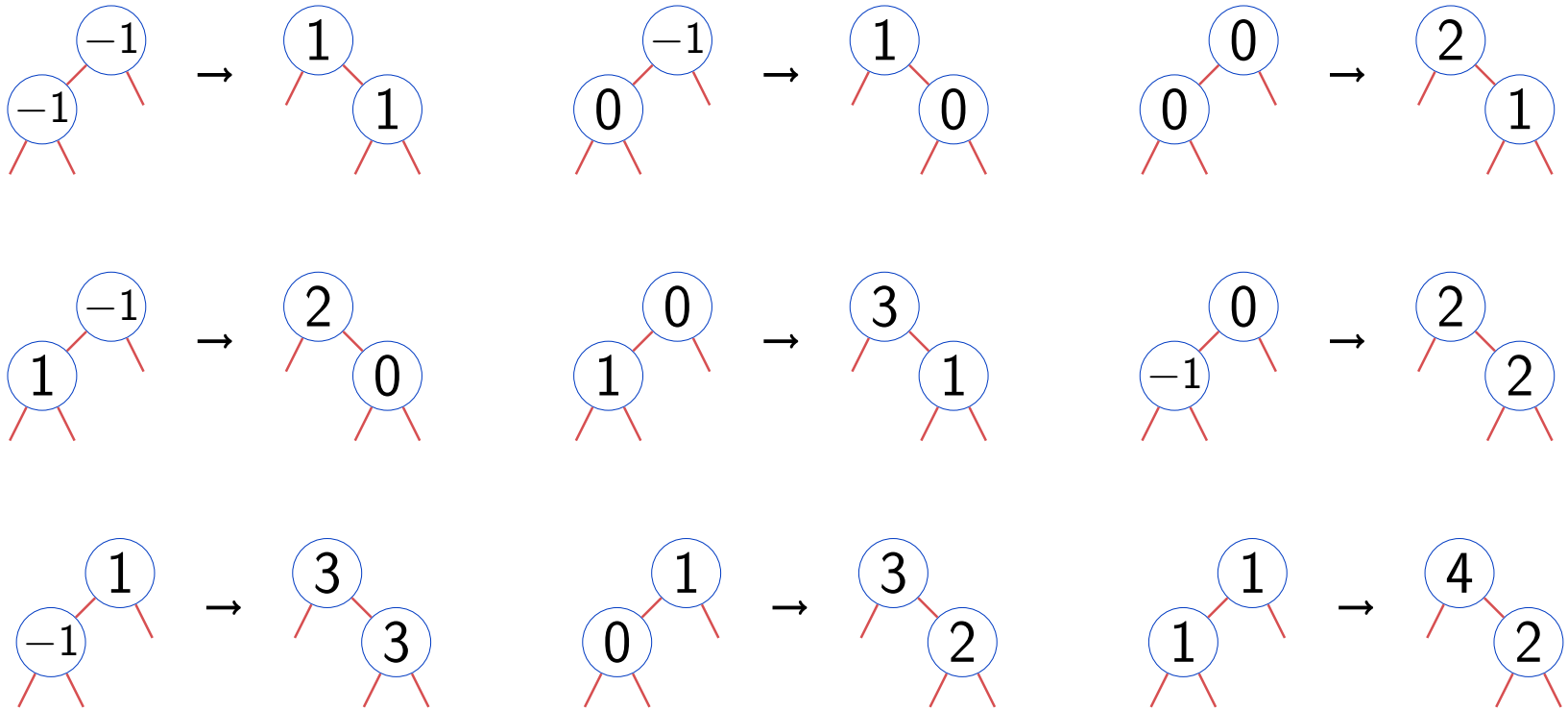



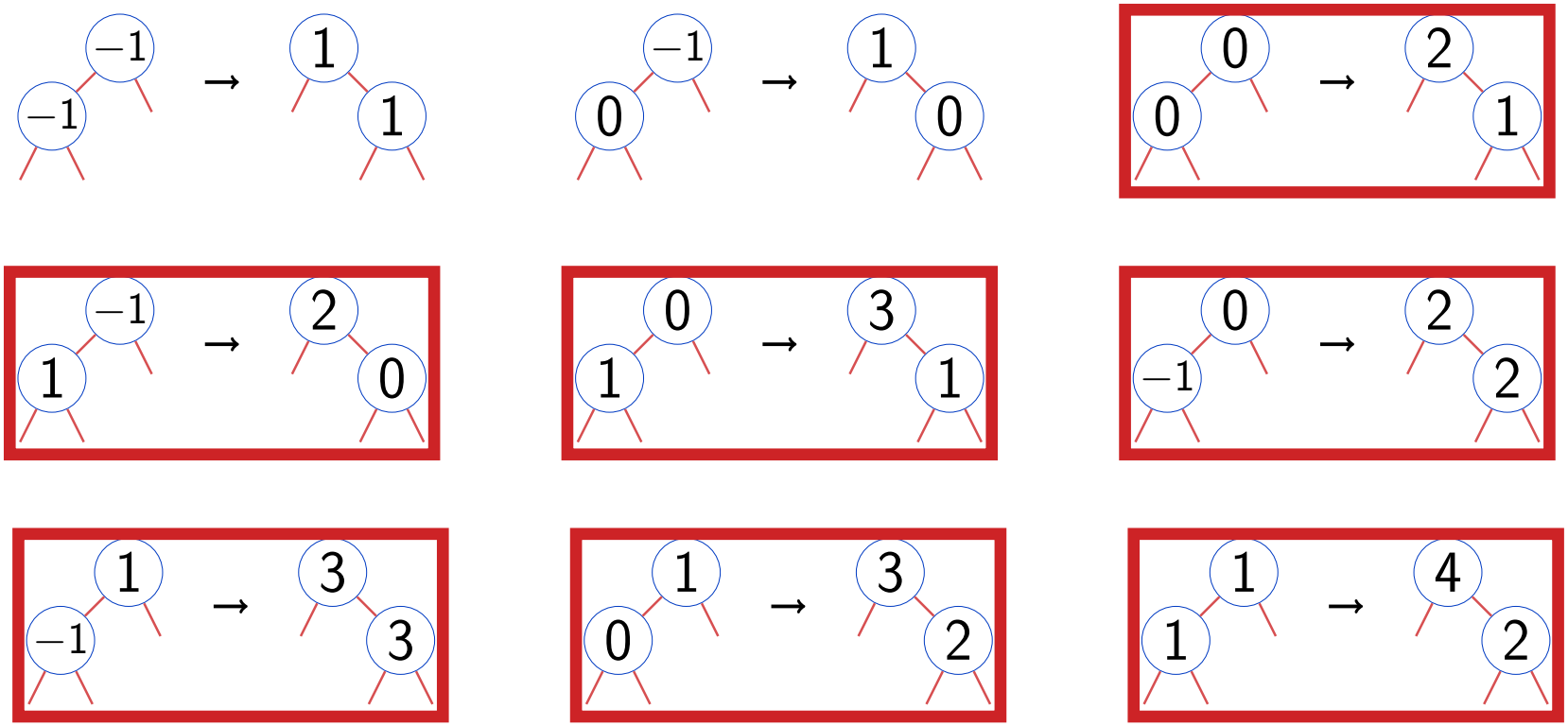
# Démonstration (2/3)

Neuf cas de rotation dans un arbre équilibré :



# Démonstration (2/3)

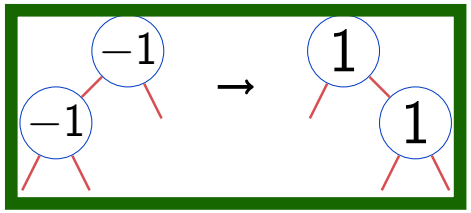
Neuf cas de rotation dans un arbre équilibré :

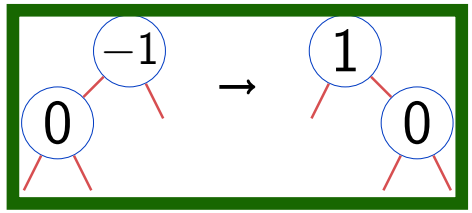


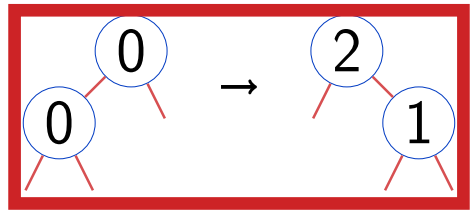

- Sept cas déséquilibrent l'arbre ;

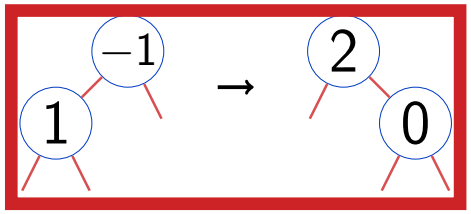
# Démonstration (2/3)

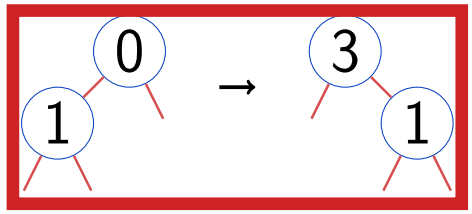
Neuf cas de rotation dans un arbre équilibré :

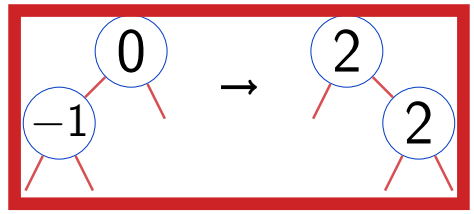


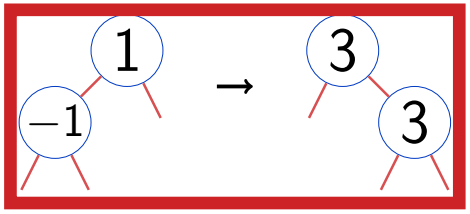



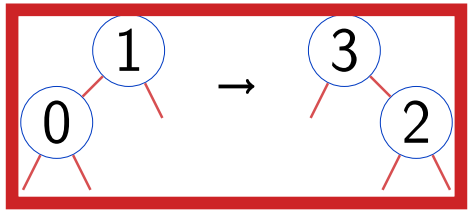



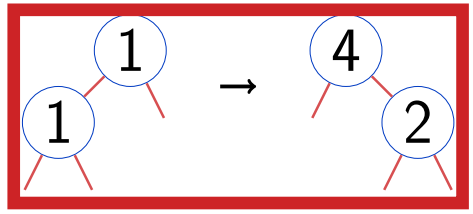




- Sept cas déséquilibrent l'arbre ;
- deux cas conservent l'équilibre (et hauteurs non modifiées).

# Démonstration (3/3)

- Supposons $T$ maximal. Alors, pour tout $T'$ tel que $T \lessdot T'$, $T'$ est déséquilibré. Ainsi, d'après les cas précédents, $T$ ne peut pas avoir d'occurrence de l'un des deux motifs de la proposition.

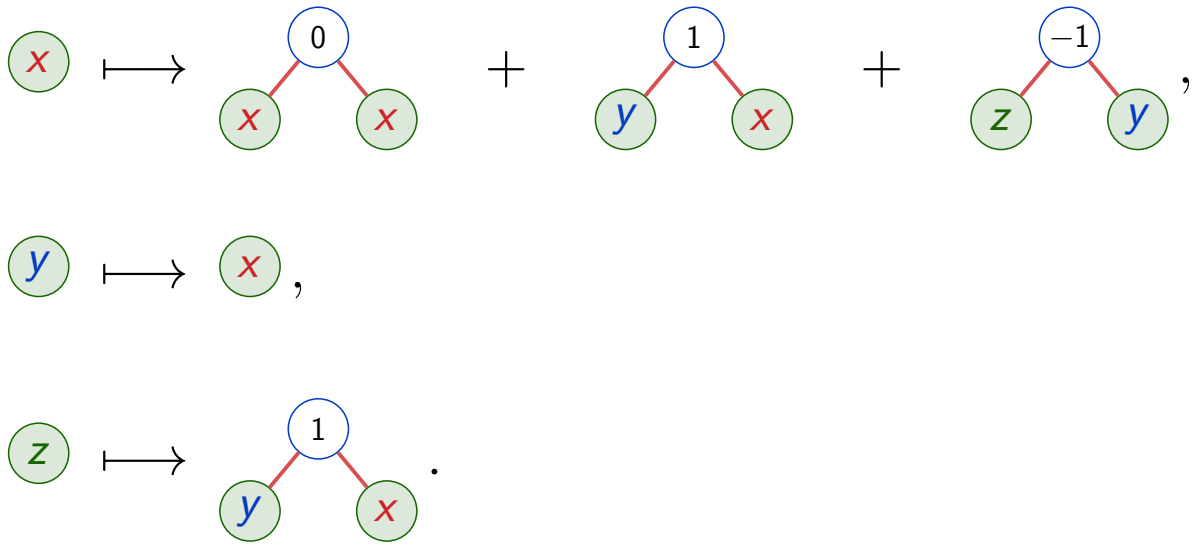
# Démonstration (3/3)

- Supposons $T$ maximal. Alors, pour tout $T'$ tel que $T \lessdot T'$, $T'$ est déséquilibré. Ainsi, d'après les cas précédents, $T$ ne peut pas avoir d'occurrence de l'un des deux motifs de la proposition.

- Supposons que $T$ évite les motifs de la proposition. Alors, pour tout $T'$ tel que $T \lessdot T'$, $T'$ est déséquilibré. Comme l'ensemble des arbres équilibrés est clos par intervalle dans le treillis de Tamari, $T$ est maximal.

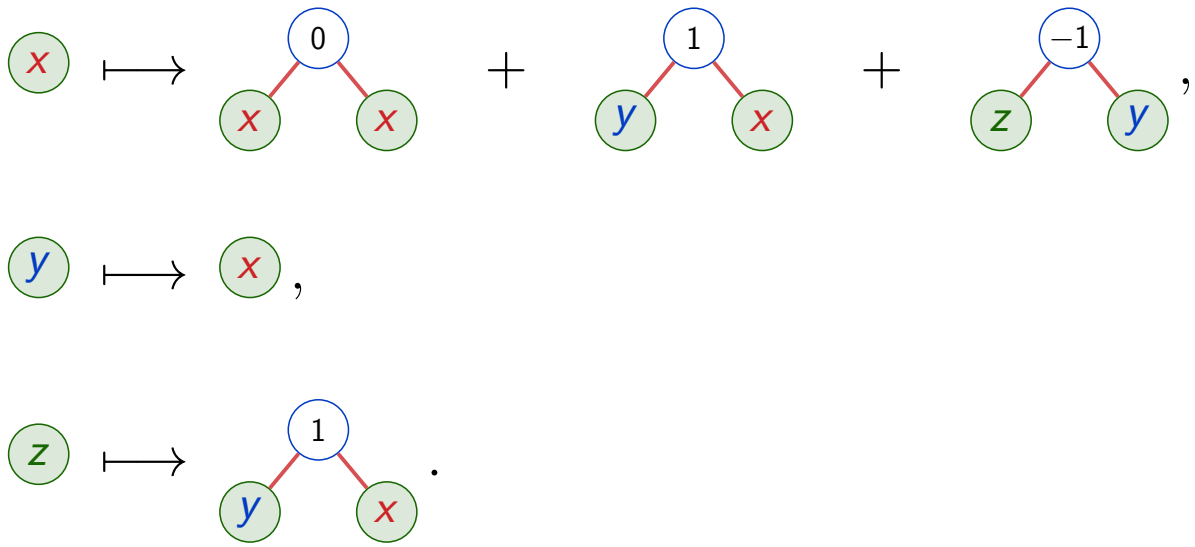
# Grammaire synchrone des arbres équilibrés maximaux

Soit $S_{max}$ la grammaire synchrone contenant les règles de substitution



# Grammaire synchrone des arbres équilibrés maximaux

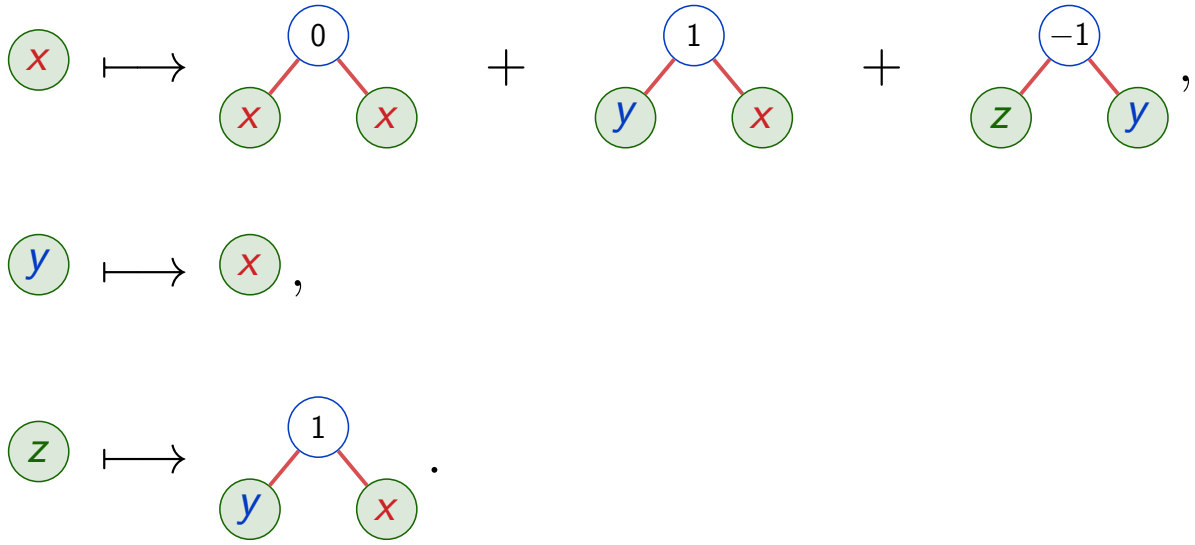
Soit $S_{max}$ la grammaire synchrone contenant les règles de substitution




## Proposition ([G., 2010])

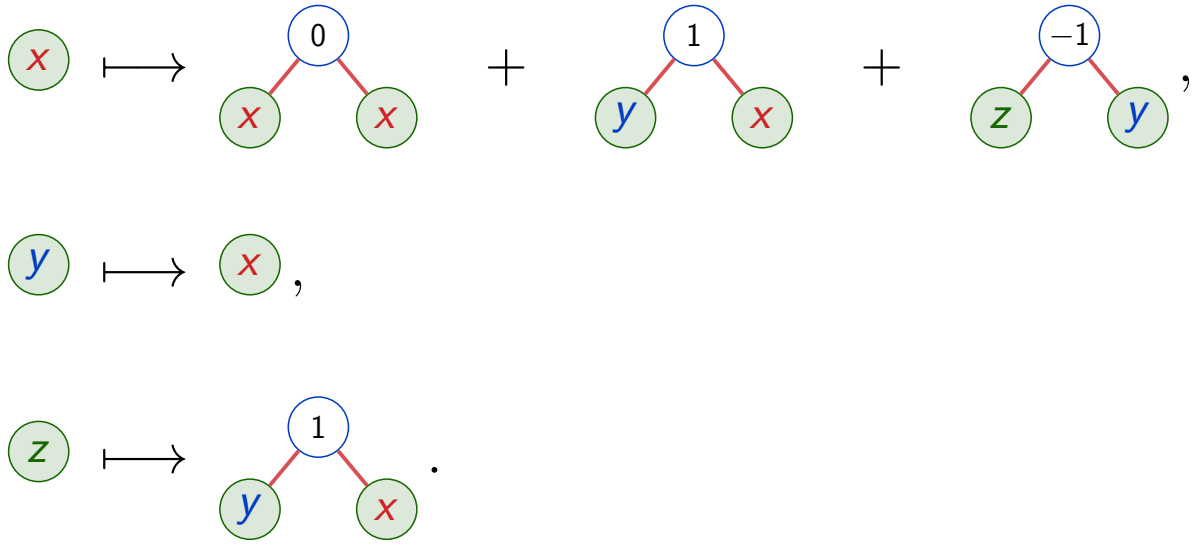
*L'ensemble des arbres à bourgeons engendrés par $S_{max}$ qui contiennent uniquement des bourgeons (x) est l'ensemble des arbres équilibrés maximaux.*

# Génération d'un arbre équilibré maximal

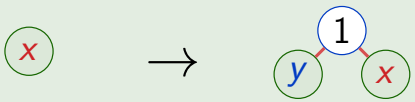



## Exemple

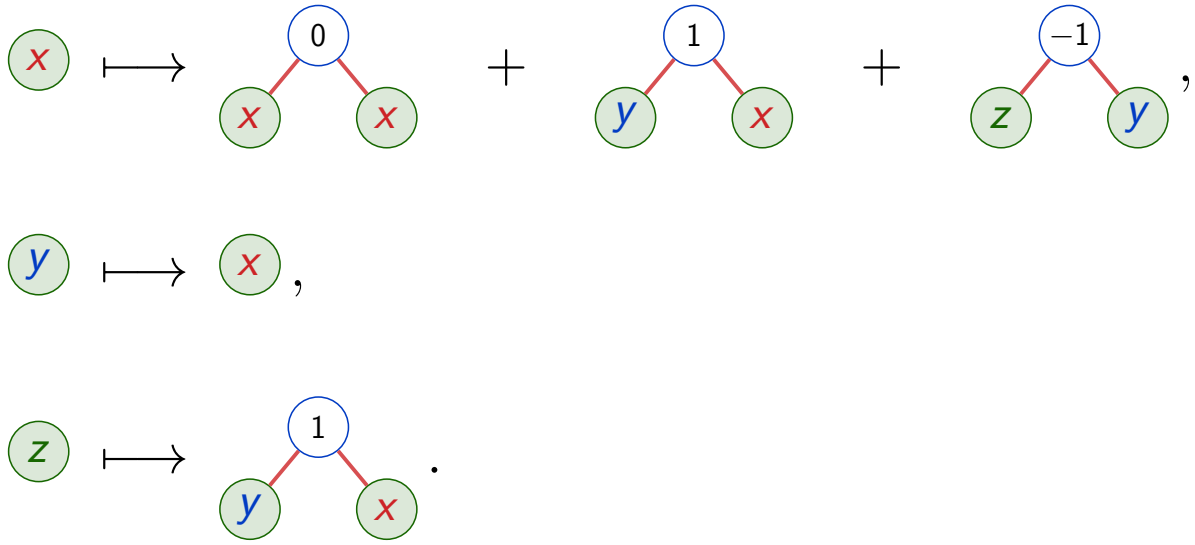
# Génération d'un arbre équilibré maximal



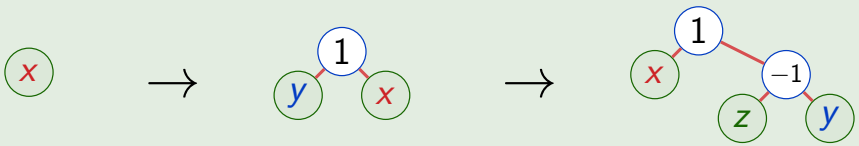

## Exemple



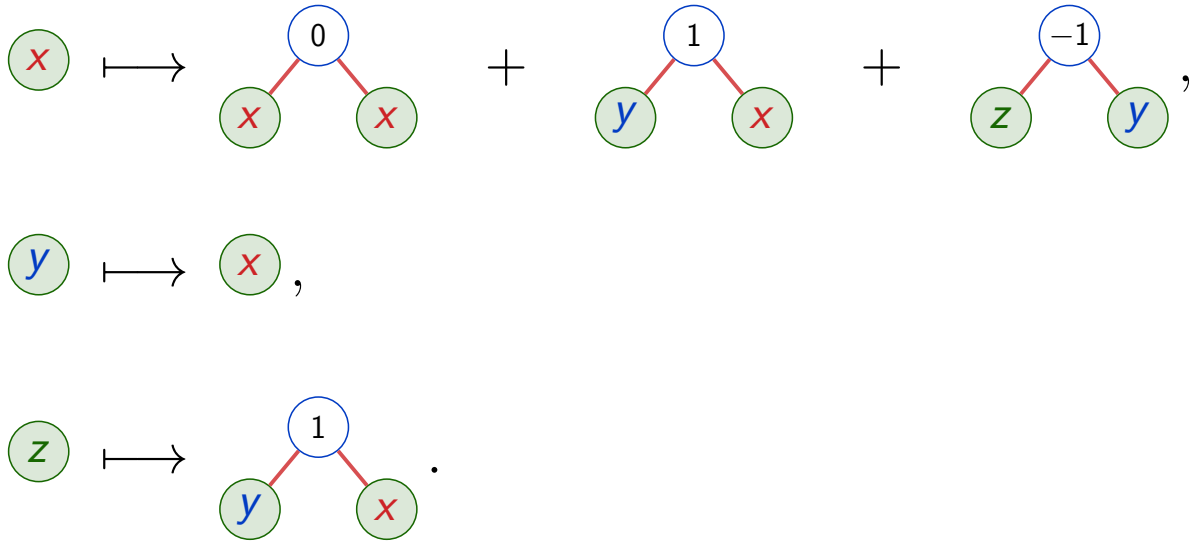
# Génération d'un arbre équilibré maximal



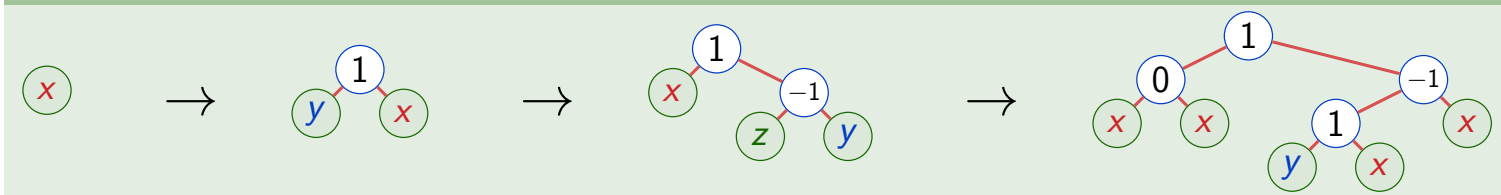

## Exemple



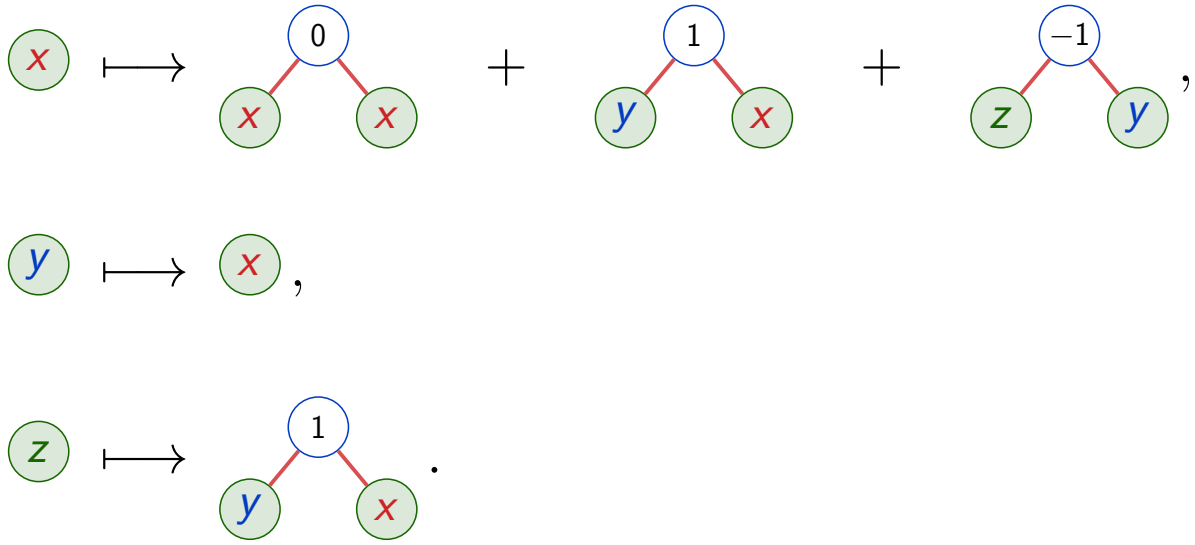
# Génération d'un arbre équilibré maximal



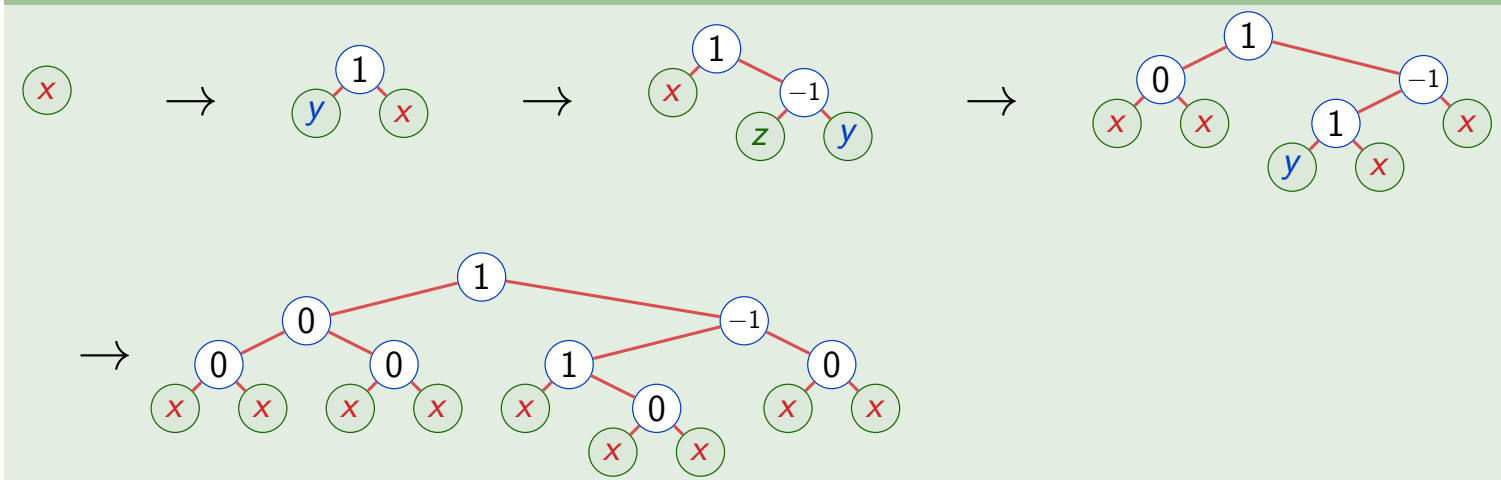

## Exemple



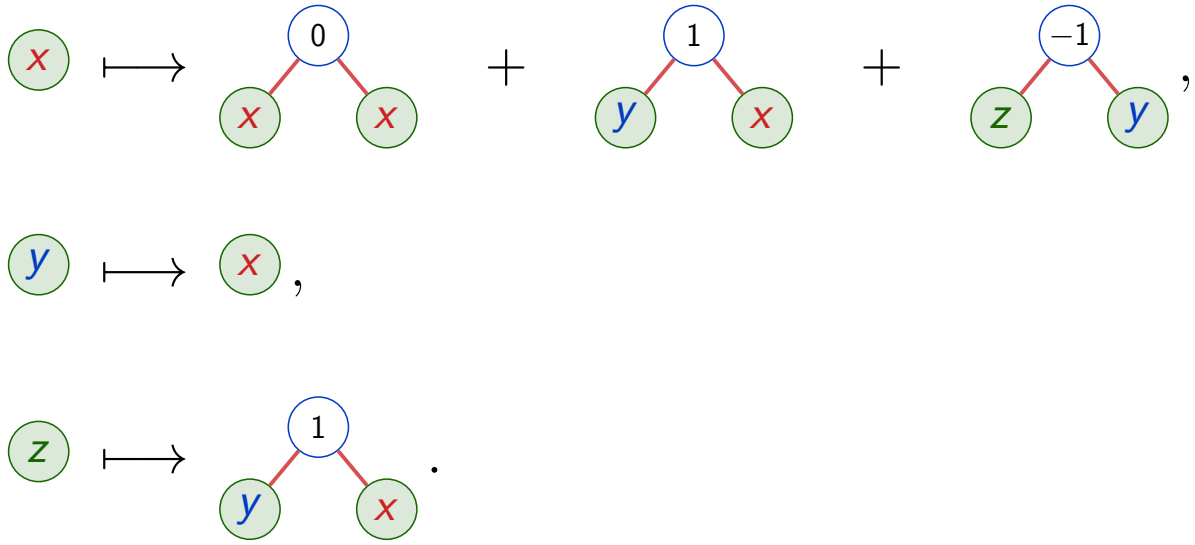
# Génération d'un arbre équilibré maximal



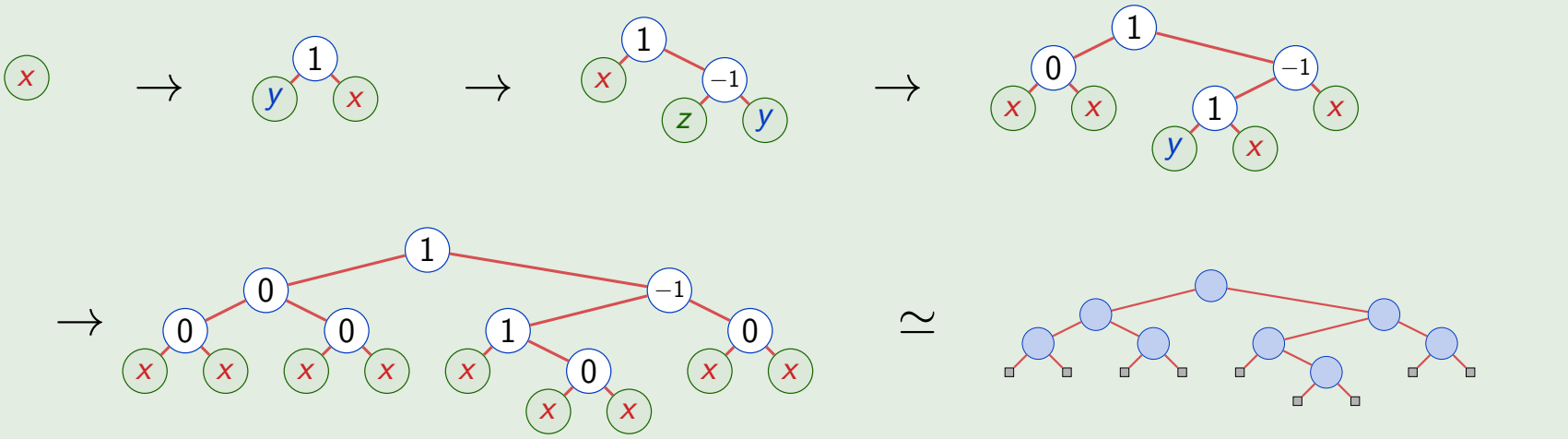

## Exemple



# Génération d'un arbre équilibré maximal




## Exemple



# Équation fonctionnelle des arbres équilibrés maximaux

Série génératrice des arbres engendrés par $S_{max}$ :

$$\mathcal{S}_{S_{max}}(x, y, z) = x + \mathcal{S}_{S_{max}}(x^2 + xy + yz, x, xy).$$

# Équation fonctionnelle des arbres équilibrés maximaux

Série génératrice des arbres engendrés par $S_{max}$ :

$$\mathcal{S}_{S_{max}}(x, y, z) = x + \mathcal{S}_{S_{max}}(x^2 + xy + yz, x, xy).$$

On ignore les arbres qui possèdent des (y) ou (z) $\Longrightarrow$ la série génératrice des arbres équilibrés maximaux est $M(x)$ où

$$M(x) := \mathcal{S}_{S_{max}}(x, 0, 0).$$

# Équation fonctionnelle des arbres équilibrés maximaux

Série génératrice des arbres engendrés par $S_{max}$ :

$$\mathcal{S}_{S_{max}}(x, y, z) = x + \mathcal{S}_{S_{max}}(x^2 + xy + yz, x, xy).$$

On ignore les arbres qui possèdent des (y) ou (z) $\Longrightarrow$ la série génératrice des arbres équilibrés maximaux est $M(x)$ où

$$M(x) := \mathcal{S}_{S_{max}}(x, 0, 0).$$

On calcule $\mathcal{S}_{S_{max}}$ par itération, par exemple :

$$\mathcal{S}^{[0]}_{S_{max}}(x, y, z) \quad = \quad x,$$

# Équation fonctionnelle des arbres équilibrés maximaux

Série génératrice des arbres engendrés par $S_{max}$ :

$$\mathcal{S}_{S_{max}}(x, y, z) = x + \mathcal{S}_{S_{max}}(x^2 + xy + yz, x, xy).$$

On ignore les arbres qui possèdent des (y) ou (z) $\Longrightarrow$ la série génératrice des arbres équilibrés maximaux est $M(x)$ où

$$M(x) := \mathcal{S}_{S_{max}}(x, 0, 0).$$

On calcule $\mathcal{S}_{S_{max}}$ par itération, par exemple :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^{[0]}_{S_{max}}(x, y, z) &= x, \\ \mathcal{S}^{[1]}_{S_{max}}(x, y, z) &= x + x^2 + xy + yz, \end{aligned}$$

# Équation fonctionnelle des arbres équilibrés maximaux

Série génératrice des arbres engendrés par $S_{max}$ :

$$\mathcal{S}_{S_{max}}(x, y, z) = x + \mathcal{S}_{S_{max}}(x^2 + xy + yz, x, xy).$$

On ignore les arbres qui possèdent des (y) ou (z) $\Longrightarrow$ la série génératrice des arbres équilibrés maximaux est $M(x)$ où

$$M(x) := \mathcal{S}_{S_{max}}(x, 0, 0).$$

On calcule $\mathcal{S}_{S_{max}}$ par itération, par exemple :

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}^{[0]}_{S_{max}}(x, y, z) &= x, \\
\mathcal{S}^{[1]}_{S_{max}}(x, y, z) &= x + x^2 + xy + yz, \\
\mathcal{S}^{[2]}_{S_{max}}(x, y, z) &= x + x^2 + xy + yz + x^3 + 2x^2y + xyz + x^4 + \\
&\quad 2x^3y + x^2y^2 + 2x^2yz + 2xy^2z + y^2z^2.
\end{aligned}$$

# Équation fonctionnelle des arbres équilibrés maximaux

Série génératrice des arbres engendrés par $S_{max}$ :

$$\mathcal{S}_{S_{max}}(x, y, z) = x + \mathcal{S}_{S_{max}}(x^2 + xy + yz, x, xy).$$

On ignore les arbres qui possèdent des $y$ ou $z$ $\Longrightarrow$ la série génératrice des arbres équilibrés maximaux est $M(x)$ où

$$M(x) := \mathcal{S}_{S_{max}}(x, 0, 0).$$

On calcule $\mathcal{S}_{S_{max}}$ par itération, par exemple :

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}^{[0]}_{S_{max}}(x, y, z) &= x, \\
\mathcal{S}^{[1]}_{S_{max}}(x, y, z) &= x + x^2 + xy + yz, \\
\mathcal{S}^{[2]}_{S_{max}}(x, y, z) &= x + x^2 + xy + yz + x^3 + 2x^2y + xyz + x^4 + \\
&\quad 2x^3y + x^2y^2 + 2x^2yz + 2xy^2z + y^2z^2.
\end{aligned}$$

Les premiers cardinaux des arbres équilibrés maximaux sont

$$1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 4, 6, 9, 11, 13, 22, 38, 60, 89, 128, 183, 256, 353, 512, 805.$$

# Plan

Perspectives

# Perspectives (1/2)

Grammaires synchrones :

- déterminer l'expressivité des grammaires synchrones ;

# Perspectives (1/2)

Grammaires synchrones :

- déterminer l'expressivité des grammaires synchrones ;
- équivalence de Wilf sur les motifs de déséquilibre ;

# Perspectives (1/2)

Grammaires synchrones :

- déterminer l'expressivité des grammaires synchrones ;
- équivalence de Wilf sur les motifs de déséquilibre ;
- opérades et grammaires synchrones ;

# Perspectives (1/2)

Grammaires synchrones :

- déterminer l'expressivité des grammaires synchrones ;
- équivalence de Wilf sur les motifs de déséquilibre ;
- opérades et grammaires synchrones ;
- asymptotique (ou formule close) pour les coefficients des séries obtenues par les grammaires synchrones.

# Perspectives (1/2)

Grammaires synchrones :

- déterminer l'expressivité des grammaires synchrones ;
- équivalence de Wilf sur les motifs de déséquilibre ;
- opérades et grammaires synchrones ;
- asymptotique (ou formule close) pour les coefficients des séries obtenues par les grammaires synchrones.

Arbres équilibrés et treillis de Tamari :

- autres familles d'arbres binaires closes par intervalle dans le treillis de Tamari ;

# Perspectives (1/2)

Grammaires synchrones :

- déterminer l'expressivité des grammaires synchrones ;
- équivalence de Wilf sur les motifs de déséquilibre ;
- opérades et grammaires synchrones ;
- asymptotique (ou formule close) pour les coefficients des séries obtenues par les grammaires synchrones.

Arbres équilibrés et treillis de Tamari :

- autres familles d'arbres binaires closes par intervalle dans le treillis de Tamari ;
- construction d'une sous-algèbre (ou quotient) de Hopf de **PBT** basée sur les arbres équilibrés.

# Perspectives (2/2)

Couples d'arbres binaires jumeaux :

- notion de couple équilibré d'arbres binaires jumeaux ;

# Perspectives (2/2)

Couples d'arbres binaires jumeaux :

- notion de couple équilibré d'arbres binaires jumeaux ;
- nombre d'intervalles du treillis de Baxter ;

# Perspectives (2/2)

Couples d'arbres binaires jumeaux :

- notion de couple équilibré d'arbres binaires jumeaux ;
- nombre d'intervalles du treillis de Baxter ;
- cardinal d'une classe de Baxter représentée par un couple d'arbres binaires jumeaux ;

# Perspectives (2/2)

Couples d'arbres binaires jumeaux :

- notion de couple équilibré d'arbres binaires jumeaux ;
- nombre d'intervalles du treillis de Baxter ;
- cardinal d'une classe de Baxter représentée par un couple d'arbres binaires jumeaux ;
- isomorphisme explicite entre **Baxter** et **Baxter**$^\star$ ;

# Perspectives (2/2)

Couples d'arbres binaires jumeaux :

- notion de couple équilibré d'arbres binaires jumeaux ;
- nombre d'intervalles du treillis de Baxter ;
- cardinal d'une classe de Baxter représentée par un couple d'arbres binaires jumeaux ;
- isomorphisme explicite entre **Baxter** et **Baxter**$^\star$ ;
- sous-algèbres de Hopf de **WQSym** (arbres de Schröder jumeaux) et **PQSym** obtenues par le monoïde de Baxter.