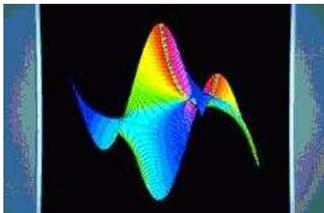


Combinatoire des cartes planaires et applications algorithmiques

Soutenance de thèse, 11 juin 2007

Éric Fusy

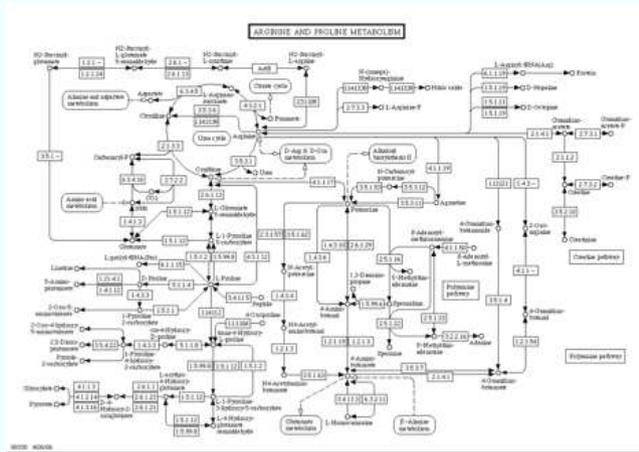


Projet ALGO - INRIA Rocquencourt

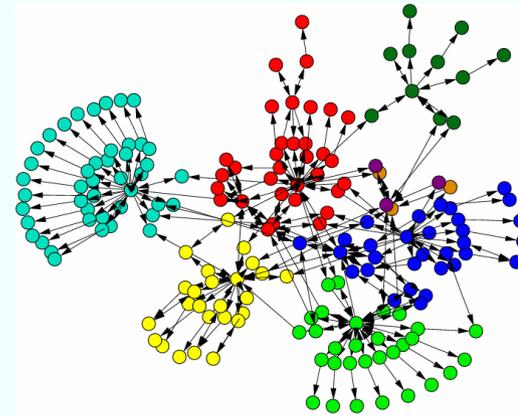


LIX - École Polytechnique

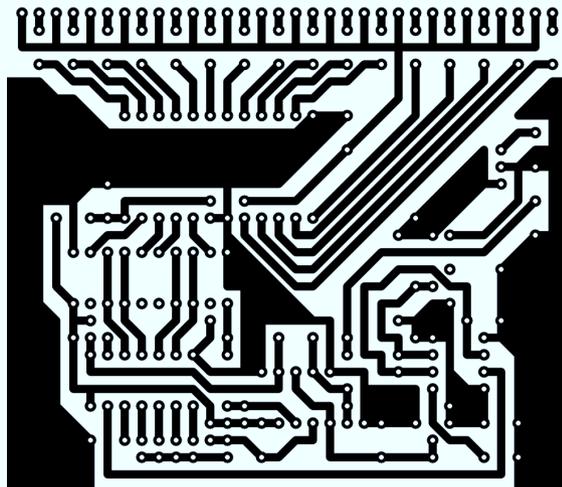
Dessin de structures dans le plan



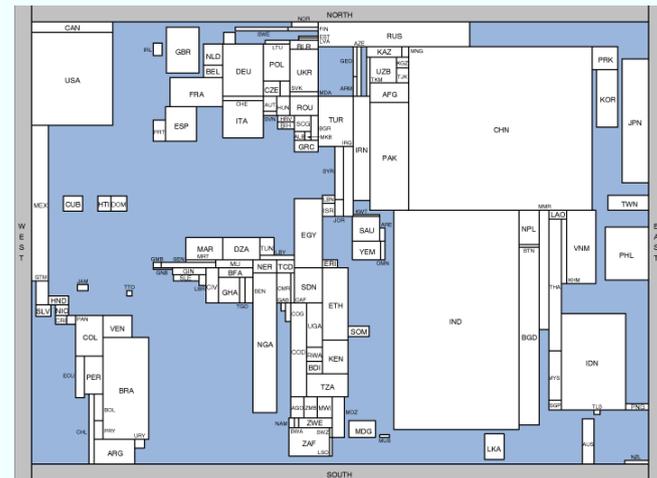
Métabolisme



Site Internet



Circuit électrique



Cartogramme

Graphes et dessin

- Graphe = éléments + adjacences entre éléments

Ex: éléments: $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

adjacences: $\{1,2\}, \{2,3\}, \{3,4\}, \{1,4\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{3,5\}$

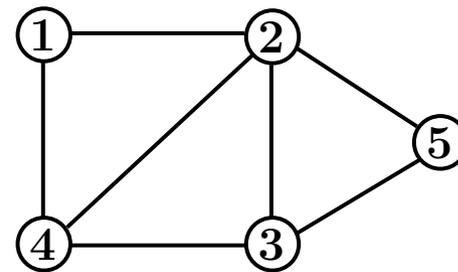
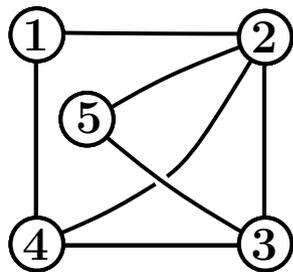
Graphes et dessin

- Graphe = éléments + adjacences entre éléments

Ex: éléments: $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

adjacences: $\{1,2\}, \{2,3\}, \{3,4\}, \{1,4\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{3,5\}$

- Dessin d'un graphe dans le plan:
 - Éléments représentés par des sommets
 - Adjacences représentées par des arêtes



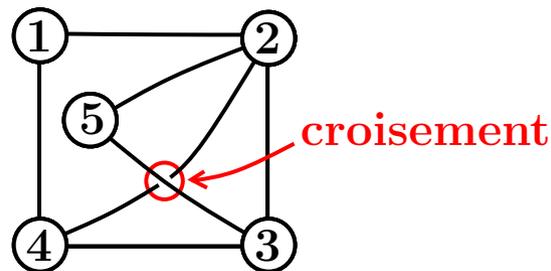
Graphes et dessin

- Graphe = éléments + adjacences entre éléments

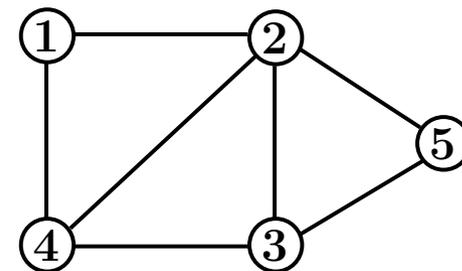
Ex: éléments: $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

adjacences: $\{1,2\}, \{2,3\}, \{3,4\}, \{1,4\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{3,5\}$

- Dessin d'un graphe dans le plan:
 - Éléments représentés par des sommets
 - Adjacences représentées par des arêtes



non planaire

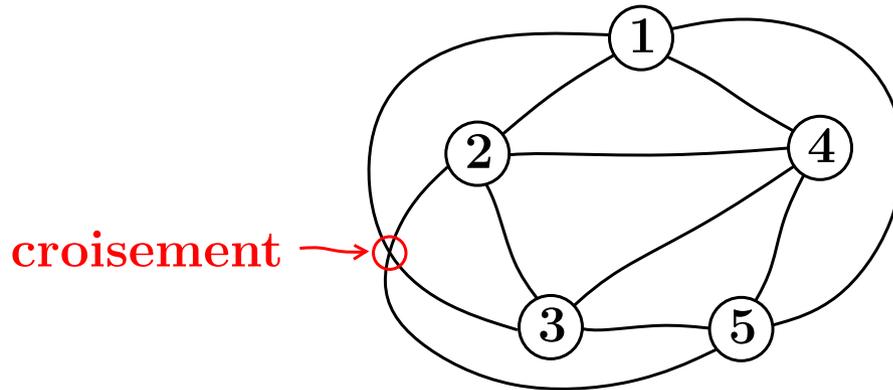


planaire

- Dessin planaire = pas d'intersection d'arêtes

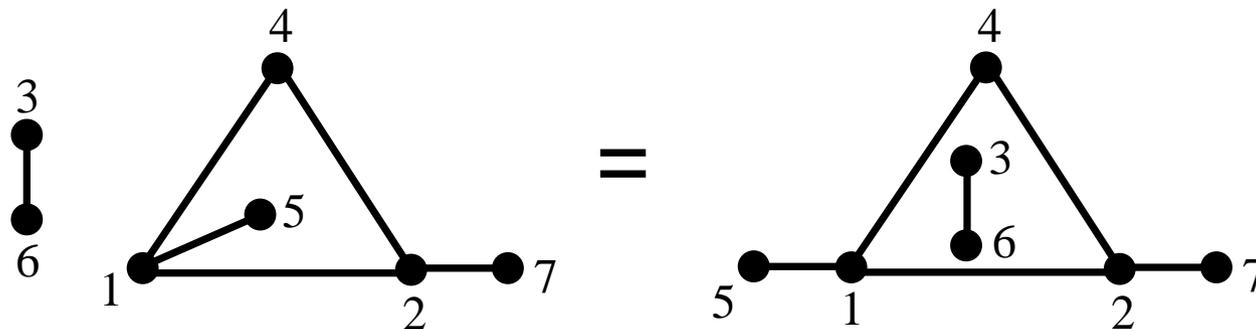
Graphes planaires

- Un graphe est **planaire** si il admet un **dessin planaire**



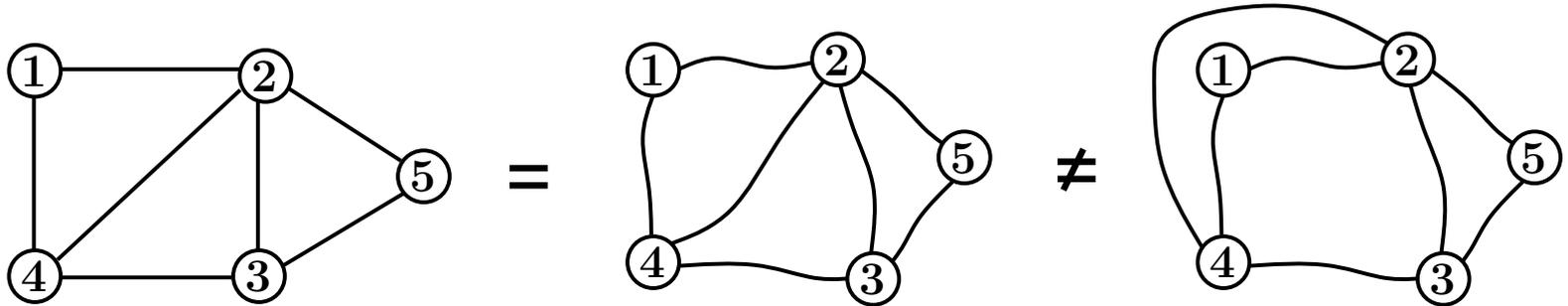
Le graphe complet à 5 sommets n'est pas planaire

- Le dessin planaire n'est **pas unique**



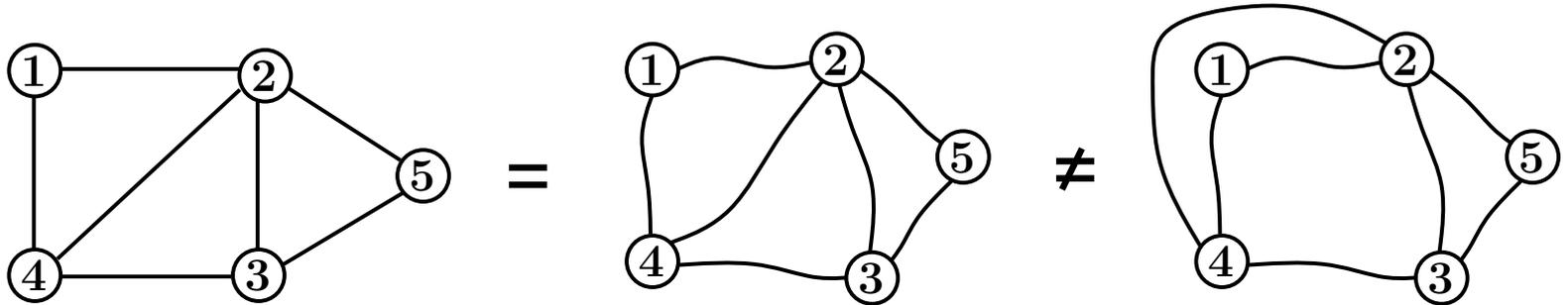
Cartes planaires

- Carte planaire = graphe + dessin planaire (topologique)



Cartes planaires

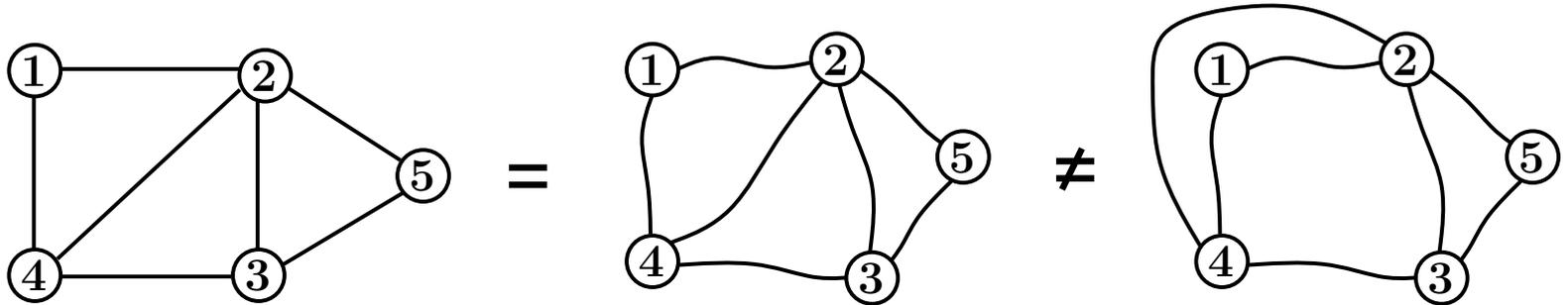
- Carte planaire = graphe + dessin planaire (topologique)



- Par rapport à un graphe planaire:

Cartes planaires

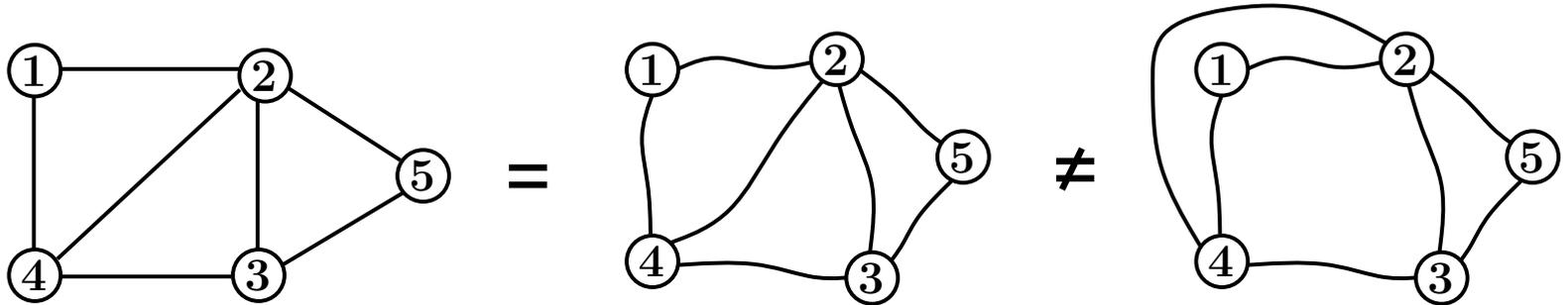
- Carte planaire = graphe + dessin planaire (topologique)



- Par rapport à un graphe planaire:
 - l'ordre cyclique des voisins compte

Cartes planaires

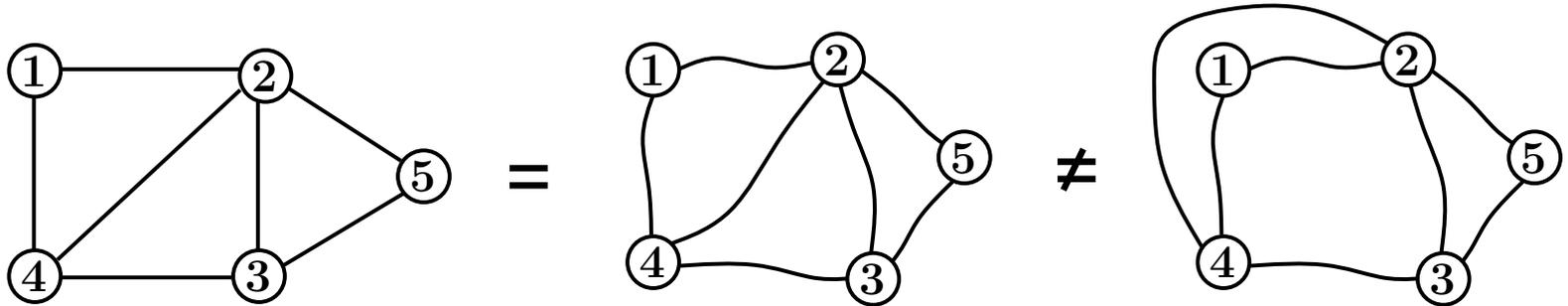
- Carte planaire = graphe + dessin planaire (topologique)



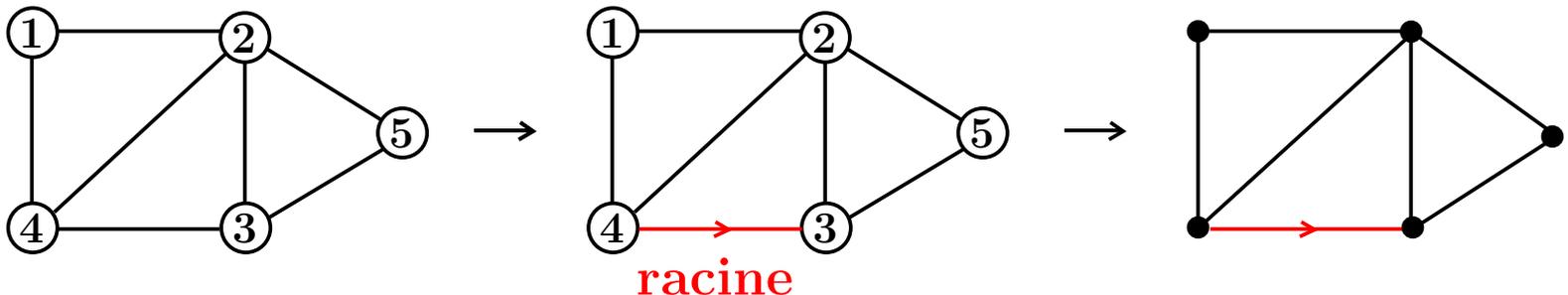
- Par rapport à un graphe planaire:
 - l'ordre cyclique des voisins compte
 - une carte est formée de sommets, arêtes, et faces

Cartes planaires

- **Carte planaire** = **graphe** + **dessin planaire** (topologique)

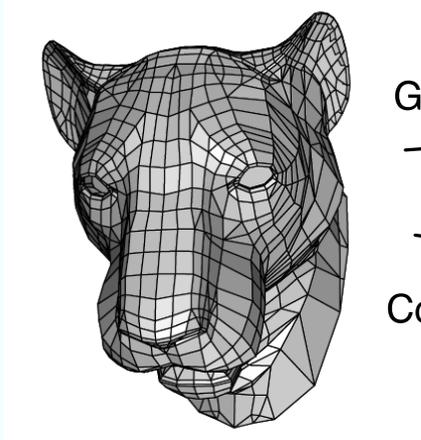


- Par rapport à un **graphe planaire**:
 - l'ordre **cyclique** des voisins compte
 - une carte est formée de sommets, arêtes, et **faces**
- **Enracinement**: une arête est **marquée** et **orientée** (on oublie les étiquettes)



Motivations algorithmiques

- Compression de maillages



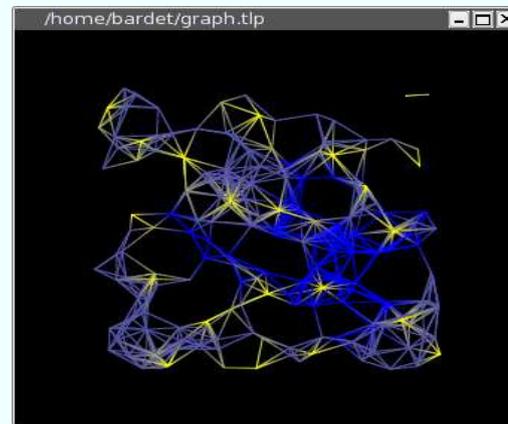
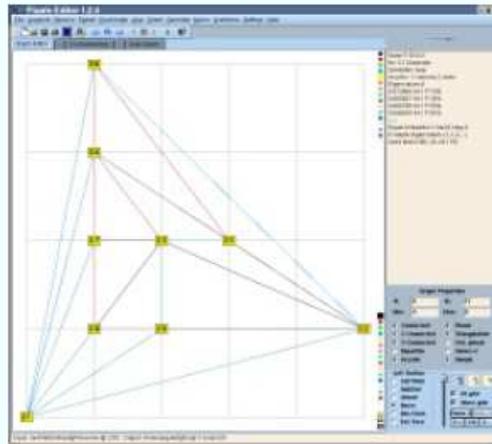
Géométrie →

1) Coordonnées

Combinatoire →

2) Incidences faces/sommets/arêtes
forment une carte

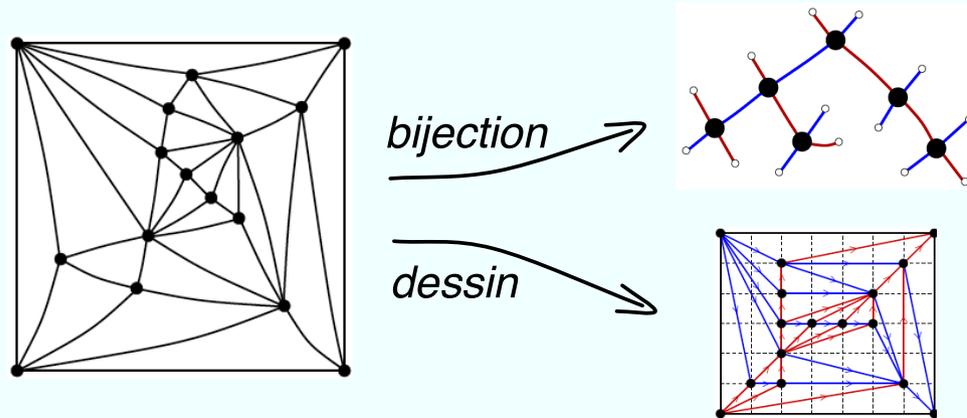
- Tracé automatique de graphes



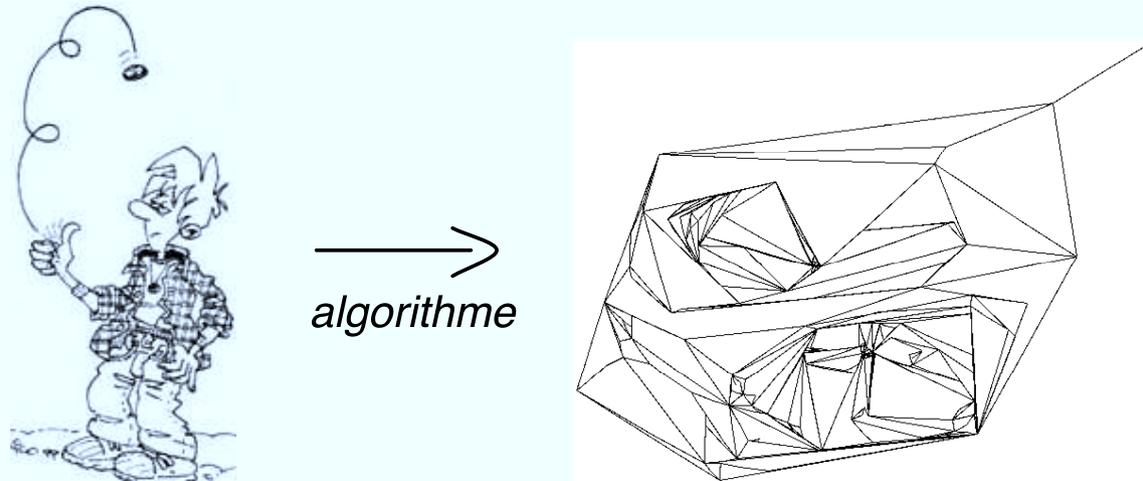
Logiciels: Pigale, Tulipe, Leda...

Plan

1) Combinatoire et dessin de cartes planaires



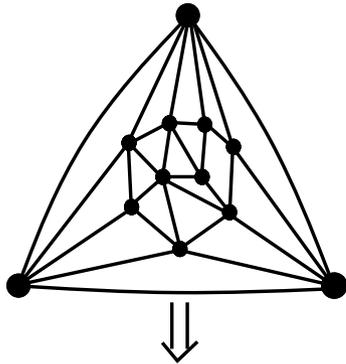
2) Génération aléatoire de graphes planaires



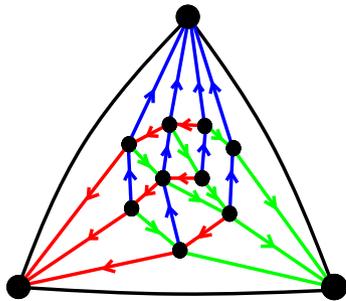
Combinatoire et dessin de cartes planaires

Combinatoire des cartes

Triangulations

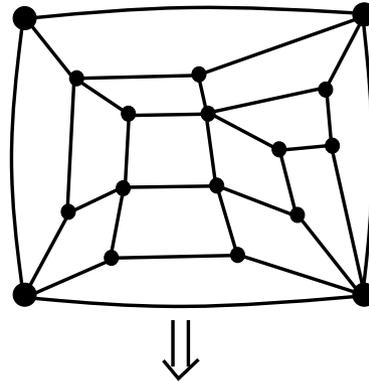


3 arbres couvrants

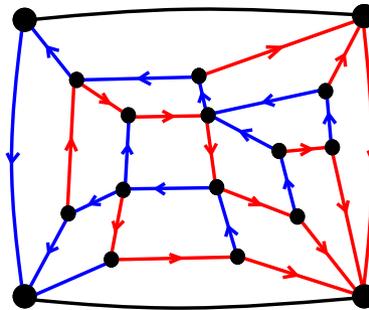


$$|\mathcal{T}_n| = \frac{2(4n-3)!}{n!(3n-2)!}$$

Quadrangulations

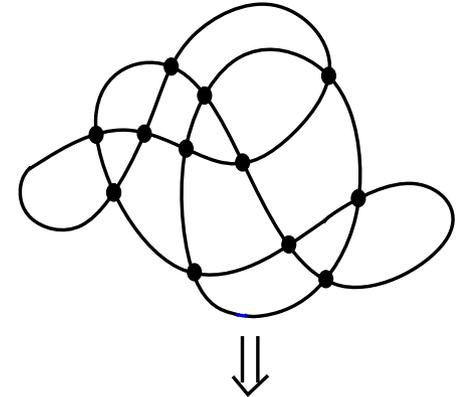


2 arbres couvrants

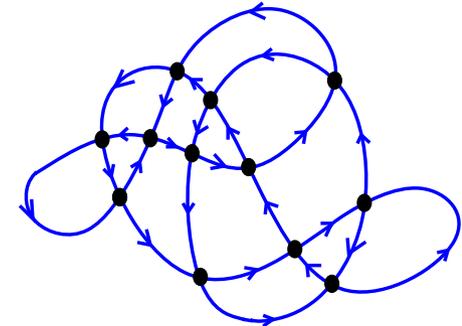


$$|\mathcal{Q}_n| = \frac{2(3n-3)!}{n!(2n-2)!}$$

Tétravalentes



orientation eulérienne

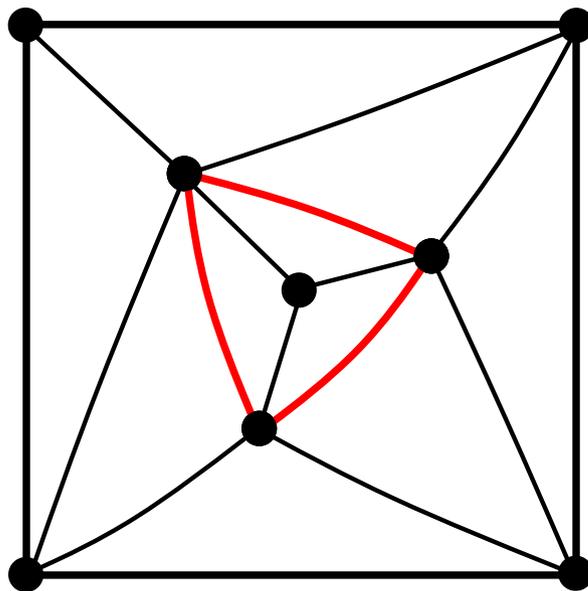


$$|\mathcal{E}_n| = \frac{2 \cdot 3^n (2n)!}{n!(n+2)!}$$

Tutte $\xrightarrow{\text{énumératif}}$ Cori, Schaeffer, Bousquet-Mélou, Bouttier-Di Francesco-Guitter
 $\xrightarrow{\text{structurel+dessin}}$ Schnyder, de Fraysseix, Ossona de Mendez, Felsner

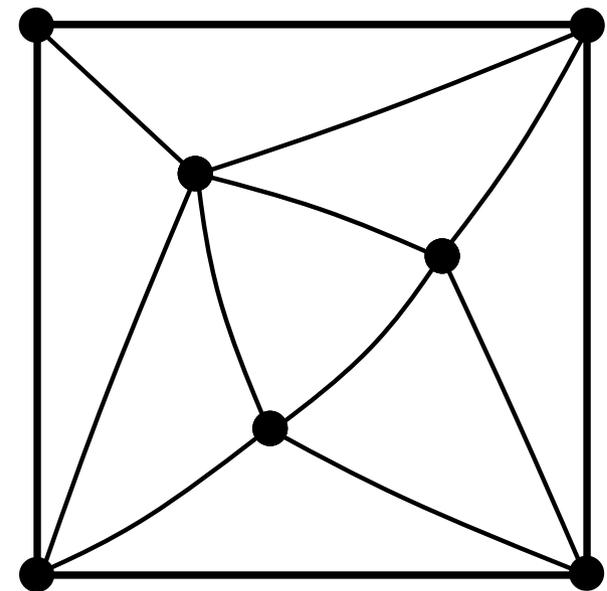
Triangulations irréductibles

- On considère des cartes à faces internes **triangulaires** et face externe **quadrangulaire**
- Pas de **triangle séparateur** (irréductibilité)



triangle non vide

réduction
→

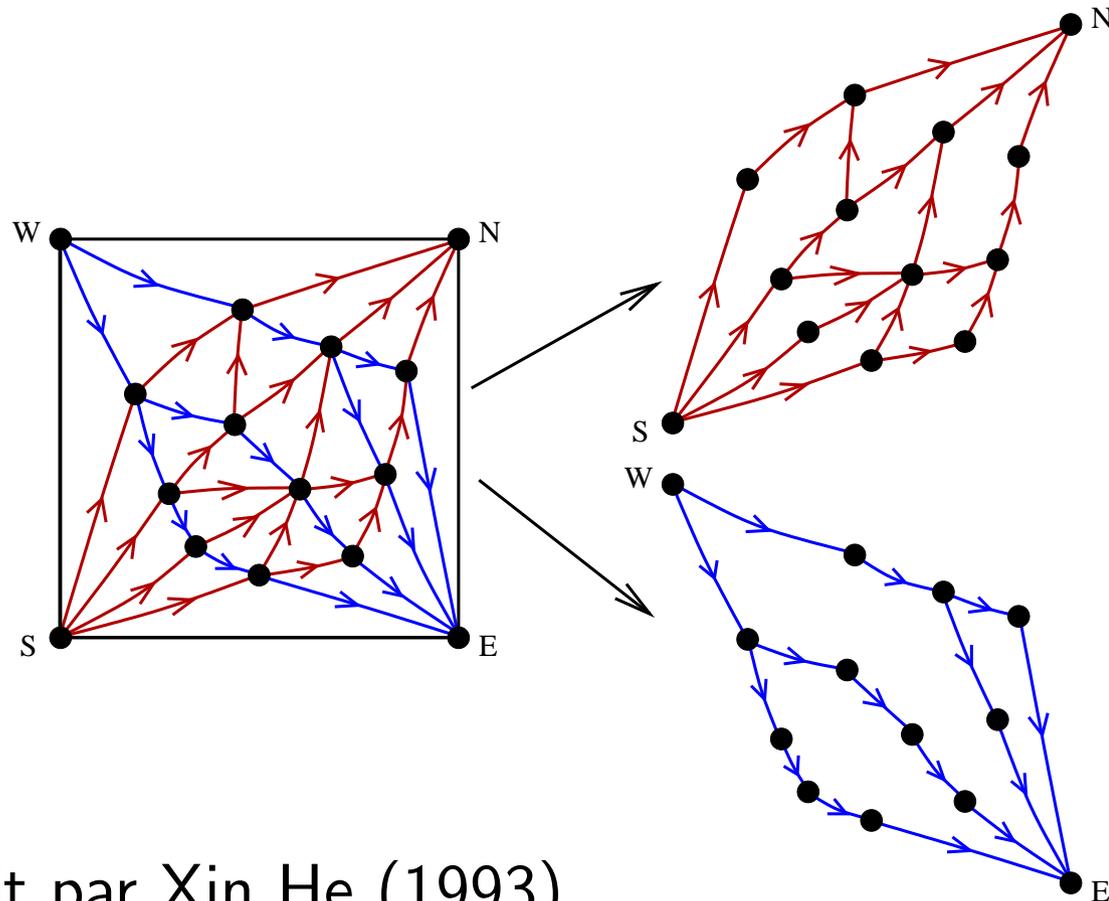


irréductible

Structures transverses

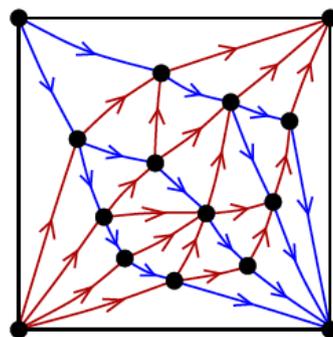
Orientation bipolaire = orientation acyclique avec une unique source et un unique puit

Structure transverse = partition en une orientation bipolaire **rouge** et une orientation bipolaire **bleue** qui sont **transverses**



⇒ introduit par Xin He (1993)

Résultats obtenus

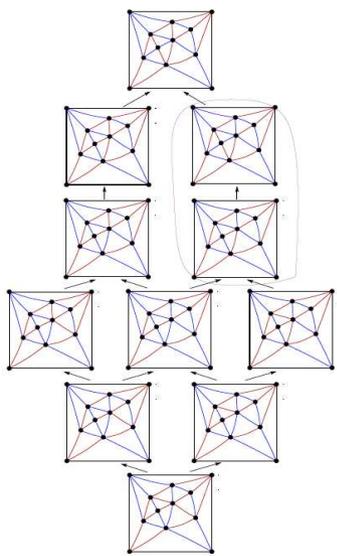


Structures transverses

Existence
Propriétés

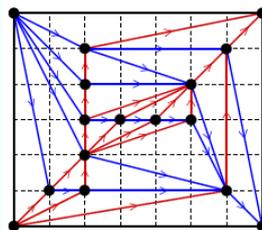
Applications

Analyse



Treillis

Dessin:



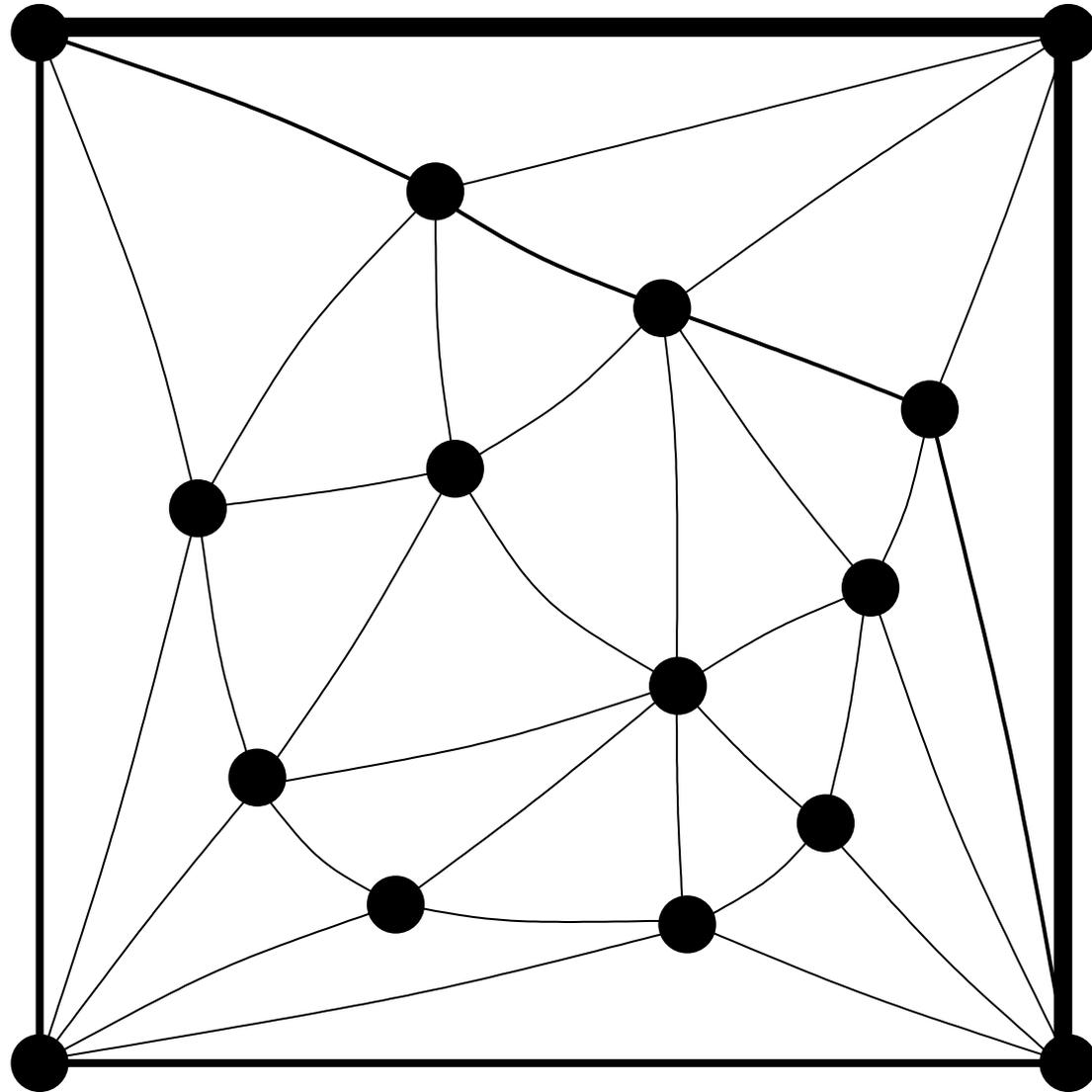
Bijection:

$$T_n = \frac{4}{2n+2} \frac{(3n)!}{n!(2n+1)!}$$

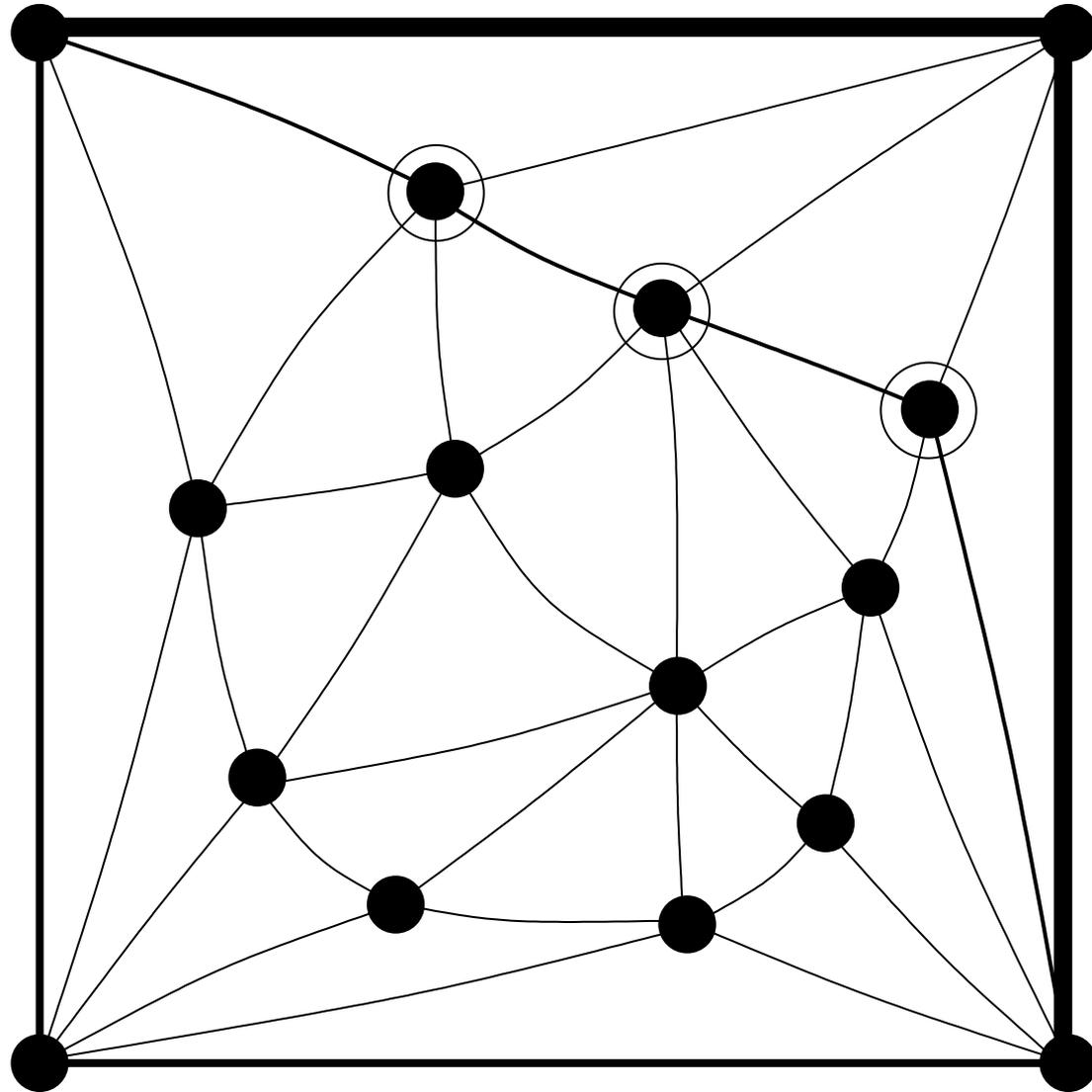
Taille grille

$$\frac{11}{27}n \times \frac{11}{27}n$$

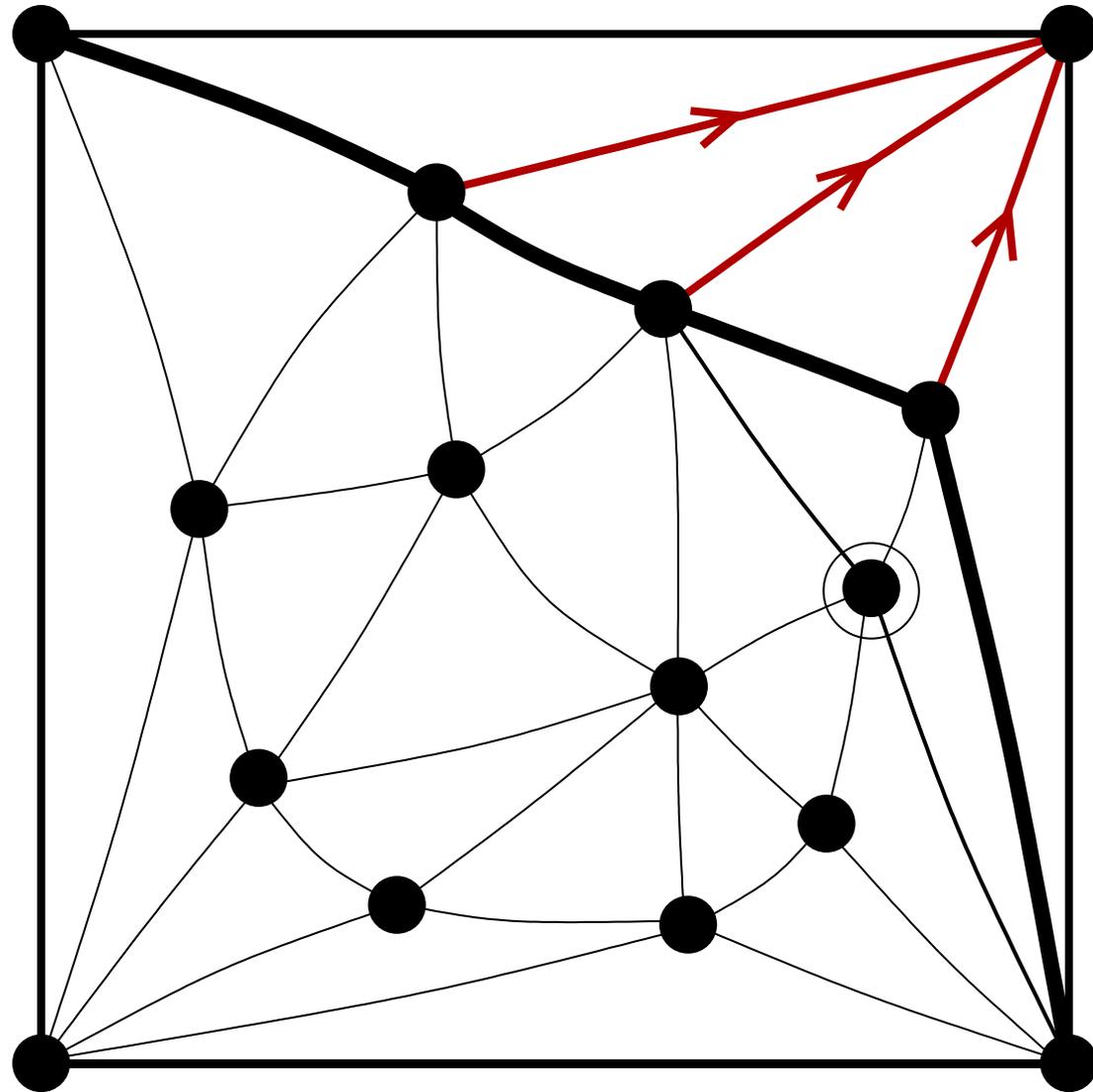
Existence et calcul



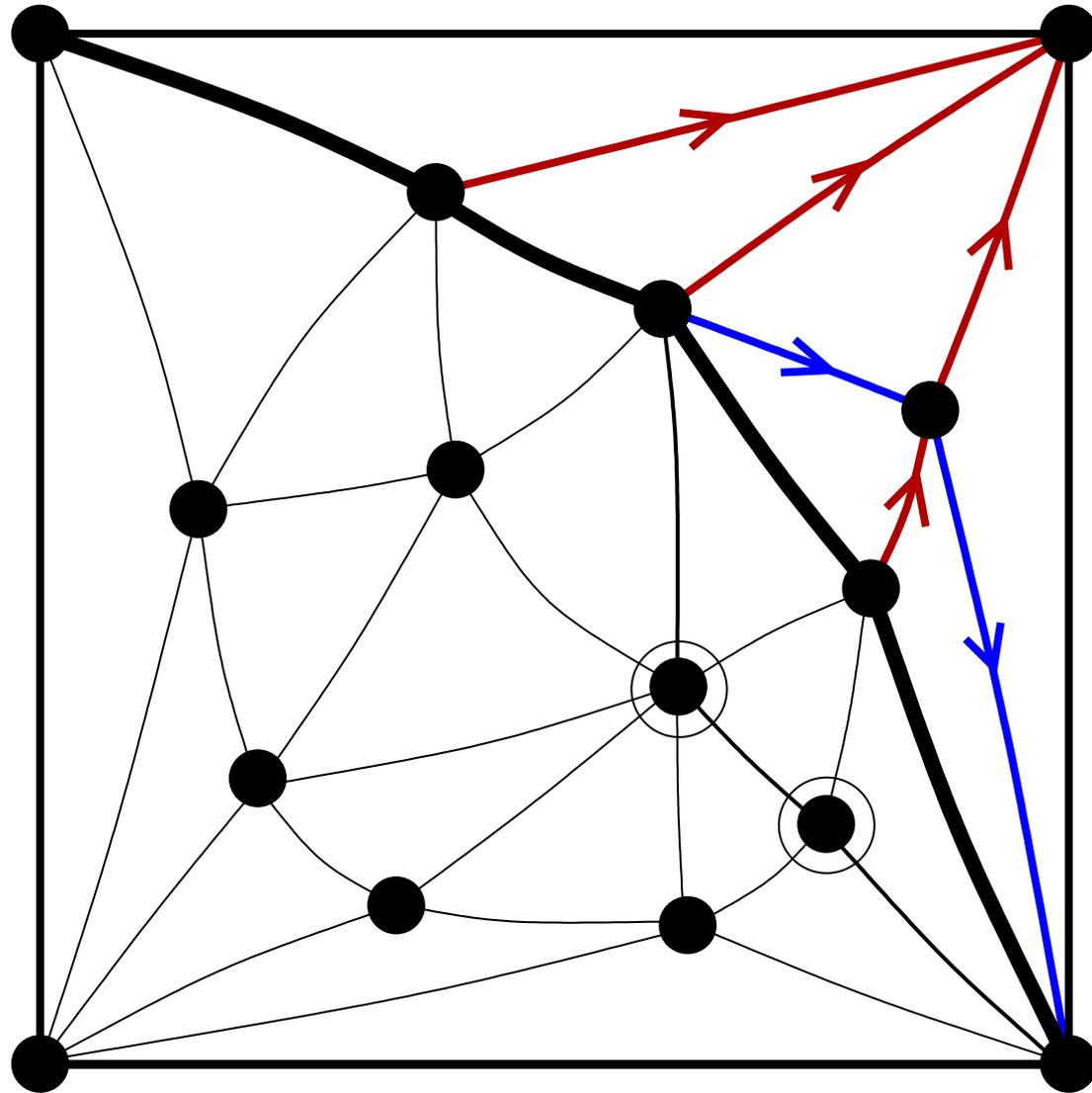
Existence et calcul



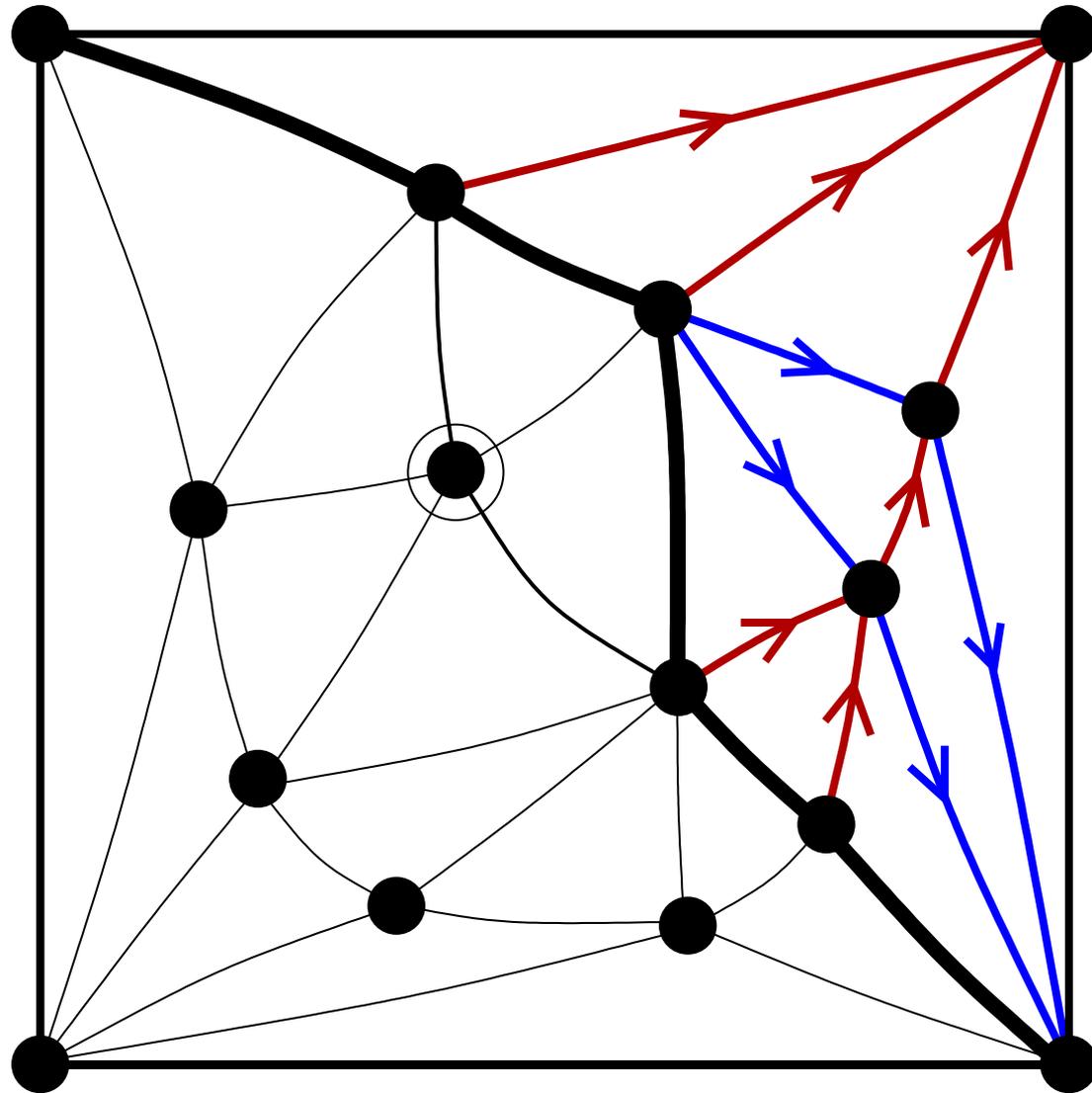
Existence et calcul



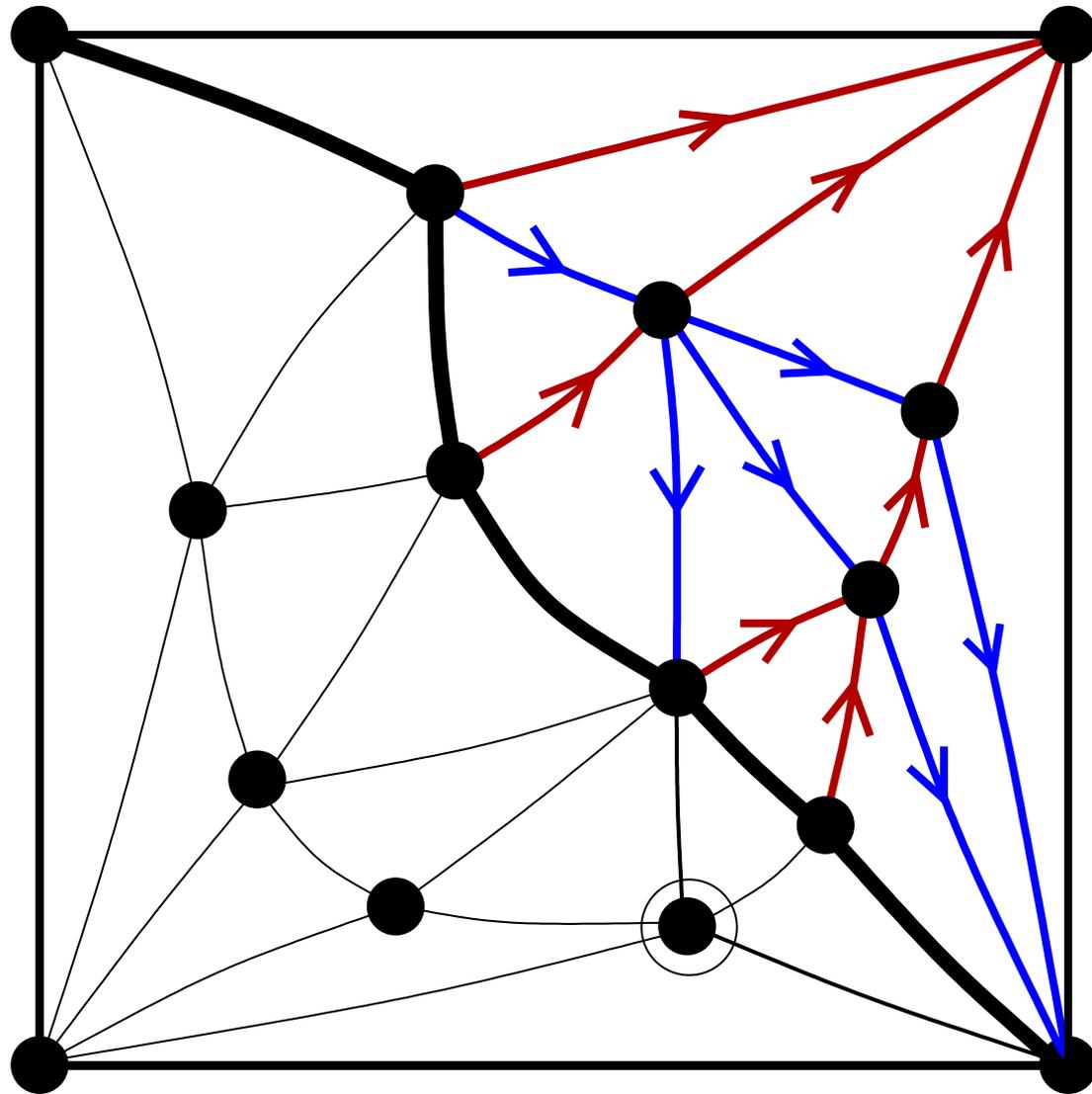
Existence et calcul



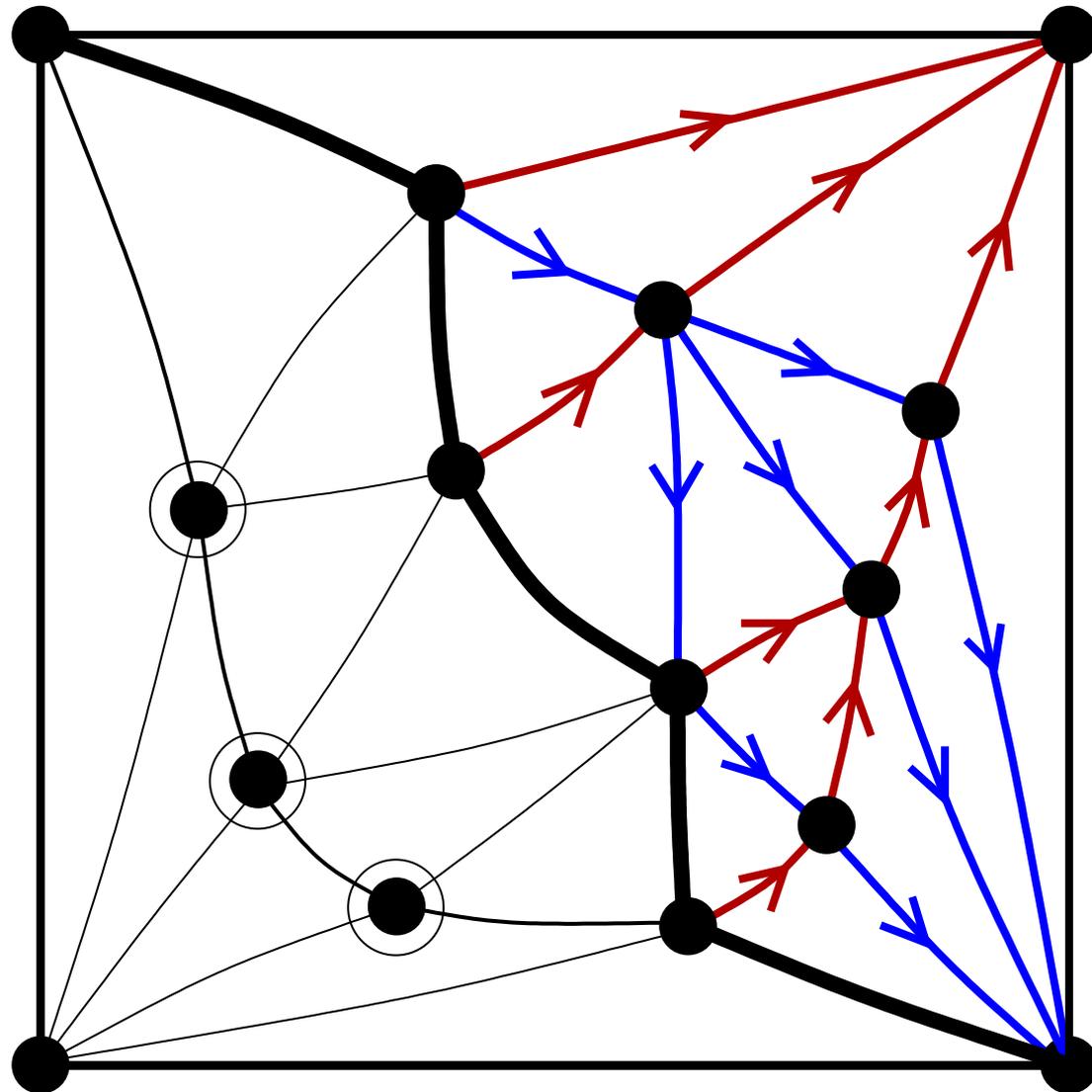
Existence et calcul



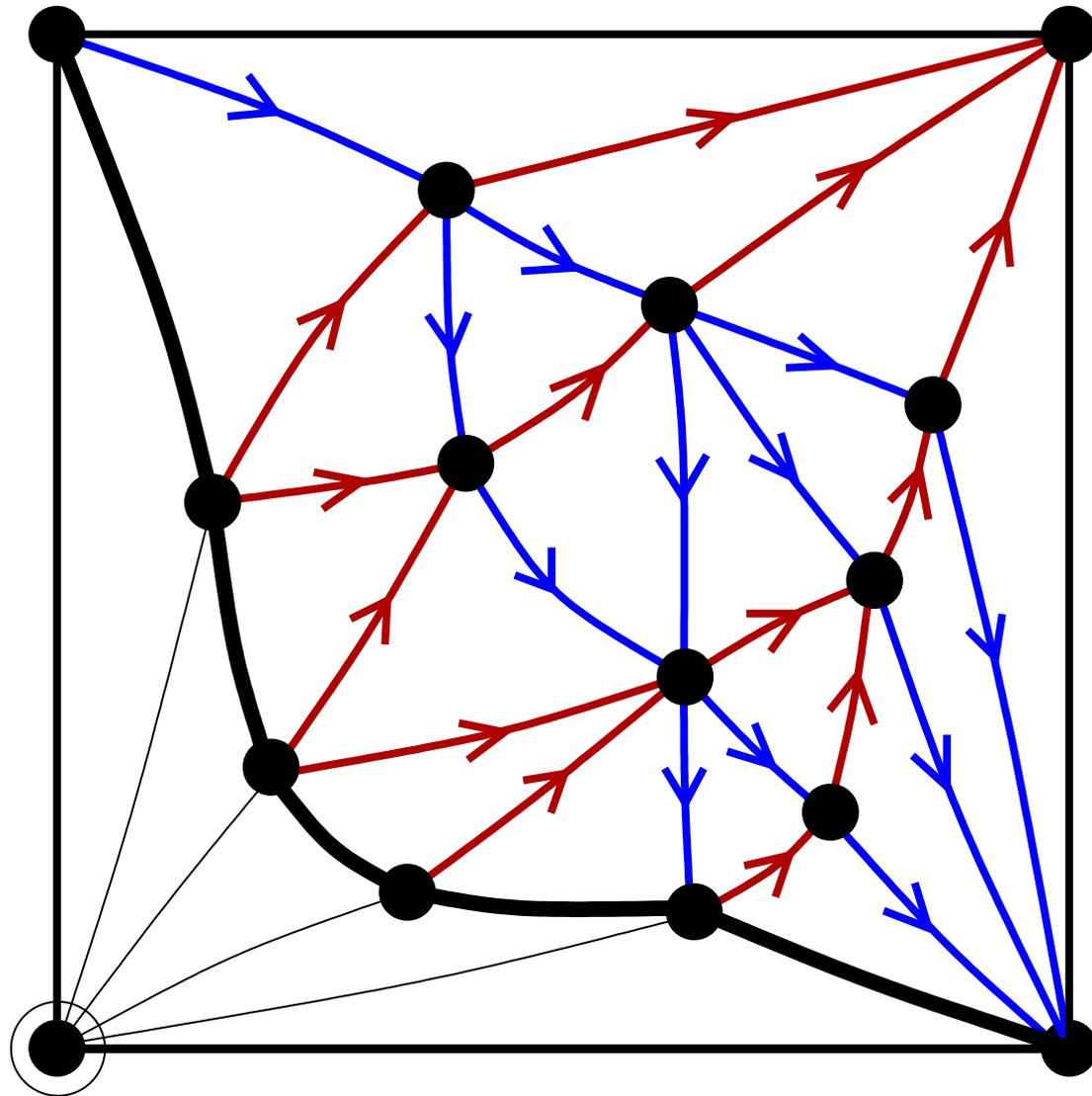
Existence et calcul



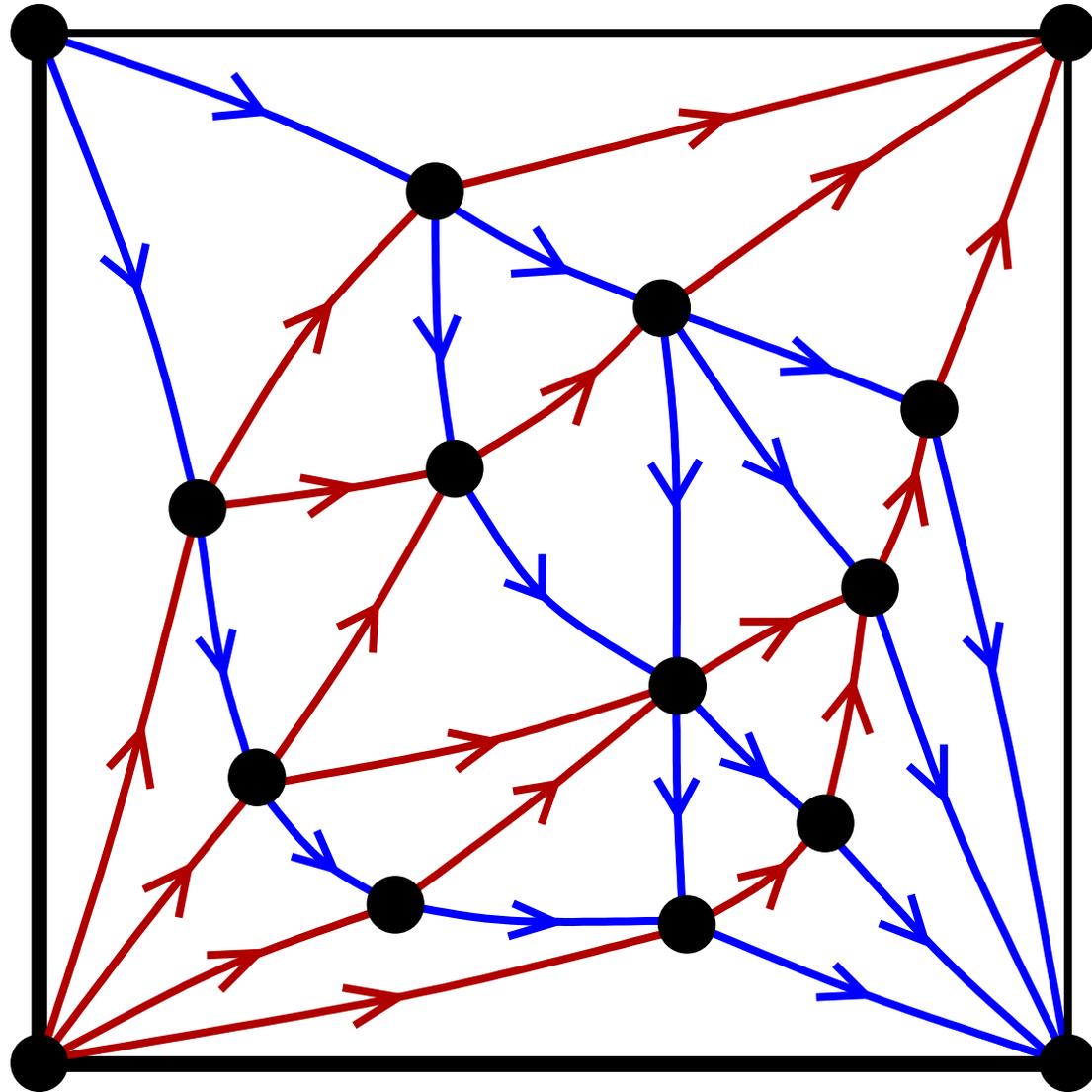
Existence et calcul



Existence et calcul

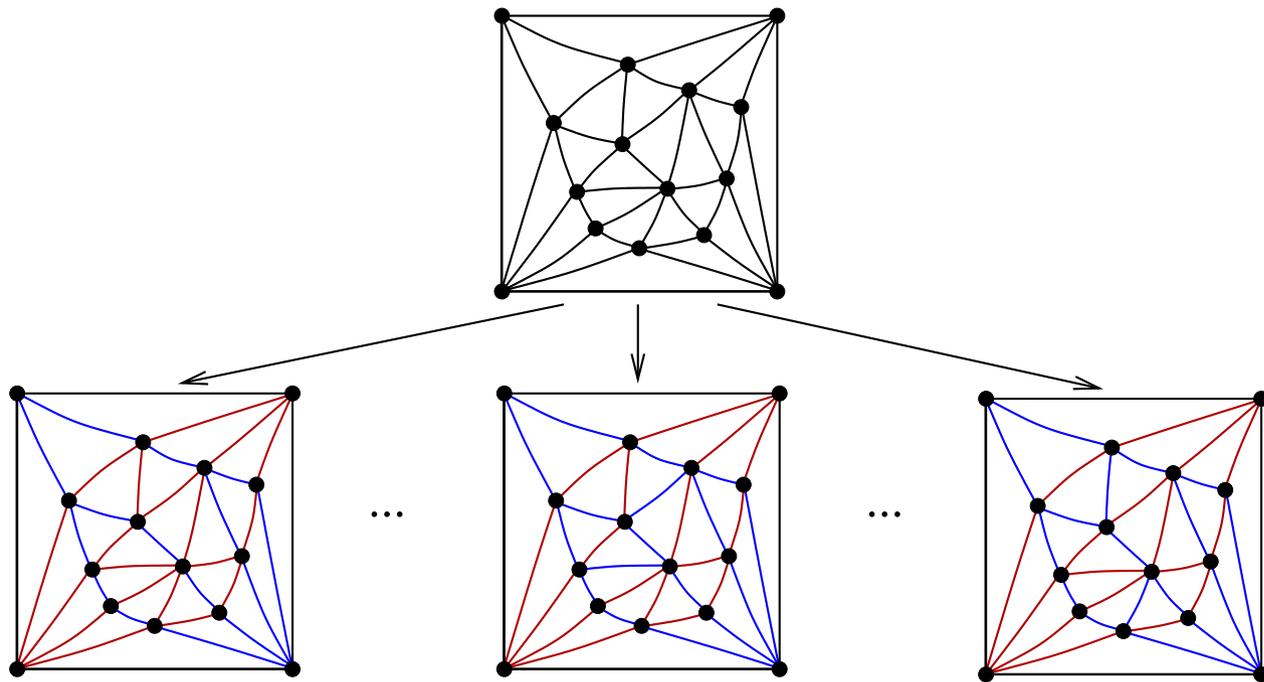


Existence et calcul

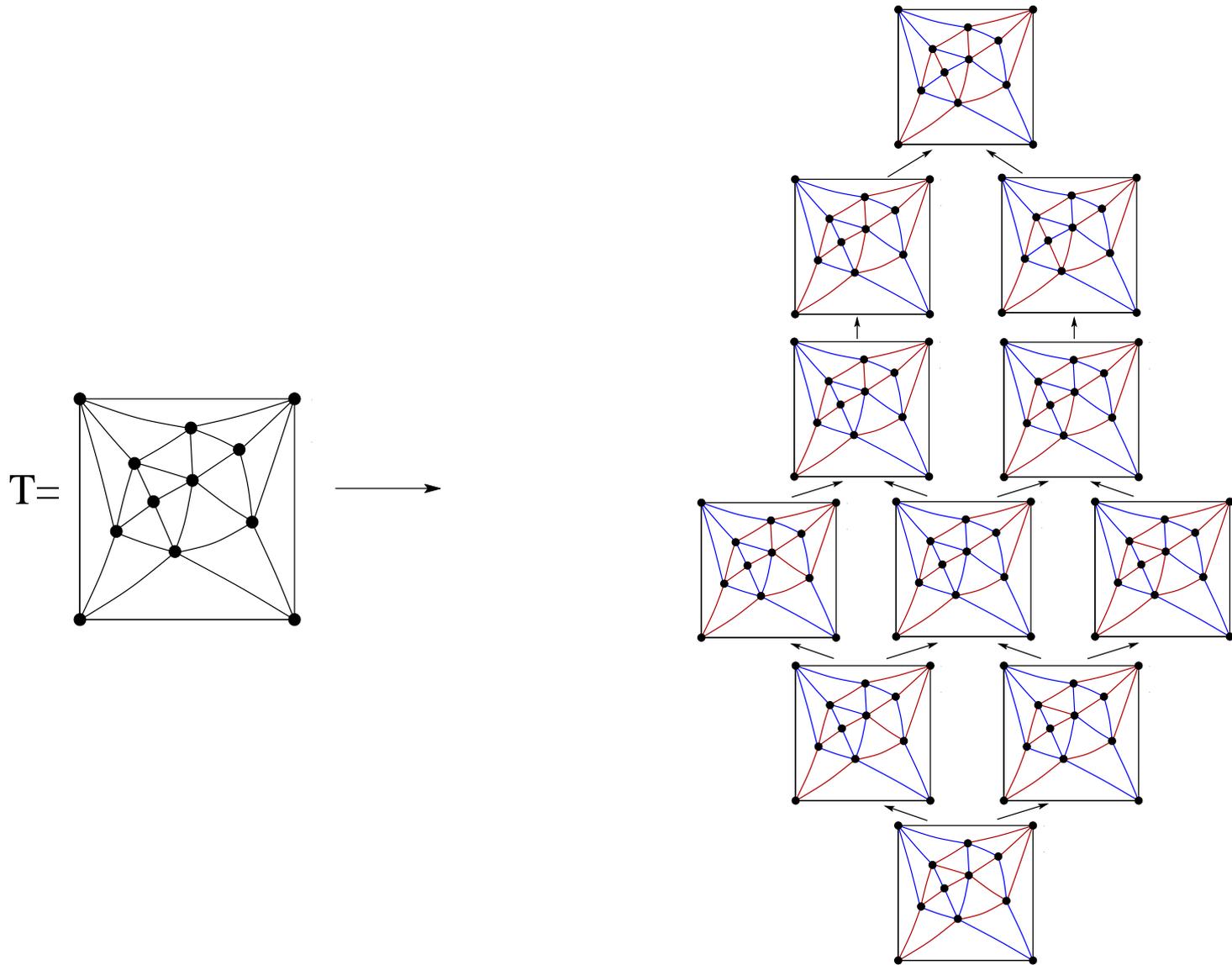


L'ensemble des structures transverses

- Pour une triangulation T fixée, la structure transverse n'est pas unique
- Soit X_T l'ensemble des structures transverses de T
- Que peut-on dire de X_T ?

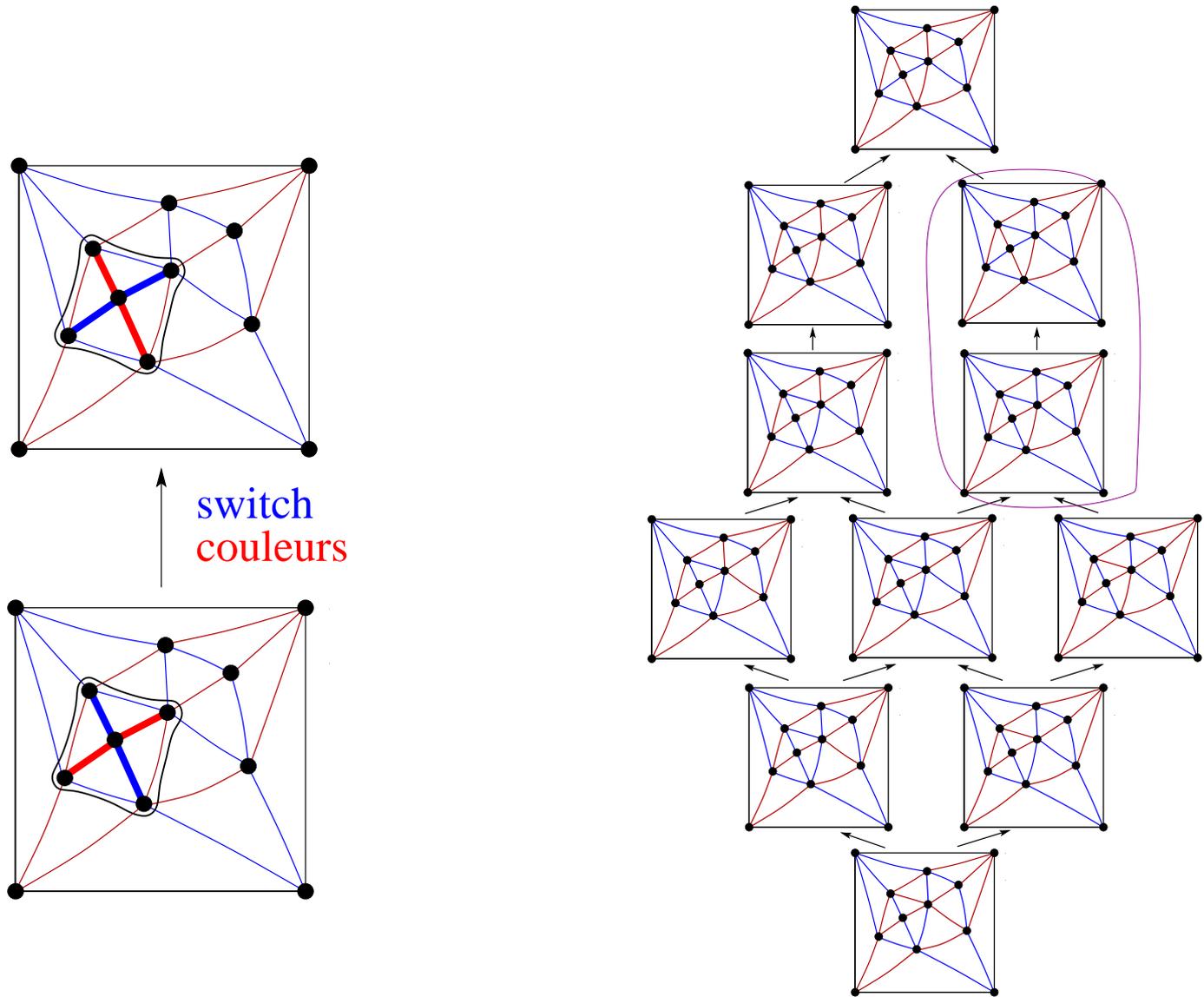


X_T est un treillis distributif



(à comparer à Ossona de Mendez'94, Felsner'03)

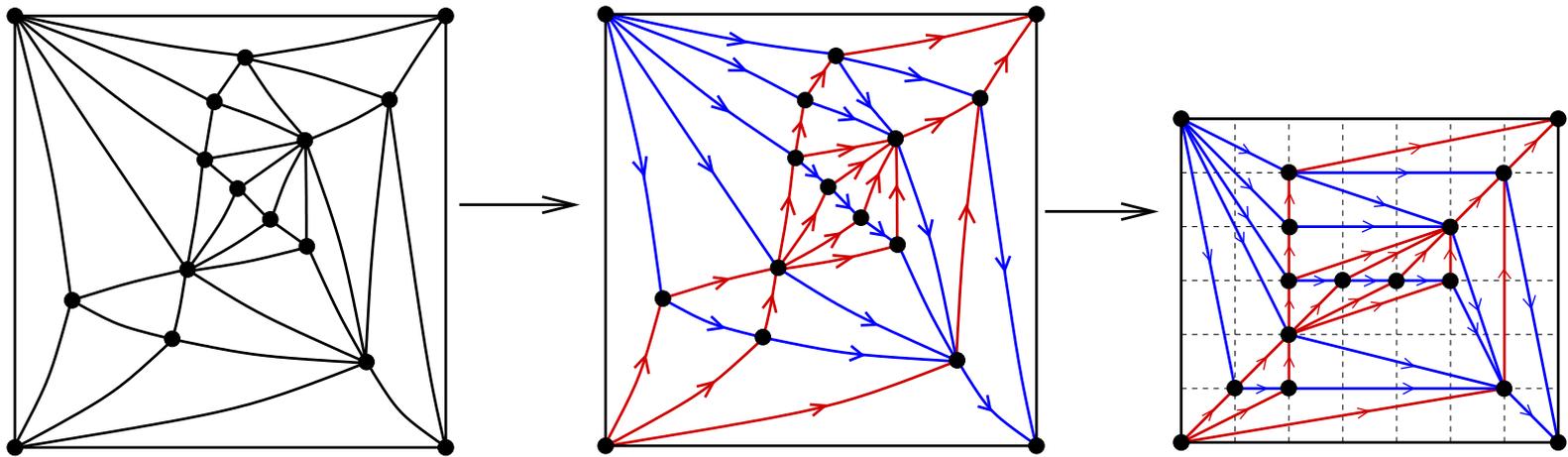
X_T est un treillis distributif



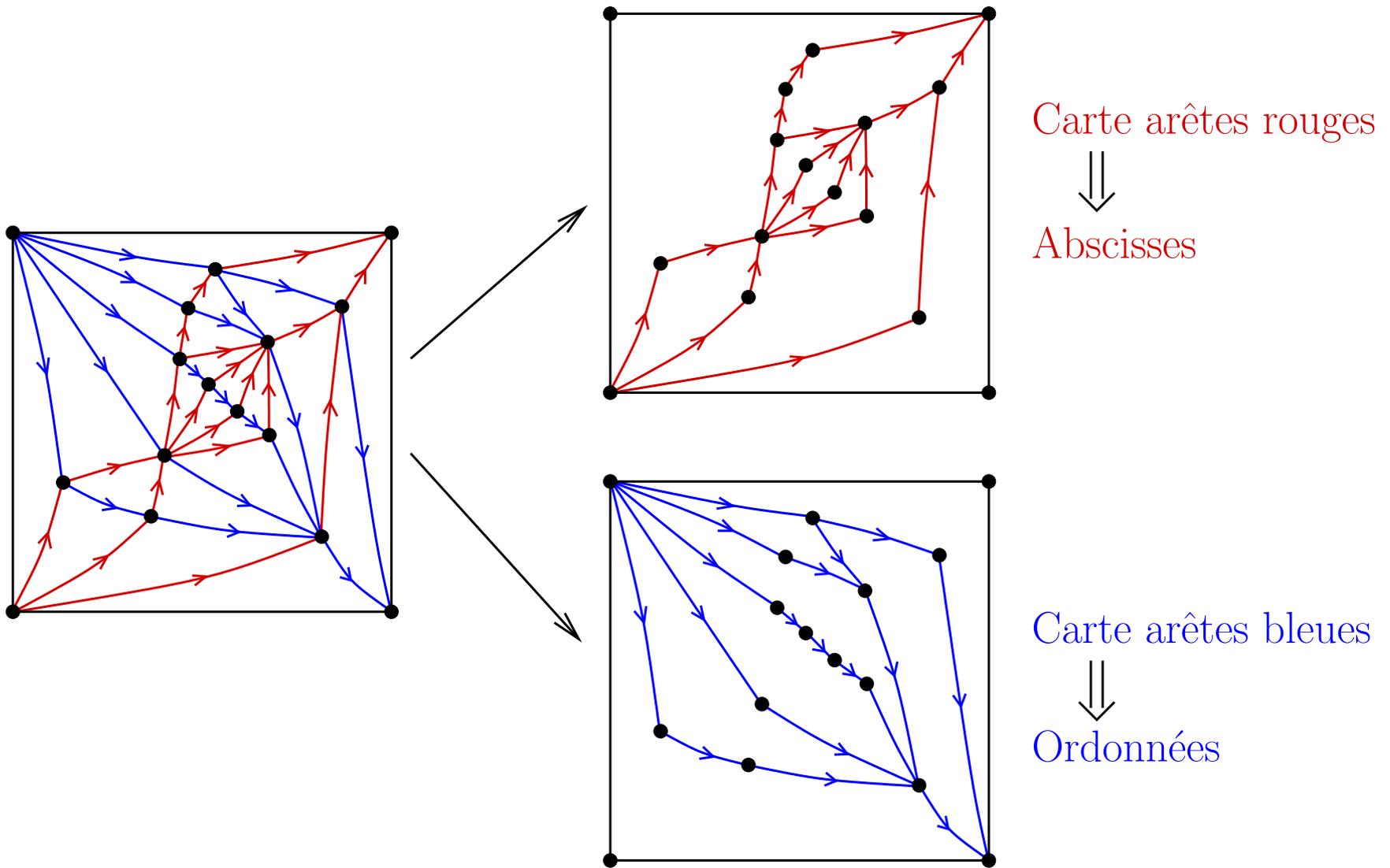
(à comparer à Ossona de Mendez'94, Felsner'03)

Application au dessin de graphes

Les **structures transverses** permettent de **dessiner** une triangulation sur une grille régulière



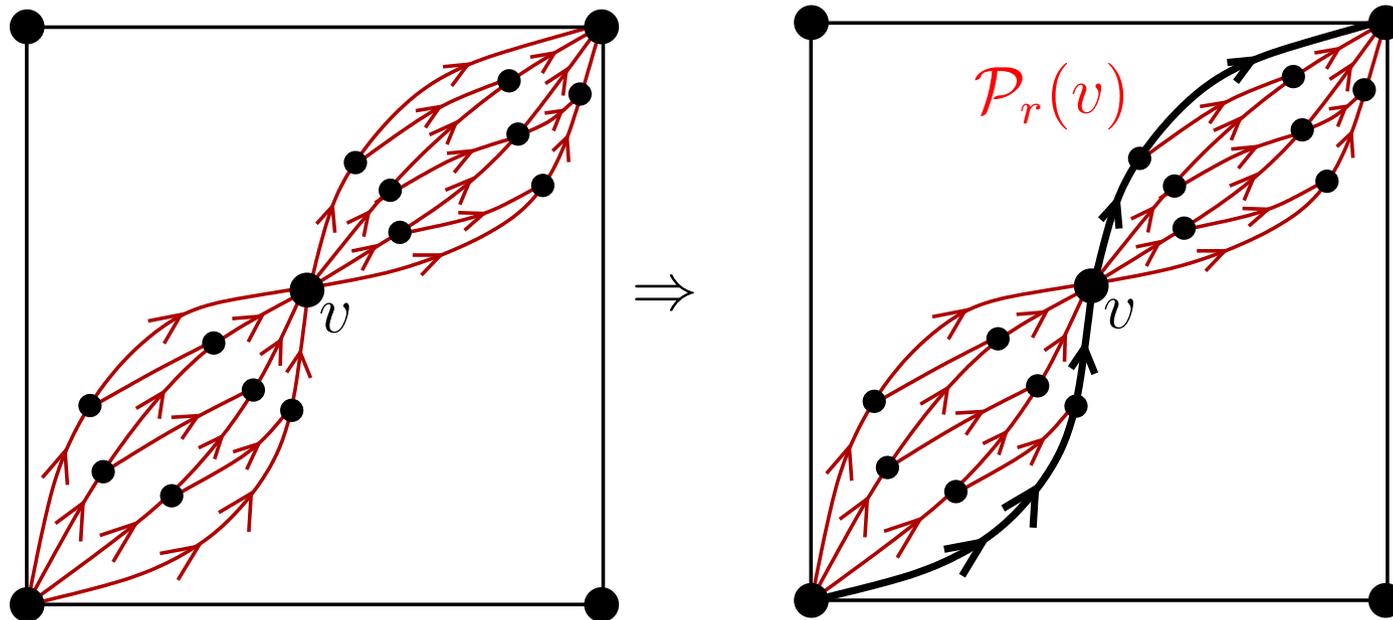
Idée de l'algorithme



Les arêtes rouges donnent l'abscisse

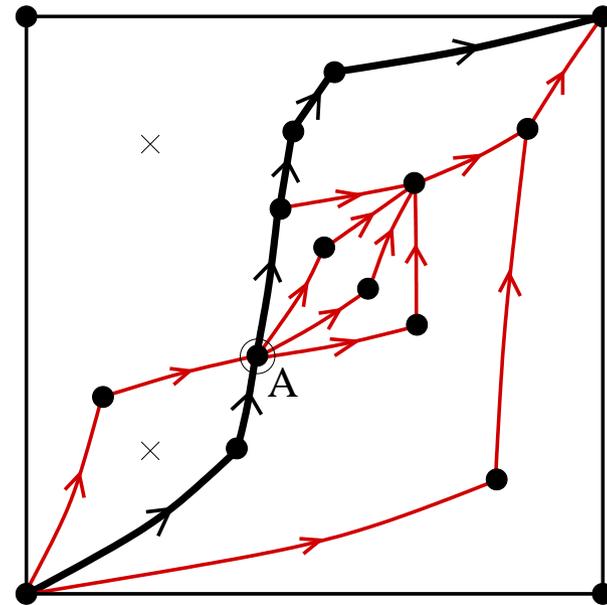
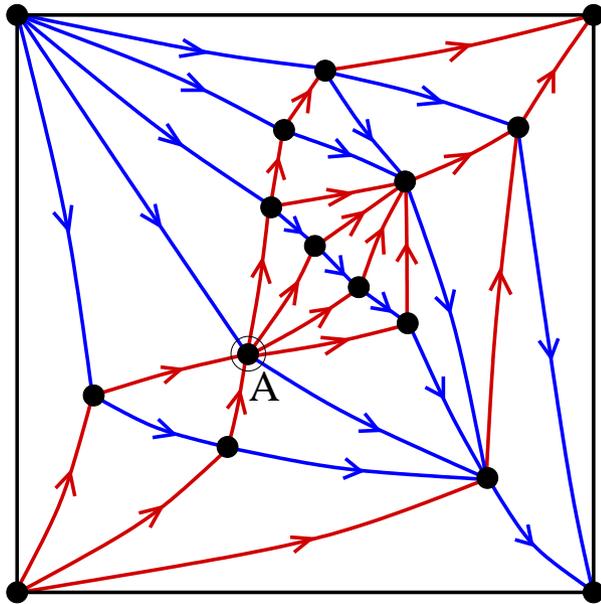
Pour tout sommet v , on considère le chemin $\mathcal{P}_r(v)$ qui est:

- le **plus à droite** avant d'arriver à v
- le **plus à gauche** après avoir quitté v



Les arêtes rouges donnent l'abscisse

L'**abscisse** de v est le nombre de faces à gauche de $\mathcal{P}_r(v)$

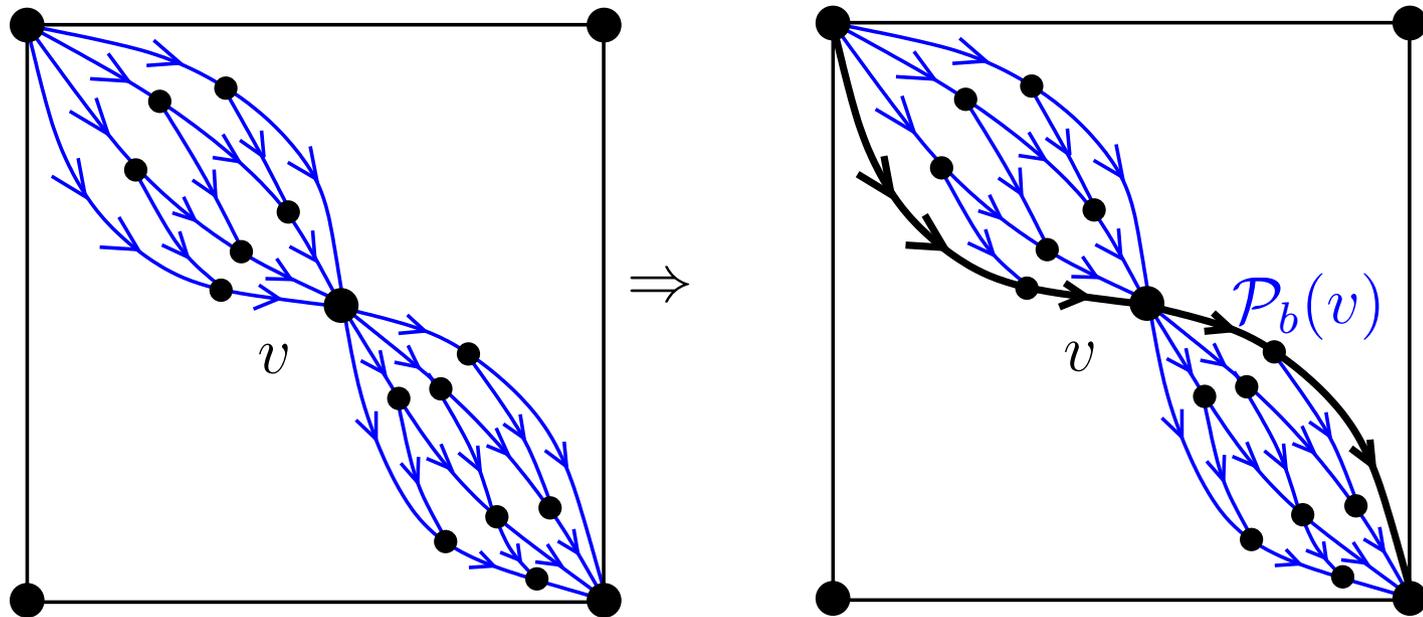


\Rightarrow l'abscisse de A est 2

Les arêtes bleues donnent l'ordonnée

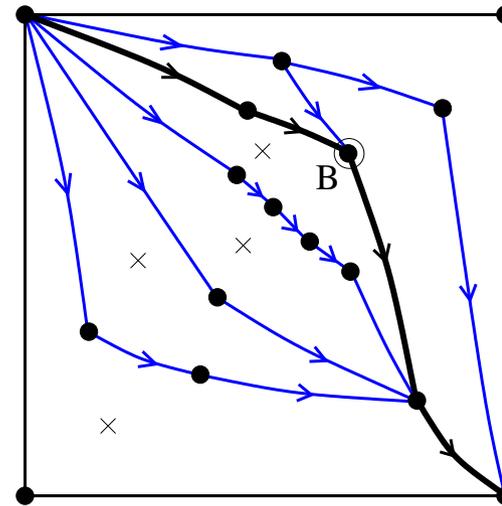
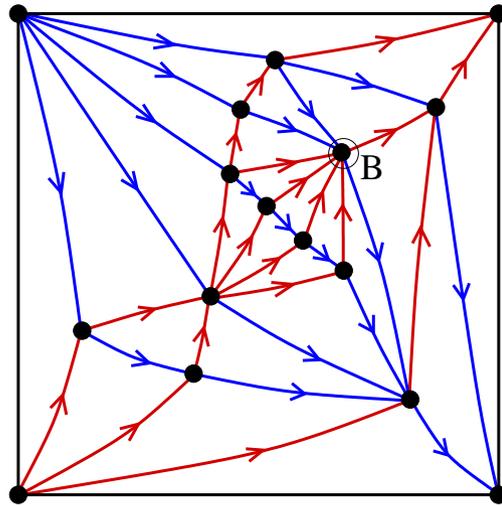
Pour tout sommet v , on considère le chemin $\mathcal{P}_b(v)$ qui est:

- le **plus à droite** avant d'arriver à v
- le **plus à gauche** après avoir quitté v



Les arêtes bleues donnent l'ordonnée

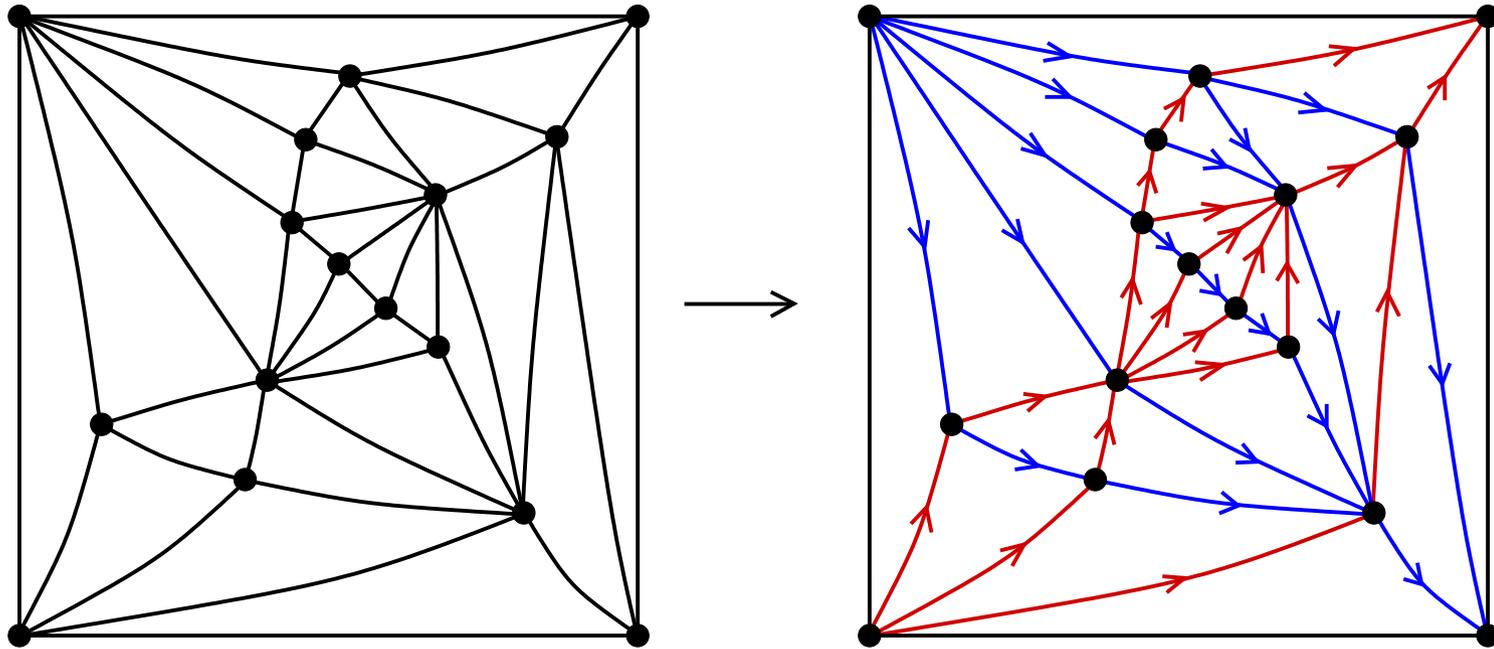
L'ordonnée de v est le nombre de faces en dessous de $\mathcal{P}_b(v)$



\Rightarrow l'ordonnée de B est 4

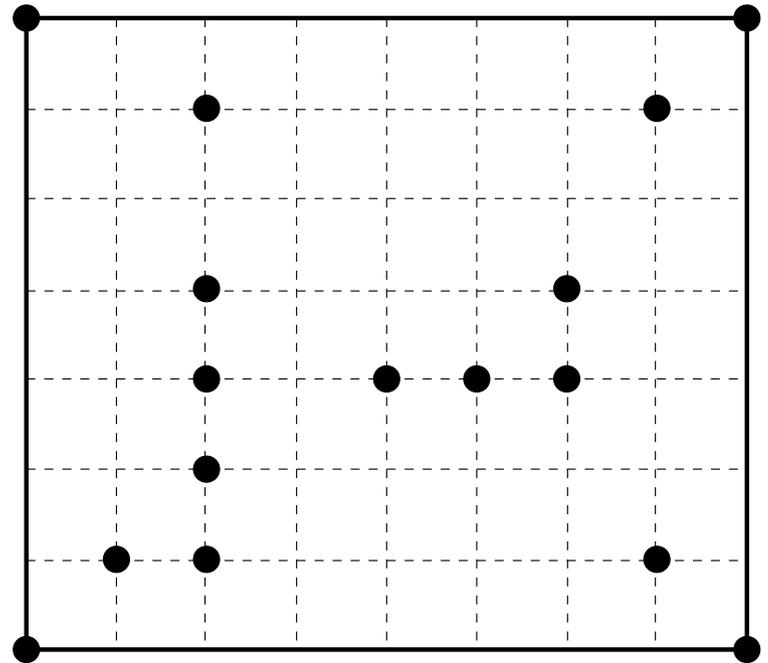
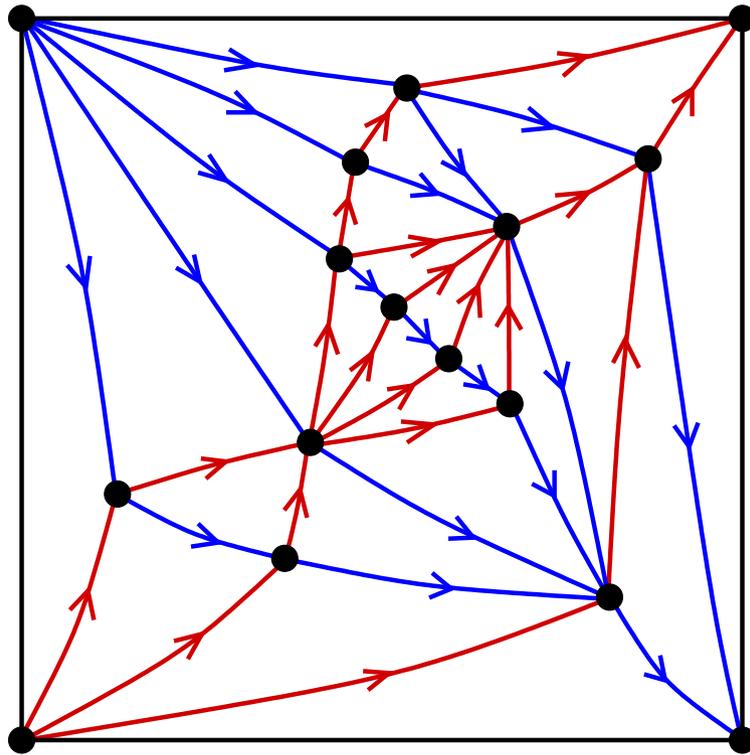
Exécution complète

Calcul d'une structure transverse



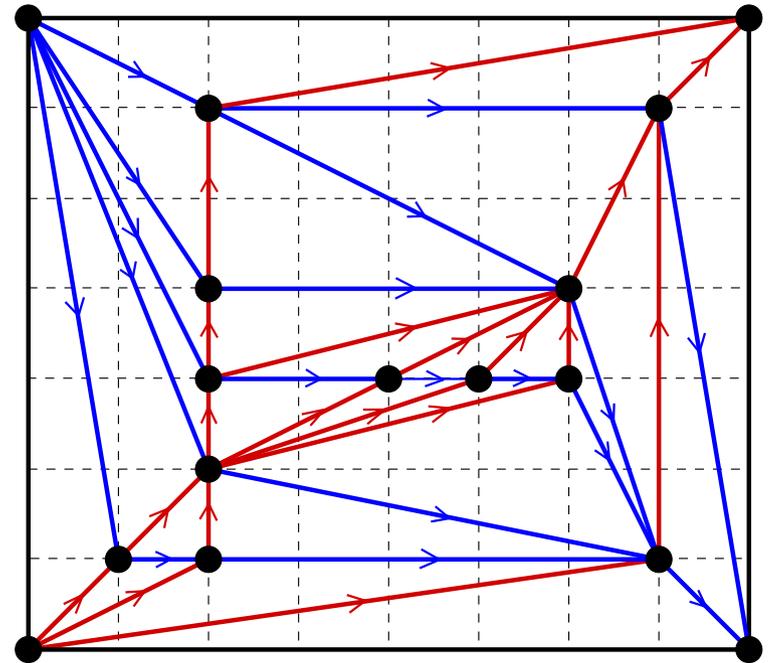
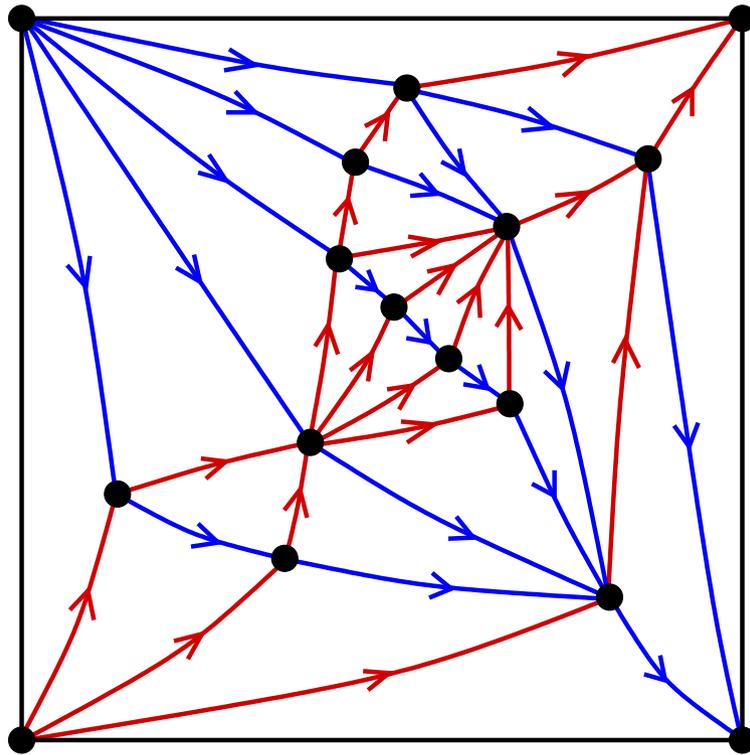
Exécution complète

Placement des sommets



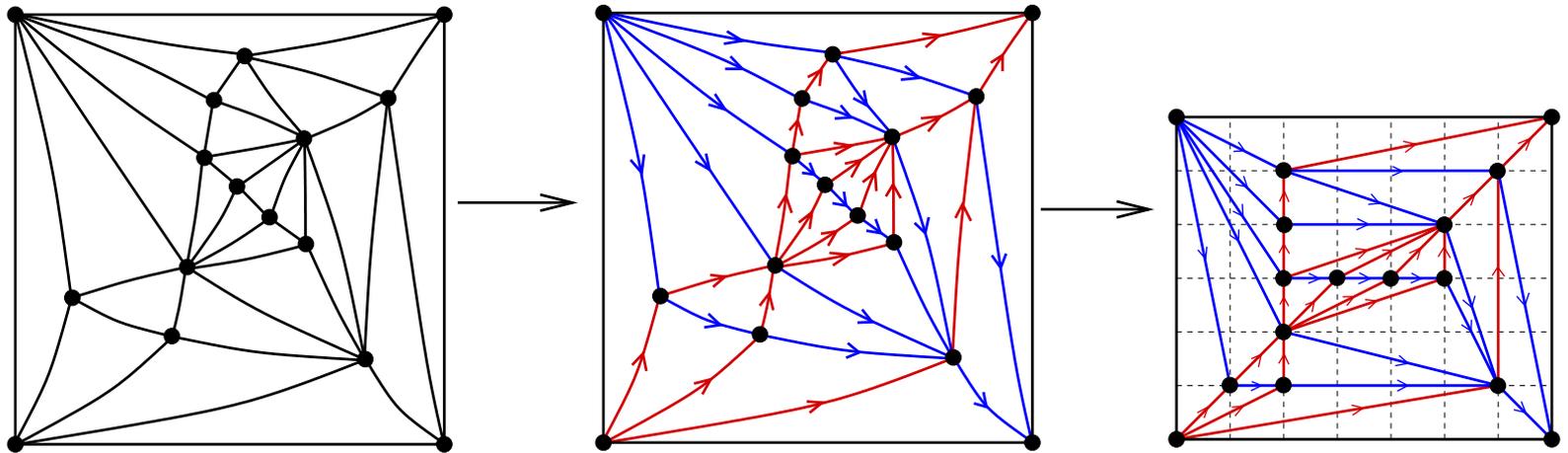
Exécution complète

Tracé des arêtes



Résultat

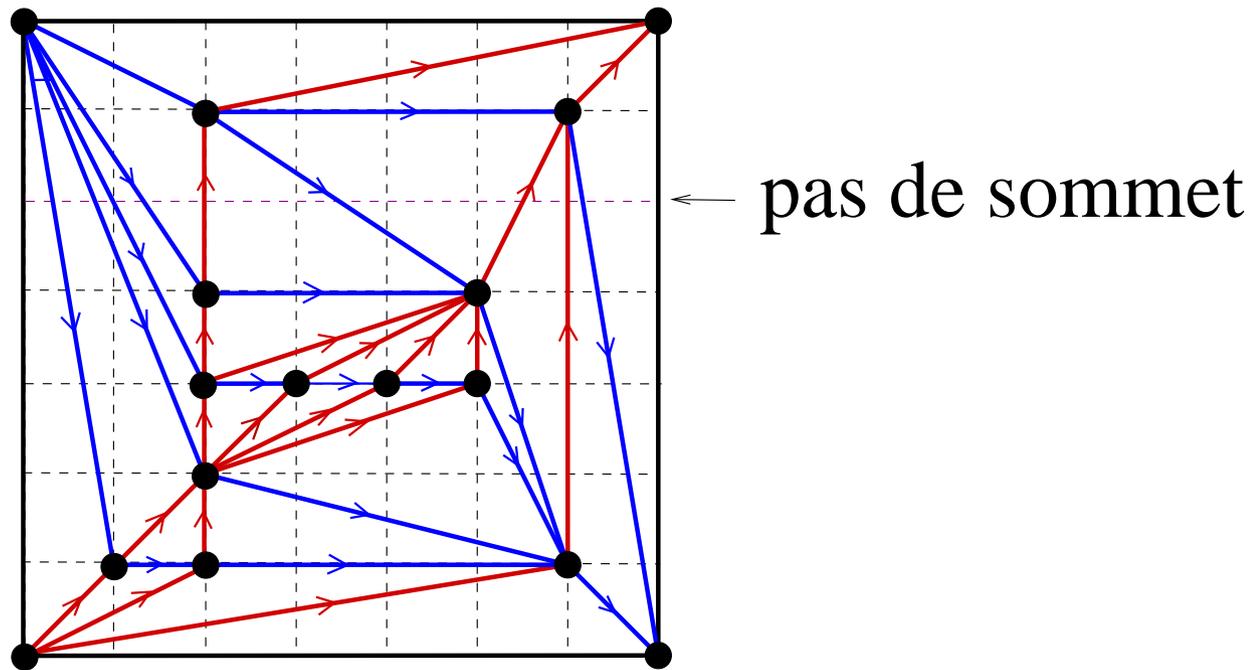
- Théorème: le dessin obtenu est **planaire**



- Pour une triangulation à n sommets, le **demi-périmètre** de la grille est $n - 1$

Réduction supplémentaire

- Certaines lignes (abscisses ou ordonnées) de la grille sont **inoccupées**
- Le dessin **reste planaire** quand on **supprime** ces lignes

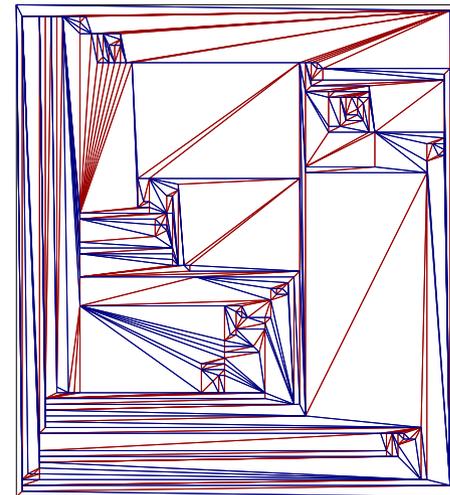
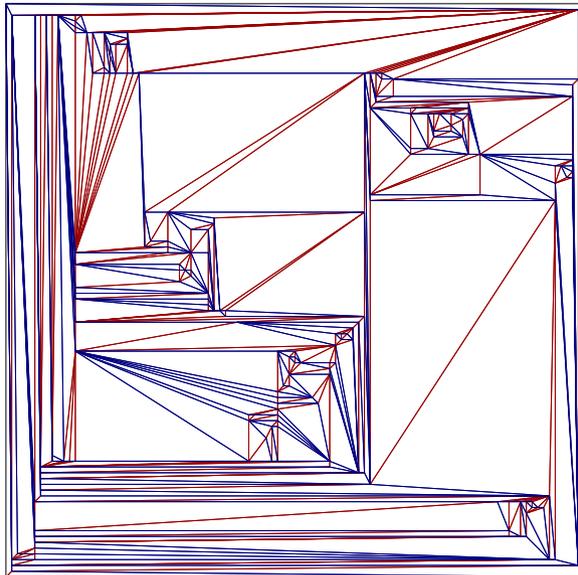


Taille de la grille après réduction?

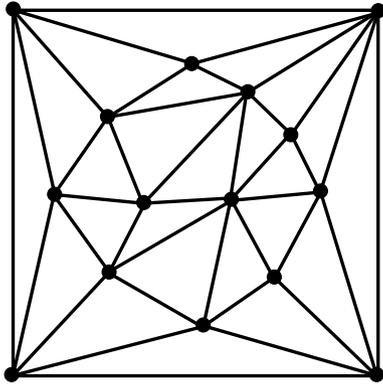
- **Théorème:** Si la structure transverse est la minimale, la taille de la grille après réduction est

$$\simeq \frac{11}{27}n \times \frac{11}{27}n \quad \text{“avec proba. tendant vers 1”}$$

- **Gain en surface** par un **facteur** $\left(\frac{27}{22}\right)^2 \approx 1,5$ par rapport à Miura et al'01 $\left(\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}\right)$

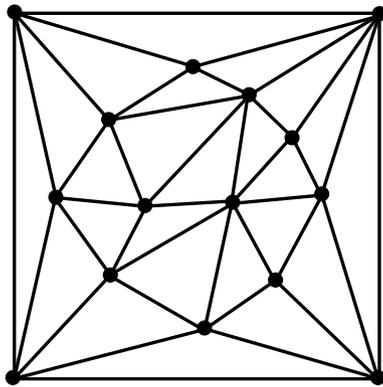


triangulations \leftrightarrow arbres ternaires

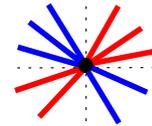
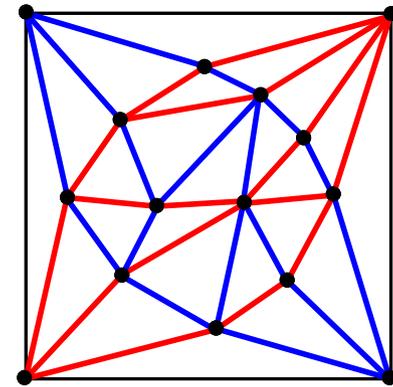


**Théorème: les triangulations irréductibles
sont en bijection avec les arbres ternaires**

triangulations \leftrightarrow arbres ternaires

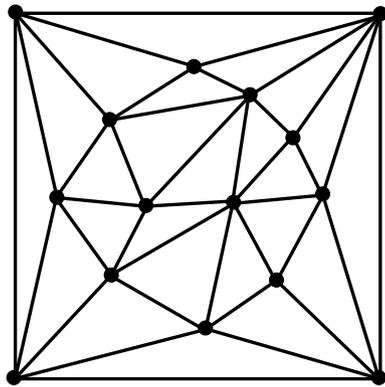


structure transverse
minimale

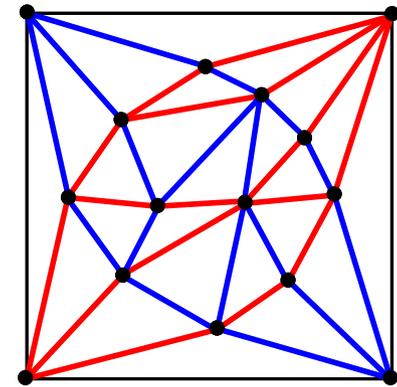


**Théorème: les triangulations irréductibles
sont en bijection avec les arbres ternaires**

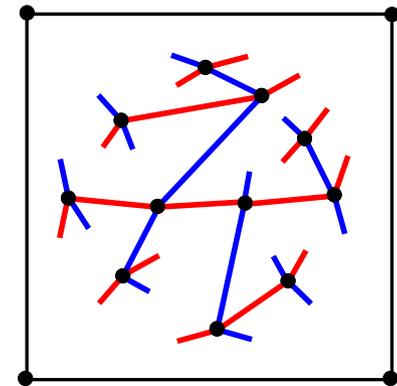
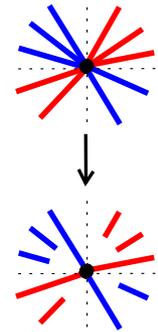
triangulations \leftrightarrow arbres ternaires



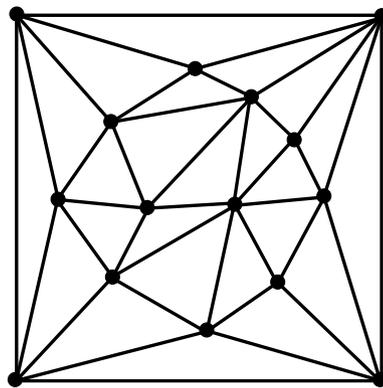
structure transverse
minimale
→



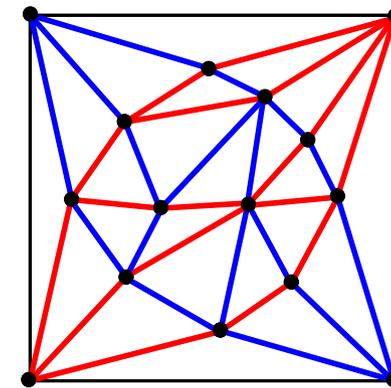
**Théorème: les triangulations irréductibles
sont en bijection avec les arbres ternaires**



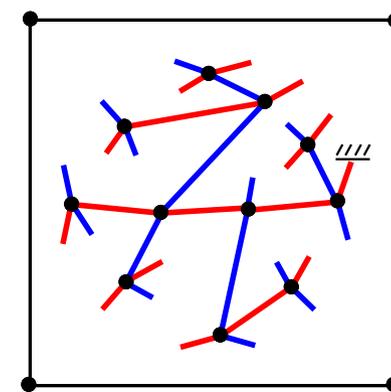
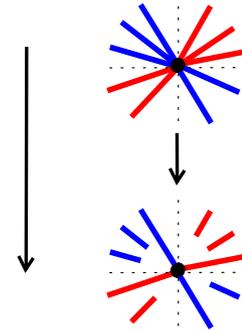
triangulations \leftrightarrow arbres ternaires



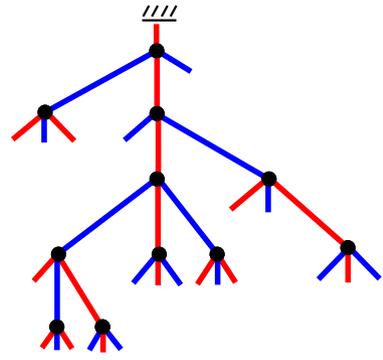
structure transverse
minimale



**Théorème: les triangulations irréductibles
sont en bijection avec les arbres ternaires**



enracinement

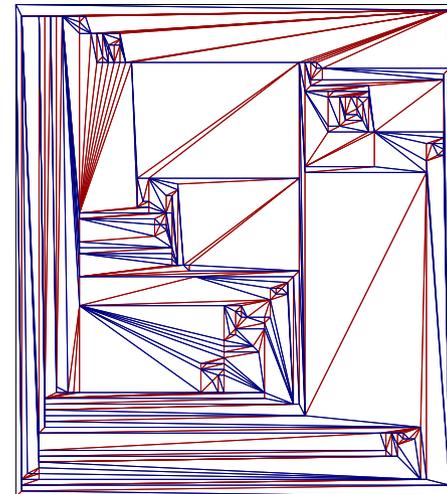
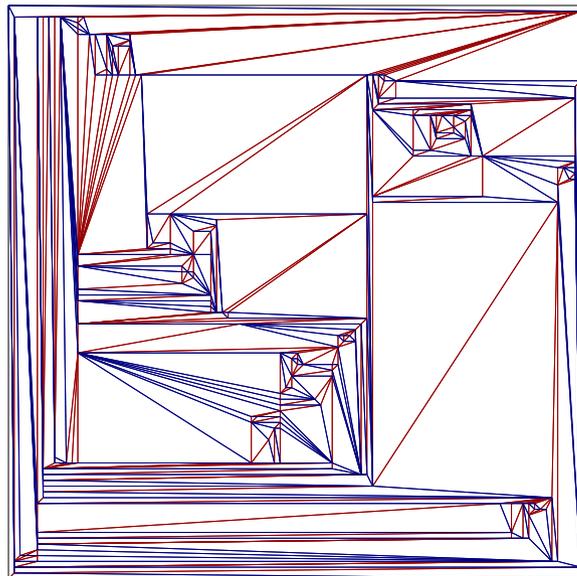


Applications de la bijection

- Énumération:

$$T_n = \frac{4}{2n+2} \frac{(3n)!}{n!(2n+1)!}$$

- Génération aléatoire uniforme en temps linéaire



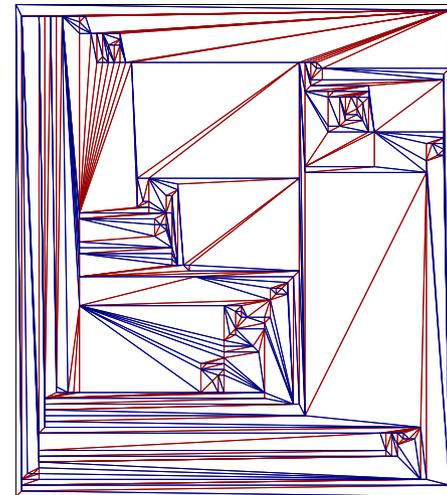
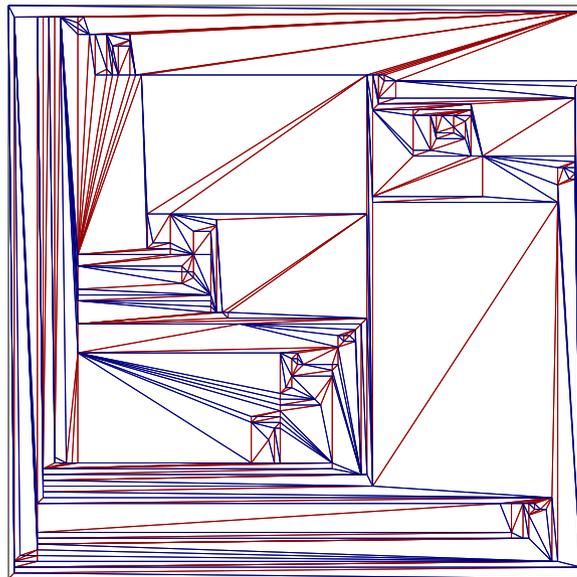
- Analyse de la taille de la grille

Applications de la bijection

- Énumération:

$$T_n = \frac{4}{2n+2} \frac{(3n)!}{n!(2n+1)!}$$

- Génération aléatoire uniforme en temps linéaire



- Analyse de la taille de la grille

Taille de la grille ?

Pour une triangulation irréductible à n sommets

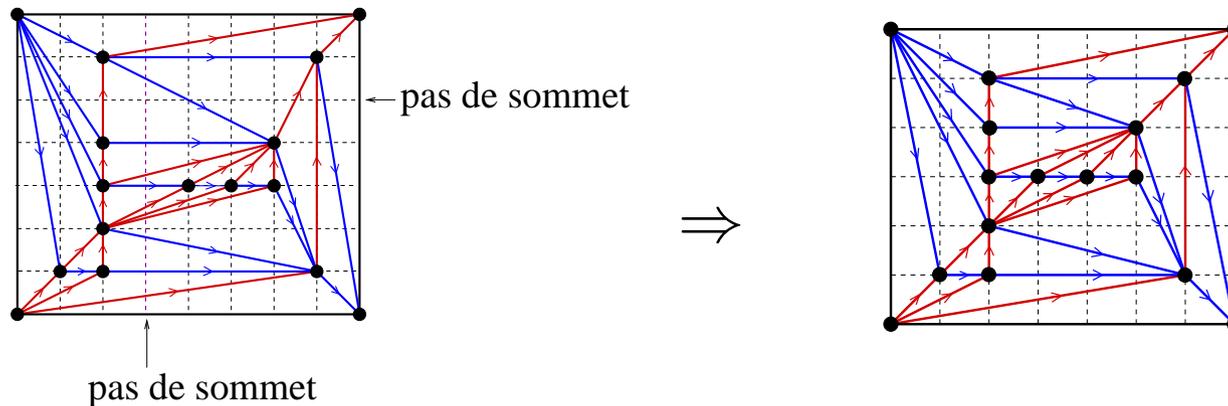
- Dessin par **comptage de faces**:

$$\text{Demi-périmètre} = n - 1$$

- Dessin **après réduction**:

$$\text{Demi-périmètre} = n - 1 - \Delta$$

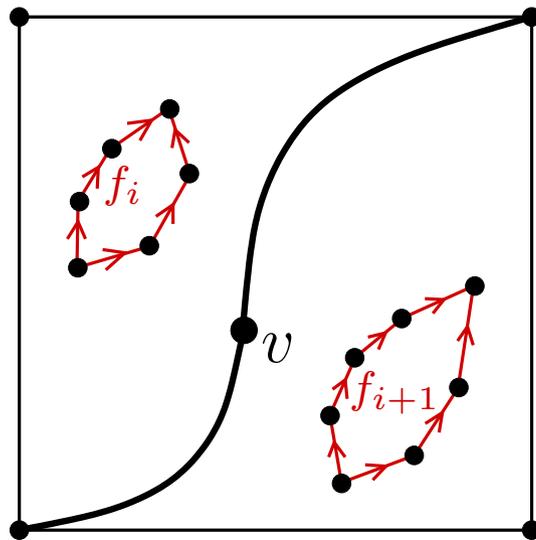
où Δ est le nombre de **coordonnées inutilisées**



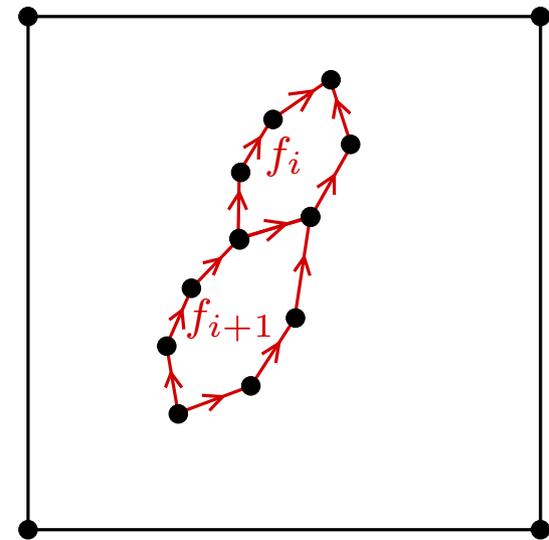
Théorème: $\Delta \simeq \frac{5n}{27}$ avec proba. tendant vers 1.

Analyse de la taille de la grille

1) On repère combinatoirement les **abscisses inoccupées**



$$Abs(v) = i$$

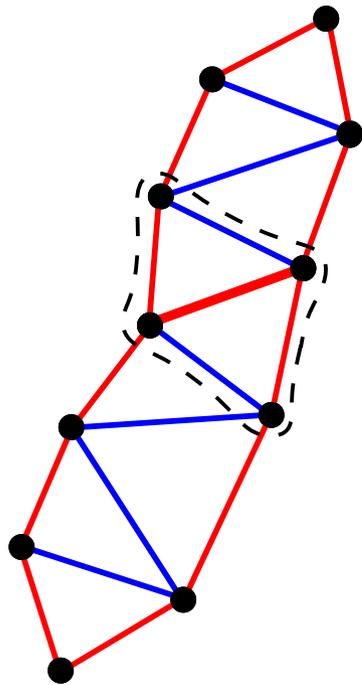


Abcisse i inoccupée

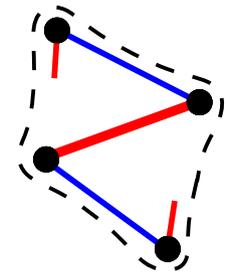
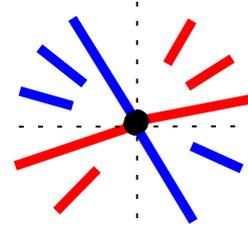
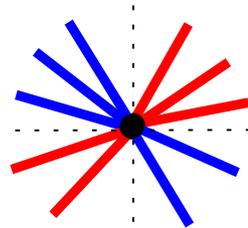
Analyse de la taille de la grille

2) On se ramène à compter certains motifs sur des arbres ternaires

triangulation \longrightarrow arbre ternaire



abscisse
inutilisée



motif en Z

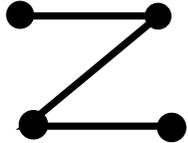
Analyse de la taille de la grille

3) On analyse le paramètre par séries génératrices

- Soit $T(z) = \sum_n T_n z^n$ la série en **une variable**:

$$\mathcal{T} = \mathcal{Z} \times (1 + \mathcal{T})^3 \quad \Rightarrow \quad T(z) = z(1 + T(z))^3$$

- En **deux variables** $\Rightarrow T(z, u) = \sum_{n,k} T_{n,k} z^n u^k$

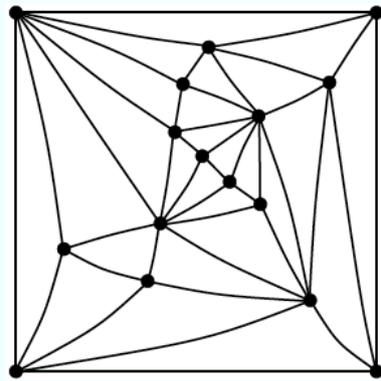
le nombre de  est marqué par u

- Théorème des quasi-puissances (Hwang, Flajolet-Sedgewick)

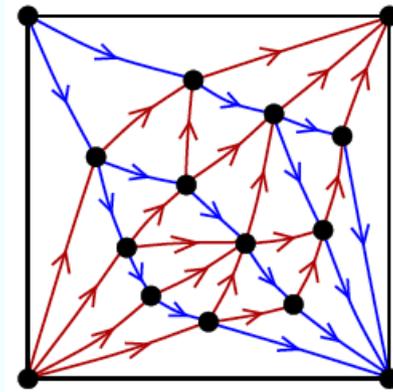
$$\rho(u) := \text{Sing}(z \rightarrow T(z, u)) \quad -\frac{\rho'(1)}{\rho(1)} = \frac{5}{27}$$

\Rightarrow le nombre de  est $\sim \frac{5n}{27}$ avec grande probabilité

Bilan sur les cartes planaires

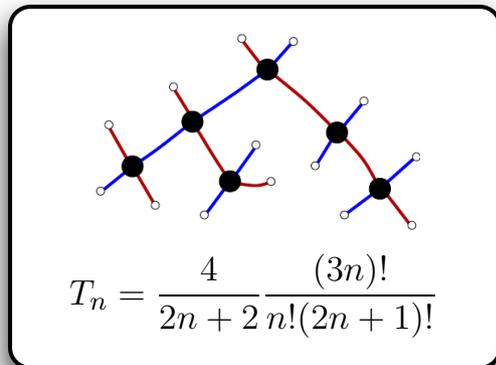


Carte planeaire

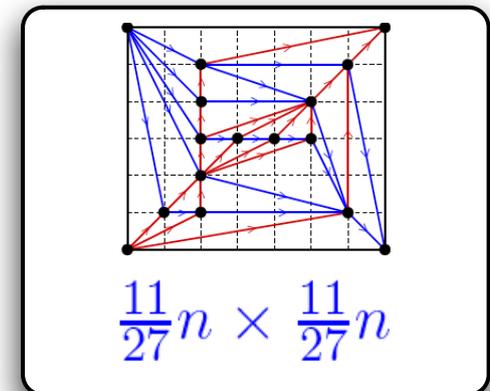


Structure combinatoire

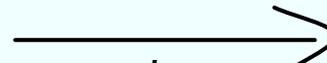
Bijection



Dessin



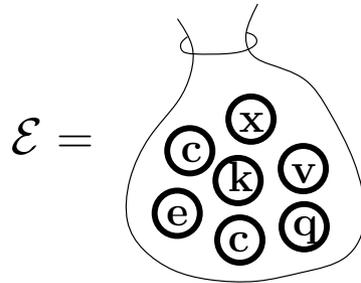
analyse



Génération aléatoire de graphes planaires

Problématique générale

- On a un ensemble \mathcal{E} d'objets



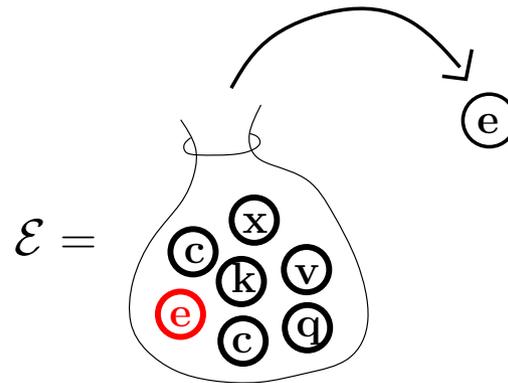
- On veut une procédure qui tire au hasard un élément de \mathcal{E} selon la loi **uniforme**

$$\mathbb{P}(\gamma) = \frac{1}{\text{Card}(\mathcal{E})} \quad \forall \gamma \in \mathcal{E}$$

- **Hypothèse:** on dispose d'un générateur de bits aléatoires

Problématique générale

- On a un ensemble \mathcal{E} d'objets



- On veut une procédure qui tire au hasard un élément de \mathcal{E} selon la loi **uniforme**

$$\mathbb{P}(\gamma) = \frac{1}{\text{Card}(\mathcal{E})} \quad \forall \gamma \in \mathcal{E}$$

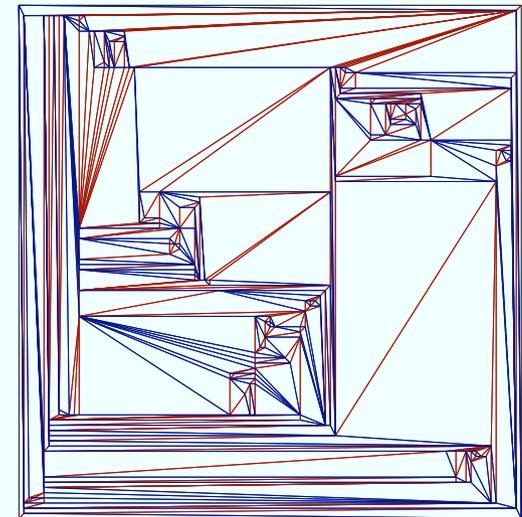
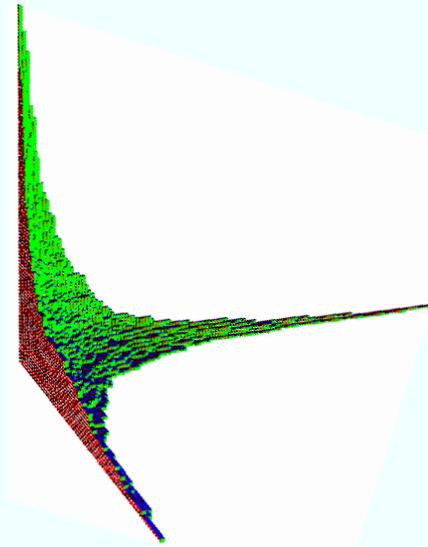
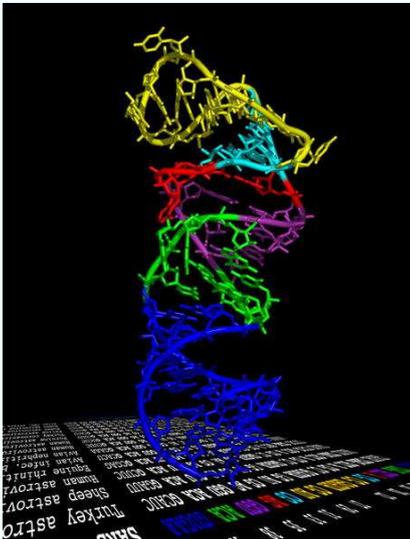
- **Hypothèse:** on dispose d'un générateur de bits aléatoires

Motivations

- Intérêt combinatoire : observation de comportements asymptotiques difficiles à obtenir par l'analyse



- Génération d'objets pour l'expérimentation :
 - en bio-informatique
 - tests de logiciels
 - ...



Générateurs de Boltzmann (1)

Pour toute classe combinatoire $\mathcal{C} = \cup_n \mathcal{C}_n$, on considère

- la série génératrice:

$$C(x) = \sum_n c_n x^n = \sum_{\gamma \in \mathcal{C}} x^{|\gamma|}$$

- la distribution de Boltzmann:

$$\mathbb{P}_x(\gamma) = \frac{x^{|\gamma|}}{C(x)}$$

Un **générateur de Boltzmann** pour \mathcal{C} est un algorithme $\Gamma C(x)$ qui engendre des objets de \mathcal{C} **sous la loi \mathbb{P}_x (x réel fixé $\leq \rho$)**

(introduit par *Duchon, Flajolet, Louchard, Schaeffer 2004*)

Générateurs de Boltzmann (2)

- **Définition:**

Un **générateur de Boltzmann** pour une classe \mathcal{C} est un algorithme $\Gamma_{\mathcal{C}}(x)$ qui engendre des objets de \mathcal{C} **aléatoirement** sous la loi

$$\mathbb{P}_x(\gamma) = \frac{x^{|\gamma|}}{C(x)}$$

où x est un **réel fixé** ($x \leq \rho$)

- **Propriétés:**

- La sortie peut avoir n'importe quelle taille: $\mathbb{P}(\text{taille} = n) = \frac{c_n x^n}{C(x)}$
- La **distribution** conditionnée à une taille fixée est **uniforme**
- On obtient un **générateur uniforme** en taille fixe par **rejet**:

```
CALL  $\Gamma_{\mathcal{C}}(x) \rightarrow \gamma$  until  $|\gamma| = n$ ; return  $\gamma$ 
```

Analogie avec physique stat.

Combinatoire \longleftrightarrow Physique statistique

Structure γ

État s

taille n

Énergie E

Série génératrice

$$C(x) = \sum_{\gamma} x^{|\gamma|}$$

Fonction de partition

$$Z = \sum_s e^{-\beta E}$$

Boltz: $\mathbb{P}(\gamma) = \frac{x^{|\gamma|}}{C(x)}$

Boltz: $\mathbb{P}(s) = \frac{e^{-\beta E}}{Z}$

Règles de génération

Théorème (Duchon *et al*'04): Une classe **décomposable** en termes de $\{+, \times\}$ admet un générateur de Boltzmann de **complexité linéaire** en la taille de la sortie.

classes de base	générateur
$\mathcal{C} = \emptyset$	$\Gamma C(x) := \text{return } \emptyset$
$\mathcal{C} = \{\bullet\}$	$\Gamma C(x) := \text{return } \{\bullet\}$

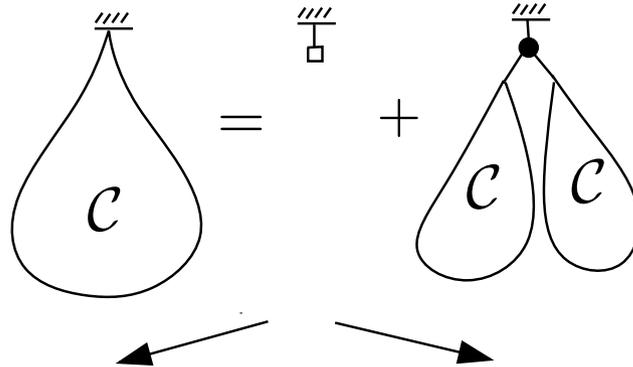
constructions	générateur
$\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$	$\Gamma C(x) := \left(\text{Bern} \frac{A(x)}{C(x)} \longrightarrow \Gamma A(x) \Gamma B(x) \right)$
$\mathcal{C} = \mathcal{A} \times \mathcal{B}$	$\Gamma C(x) := (\Gamma A(x); \Gamma B(x))$

+ Flajolet-Fusy-Pivoteau'07 (Cycle, Multiset,...)

Exemple de générateur

Soit \mathcal{C} la classe des arbres binaires

Grammaire:



Série génératrice

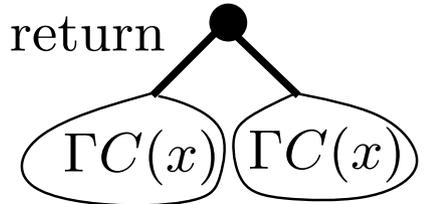
$$C(x) = 1 + xC(x)^2$$

Générateur de Boltzmann

$$\Gamma C(x)$$

$\mathbb{P} = \frac{1}{C(x)}$ $\mathbb{P} = \frac{x C(x)^2}{C(x)}$

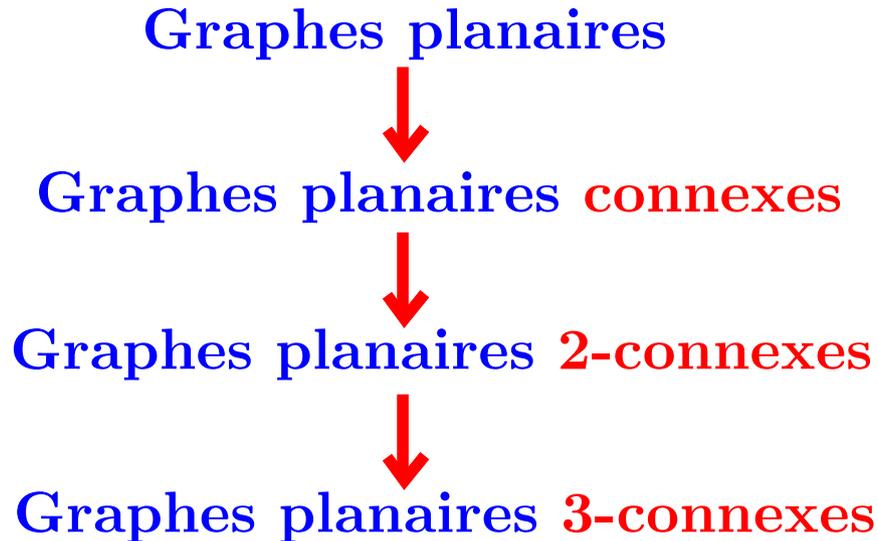
return 

return 

+ choix judicieux du paramètre x pour atteindre taille cible

Ingrédients du générateur

1) Décomposition par degré de connectivité croissant:

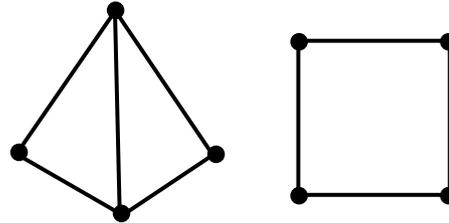


2) Bijection avec les arbres binaires:

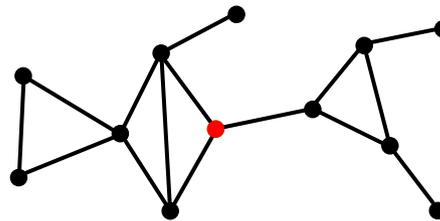


Familles de graphes planaires

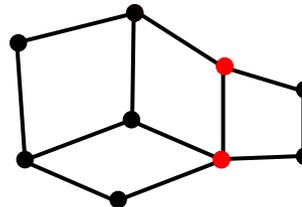
Généraux



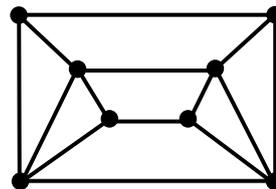
Connexes



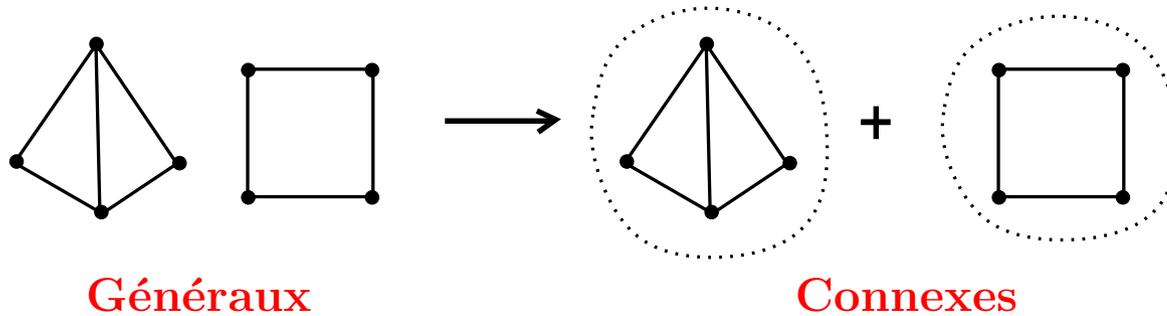
2-connexes



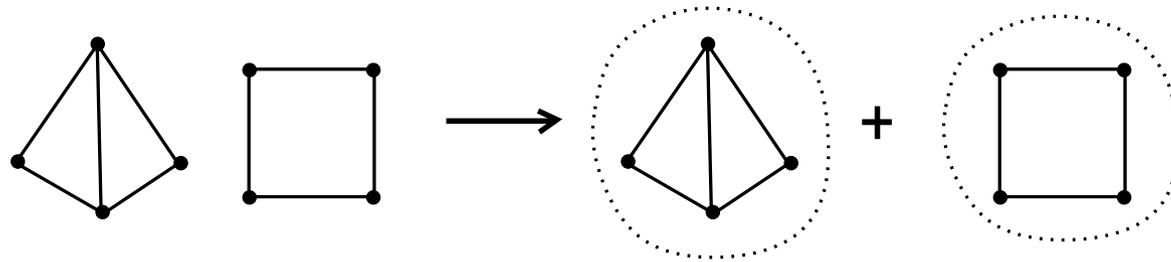
3-connexes



Décomposition de graphes planaires

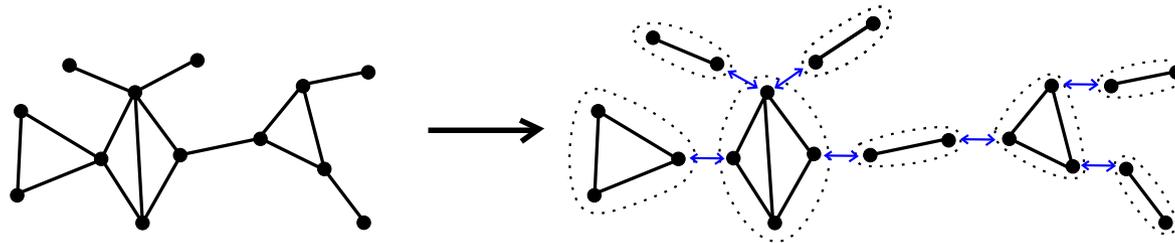


Décomposition de graphes planaires



Généraux

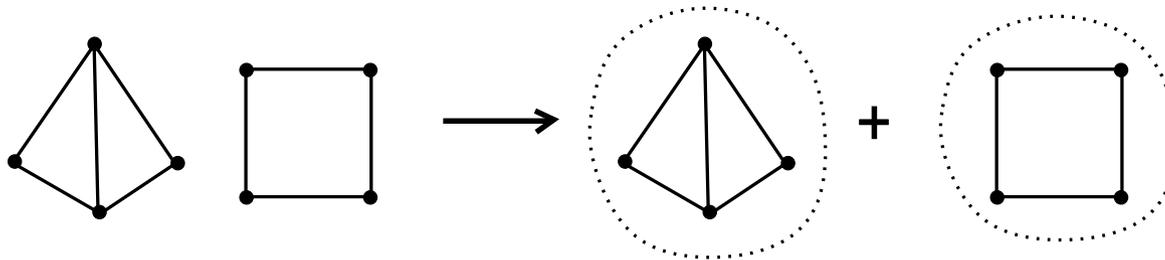
Connexes



Connexes

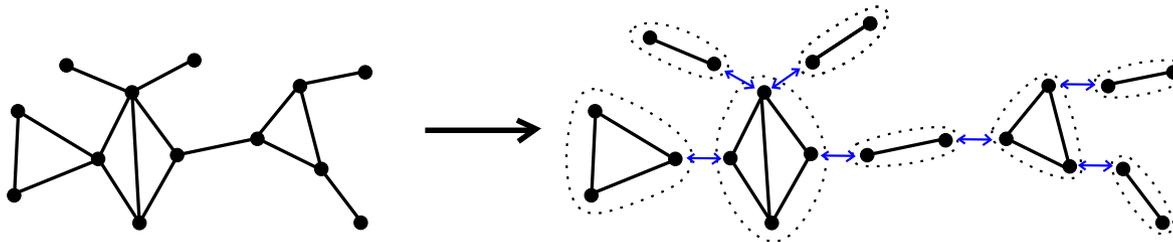
2-connexes

Décomposition de graphes planaires



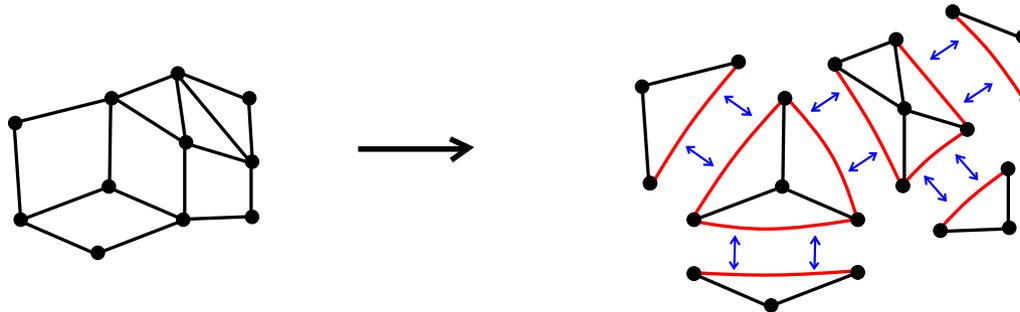
Généraux

Connexes



Connexes

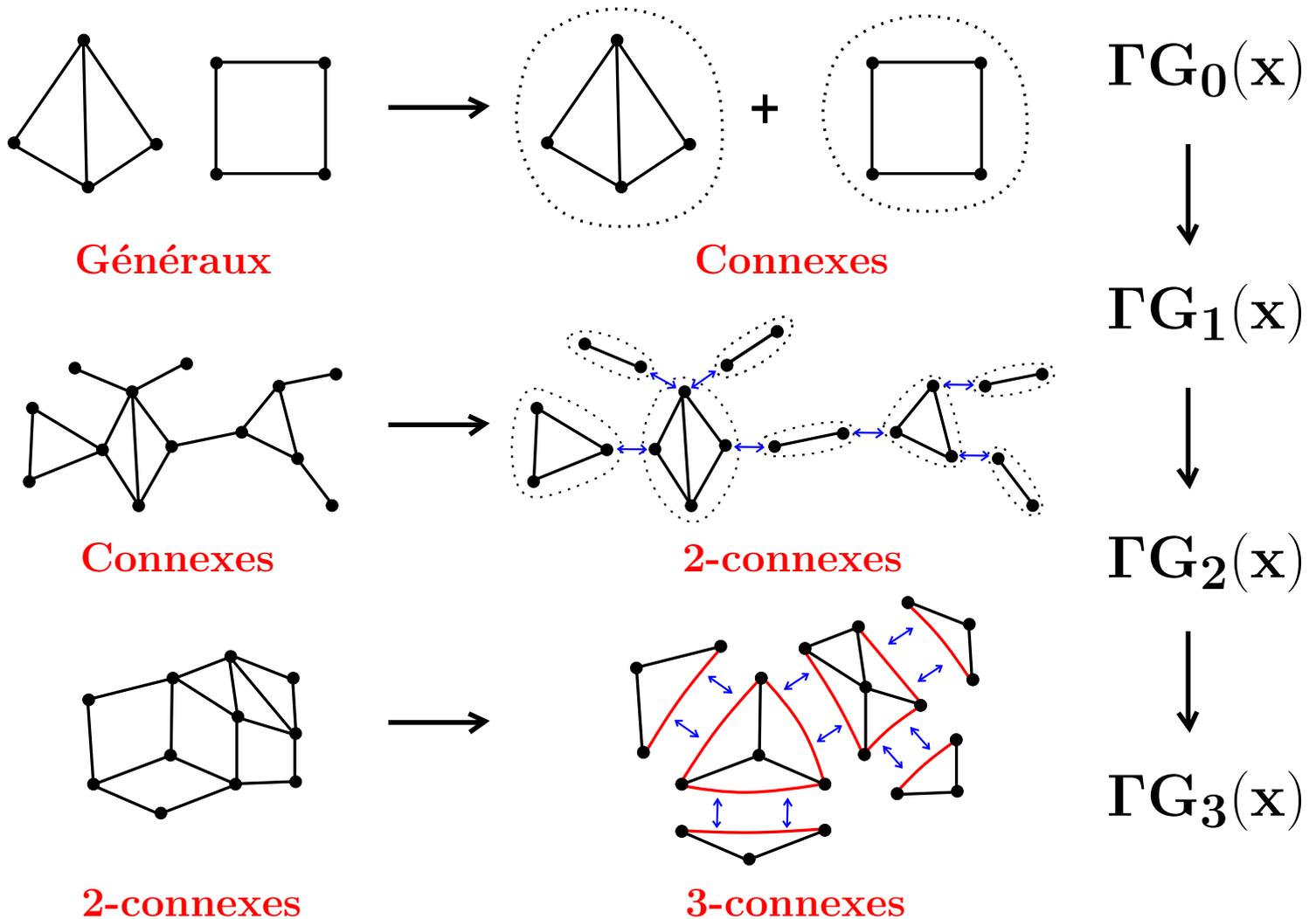
2-connexes



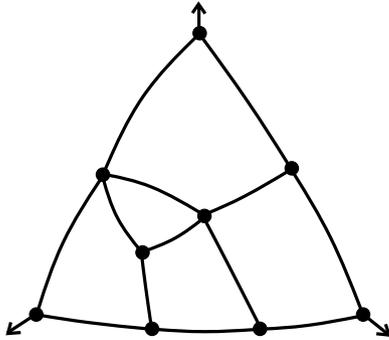
2-connexes

3-connexes

Décomposition de graphes planaires



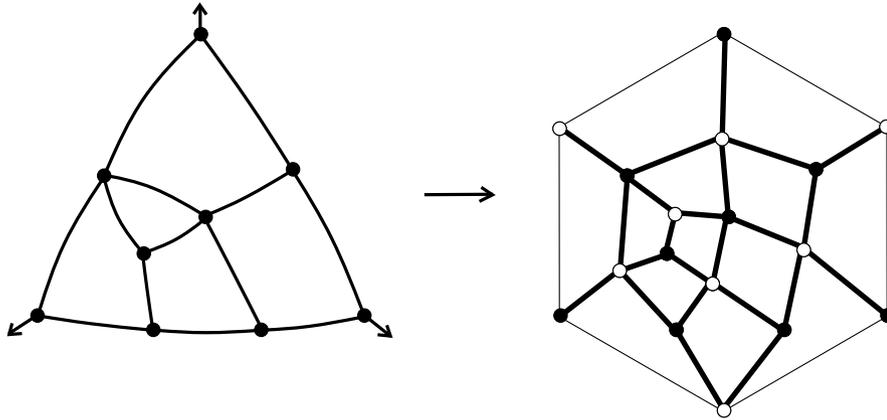
Planaires 3-connexes \leftrightarrow arbres binaires



Fusy-Poulalhon-Schaeffer'05:

graphes planaires 3-connexes \simeq arbres binaires

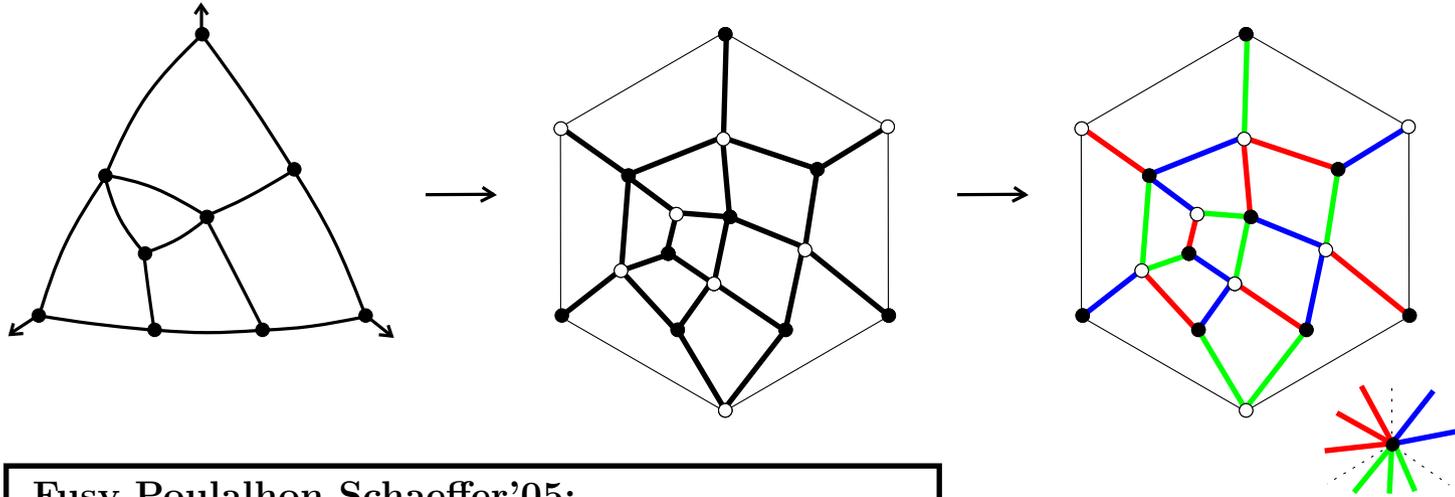
Planaires 3-connexes \leftrightarrow arbres binaires



Fusy-Poulalhon-Schaeffer'05:

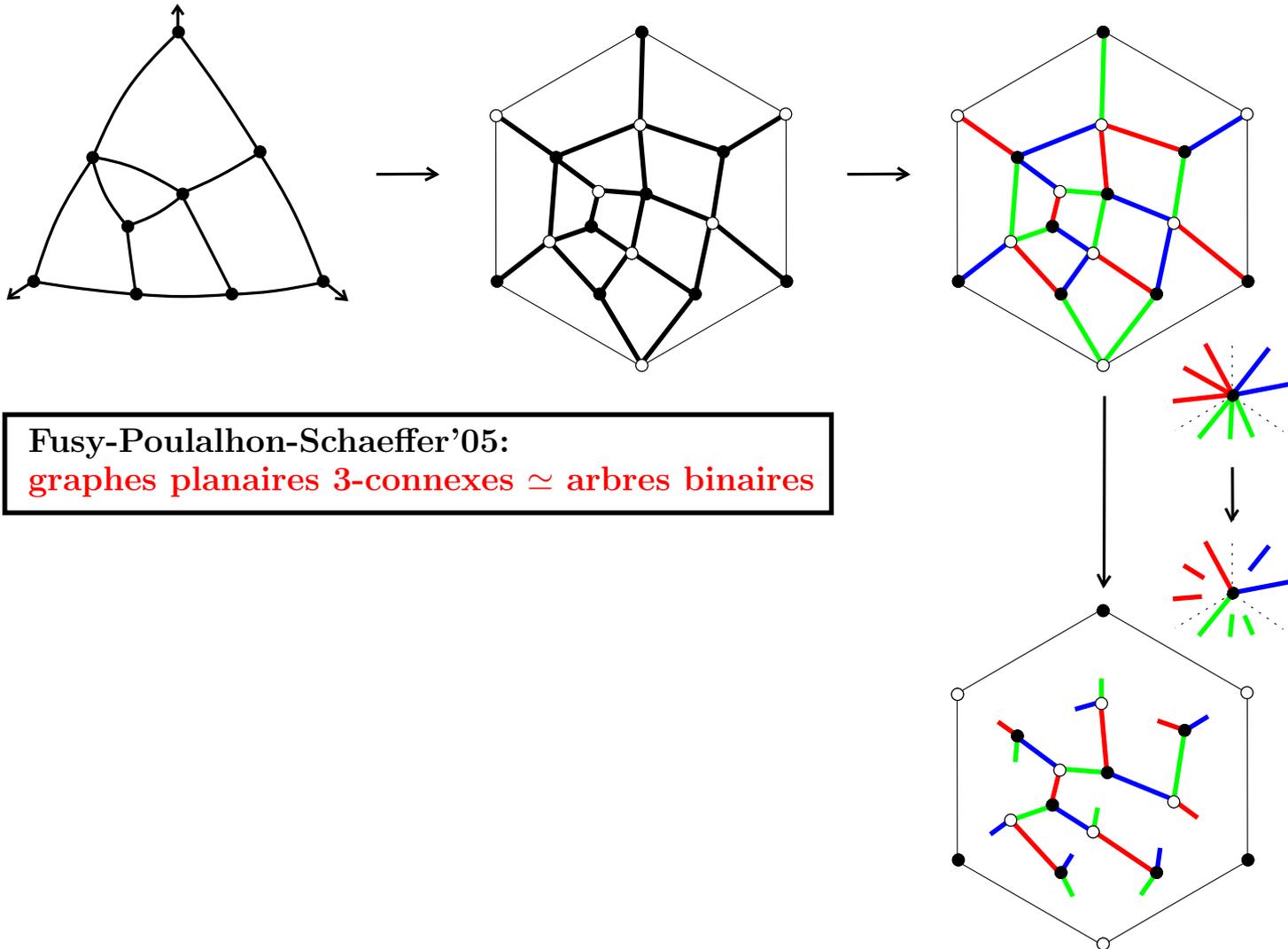
graphes planaires 3-connexes \simeq arbres binaires

Planaires 3-connexes \leftrightarrow arbres binaires



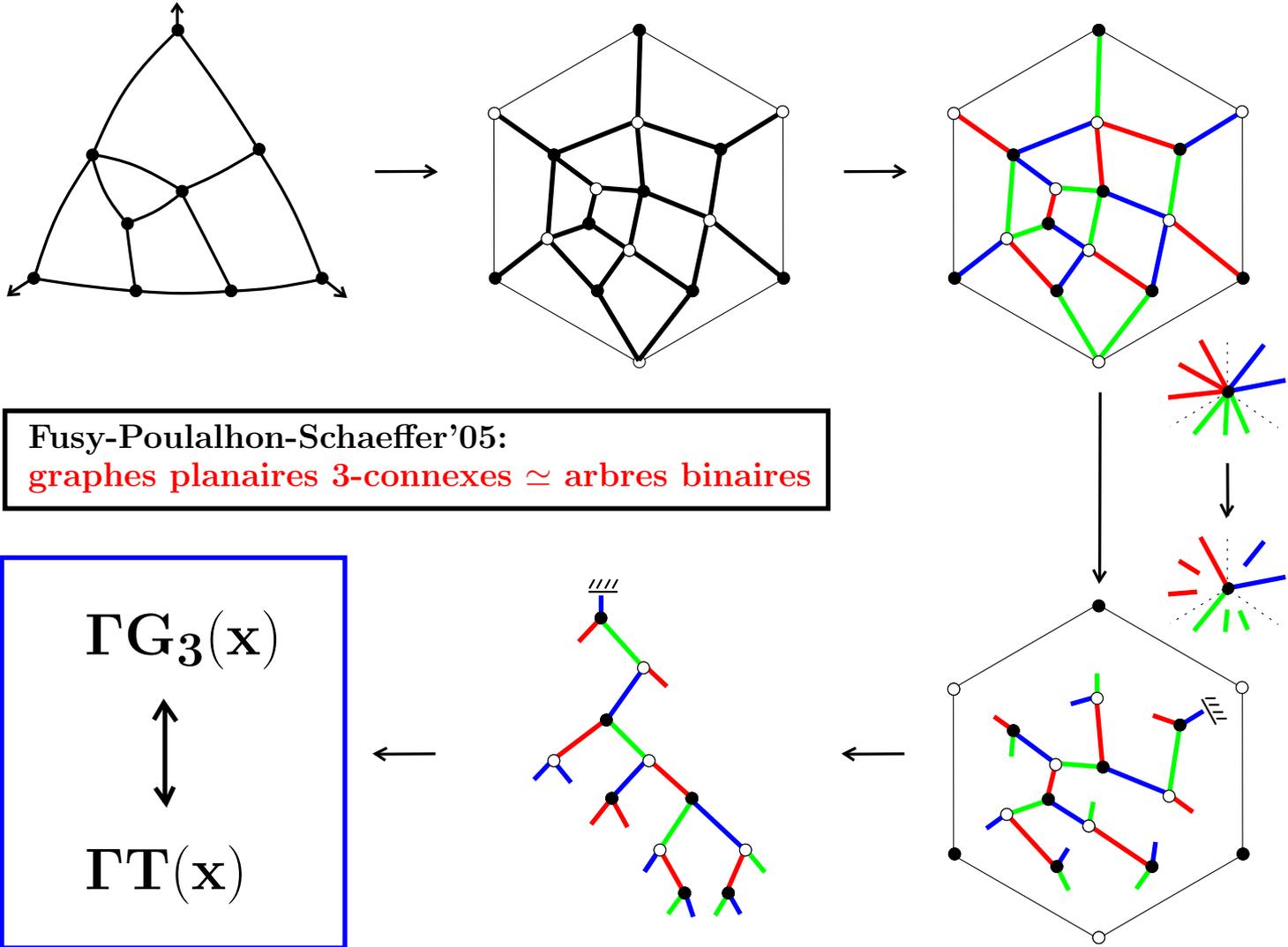
Fusy-Poulalhon-Schaeffer'05:
graphes planaires 3-connexes \simeq arbres binaires

Planaires 3-connexes \leftrightarrow arbres binaires



Fusy-Poulalhon-Schaeffer'05:
graphes planaires 3-connexes \simeq arbres binaires

Planaires 3-connexes \leftrightarrow arbres binaires

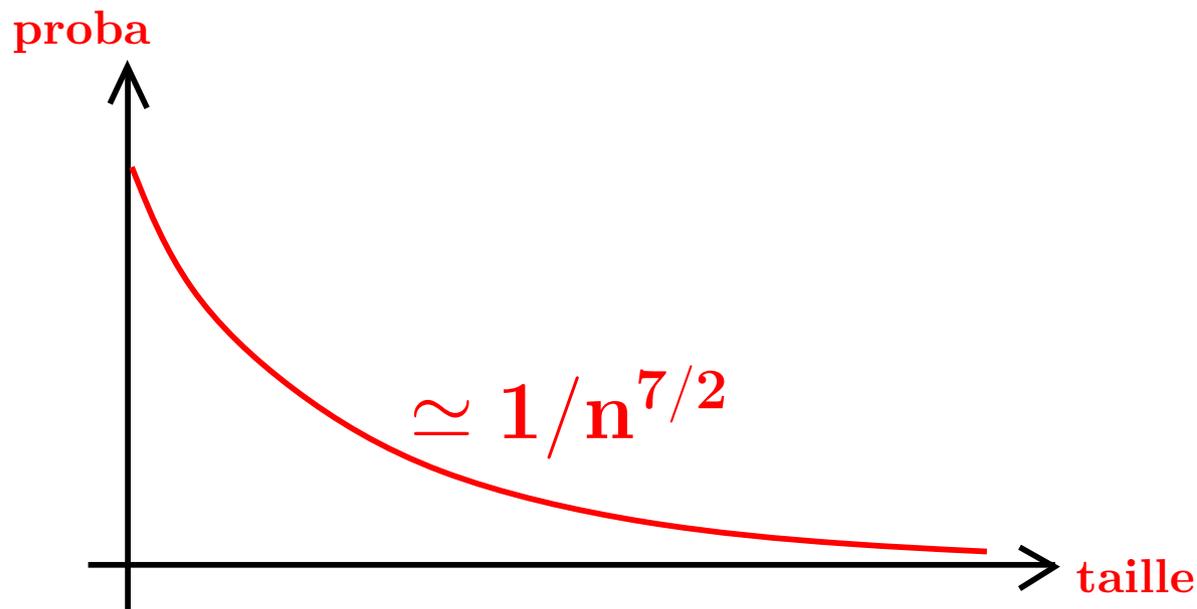


Taille du graphe généré?

Problème: Même en la singularité ρ , la distribution de la taille de la sortie de $\Gamma G(\rho)$ est trop écrasée:

$$\mathbb{P}(\text{taille} = n) = \frac{G_n \rho^n}{G(\rho)} \sim \frac{c}{n^{7/2}}$$

(Giménez, Noy 2005)

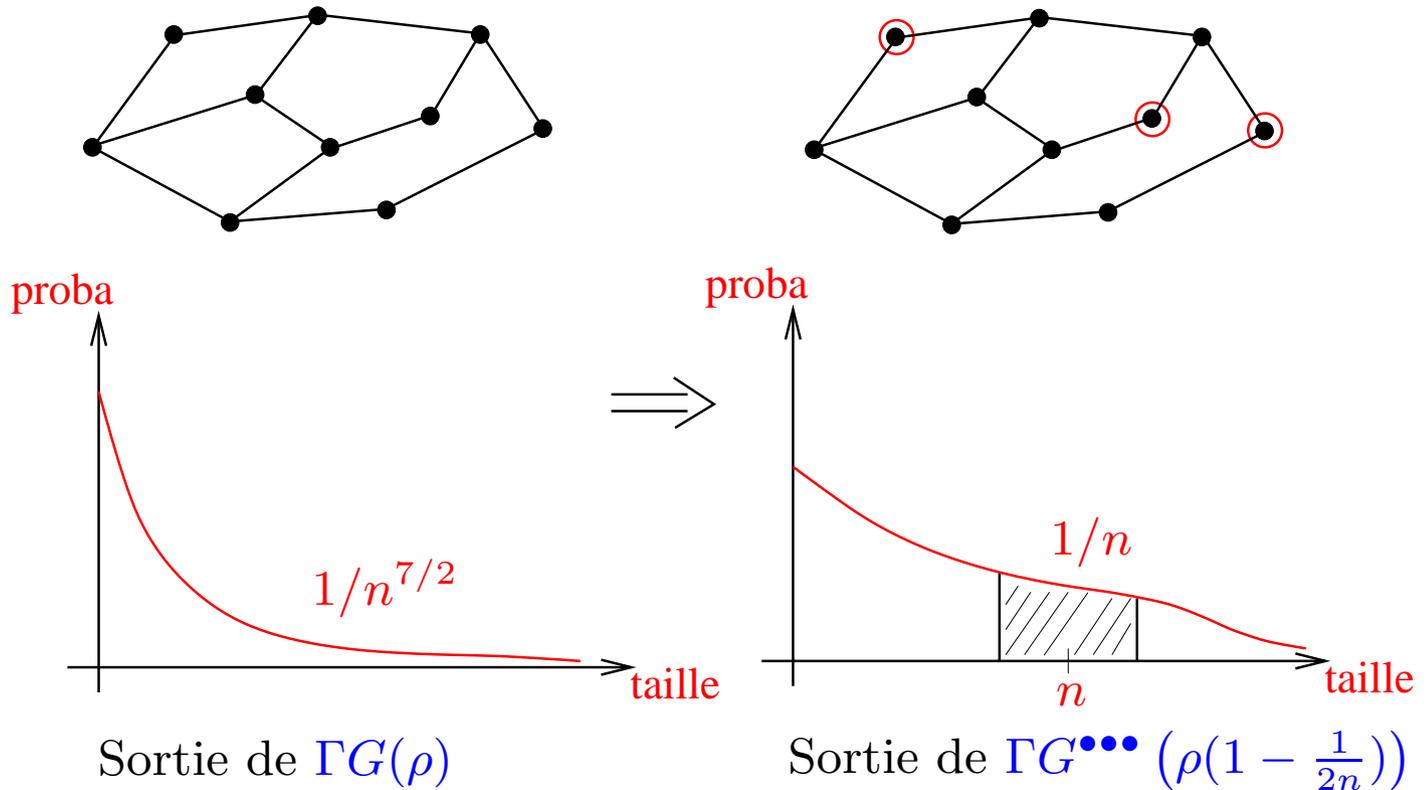


Distribution en taille d'un objet engendré par $\Gamma G(\rho)$

Amélioration de la distribution

Solution: on **pointe** les graphes **3 fois**

Effet: le poids d'un graphe de taille n est **multiplié** par n^3 .



Résultat

Théorème: Soit n une **taille cible** et $\epsilon > 0$ un **paramètre de tolérance**
Le générateur $\Gamma G^{\bullet\bullet\bullet}(x_n)$ pour $x_n = \rho \left(1 - \frac{1}{2n}\right)$ engendre uniformément

- des graphes planaires de taille dans $[n(1 - \epsilon), n(1 + \epsilon)]$ en temps $\mathcal{O}(n)$

APPROX: **CALL** $\Gamma G^{\bullet\bullet\bullet}(x_n) \rightarrow \gamma$ **until** $|\gamma| \in [n(1 - \epsilon), n(1 + \epsilon)]$; **return** γ ;

- des graphes planaires de taille exactement n en temps $\mathcal{O}(n^2)$

EXACT: **CALL** $\Gamma G^{\bullet\bullet\bullet}(x_n) \rightarrow \gamma$ **until** $|\gamma| = n$; **return** γ ;

Résultat

Théorème: Soit n une **taille cible** et $\epsilon > 0$ un **paramètre de tolérance**

Le générateur $\Gamma G^{\bullet\bullet\bullet}(x_n)$ pour $x_n = \rho \left(1 - \frac{1}{2n}\right)$ engendre uniformément

- des graphes planaires de taille dans $[n(1 - \epsilon), n(1 + \epsilon)]$ en temps $\mathcal{O}(n)$

APPROX: CALL $\Gamma G^{\bullet\bullet\bullet}(x_n) \rightarrow \gamma$ **until** $|\gamma| \in [n(1 - \epsilon), n(1 + \epsilon)]$; **return** γ ;

- des graphes planaires de taille exactement n en temps $\mathcal{O}(n^2)$

EXACT: CALL $\Gamma G^{\bullet\bullet\bullet}(x_n) \rightarrow \gamma$ **until** $|\gamma| = n$; **return** γ ;

	Mémoire	Prétraitement	Temps par génération
Markov	$\mathcal{O}(\log(n))$	$\mathcal{O}(\log(n))$	<i>inconnu</i> {taille exacte} (on observe $\mathcal{O}(n^3)$)
Récuratif	$\mathcal{O}(n^5 \log(n))$	$\mathcal{O}(n^7)$	$\mathcal{O}(n^3)$ {taille exacte}
Boltzmann	$\mathcal{O}(\log(n)^k)$	$\mathcal{O}(\log(n)^k)$	$\mathcal{O}(n^2)$ {taille exacte} $\mathcal{O}(n)$ {taille approx.}

M: Denise-Vasconcellos-Welsh 1996

R: Bodirsky-Gröpl-Kang 2003

Implantation

- 1) On se donne un ensemble de tailles cibles $n = (1000, 10000, 100000, 1000000)$
- 2) Pour chaque taille cible n , on évalue les séries génératrices de graphes planaires en $x_n = \rho \left(1 - \frac{1}{2n}\right)$

Graphe planaire = arborescence de composantes 3-connexes planaires



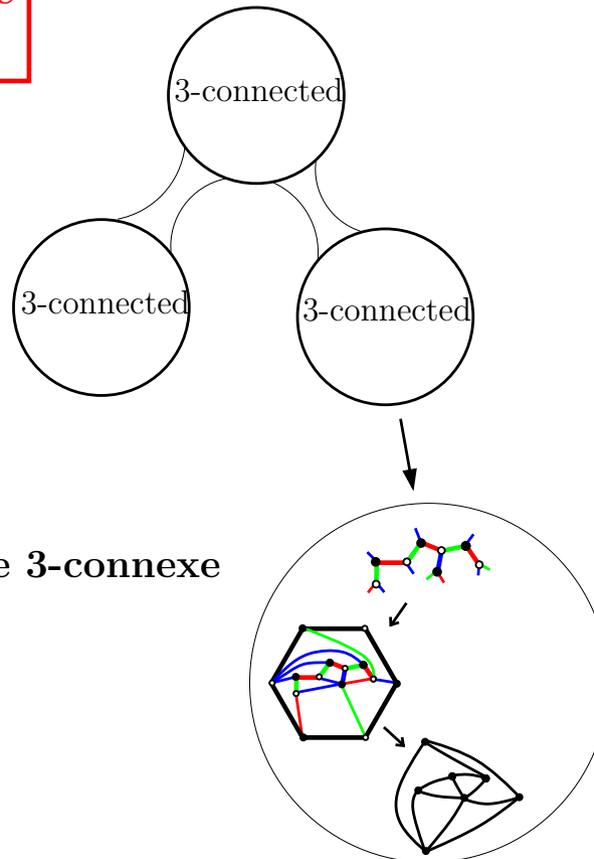
- 3) On engendre l'arborescence par des tirages aléatoires

50 types de branchements



calcul de 50 vecteurs permettant de faire les tirages aléatoires

- 4) On engendre chaque composante 3-connexe à partir d'un arbre binaire aléatoire



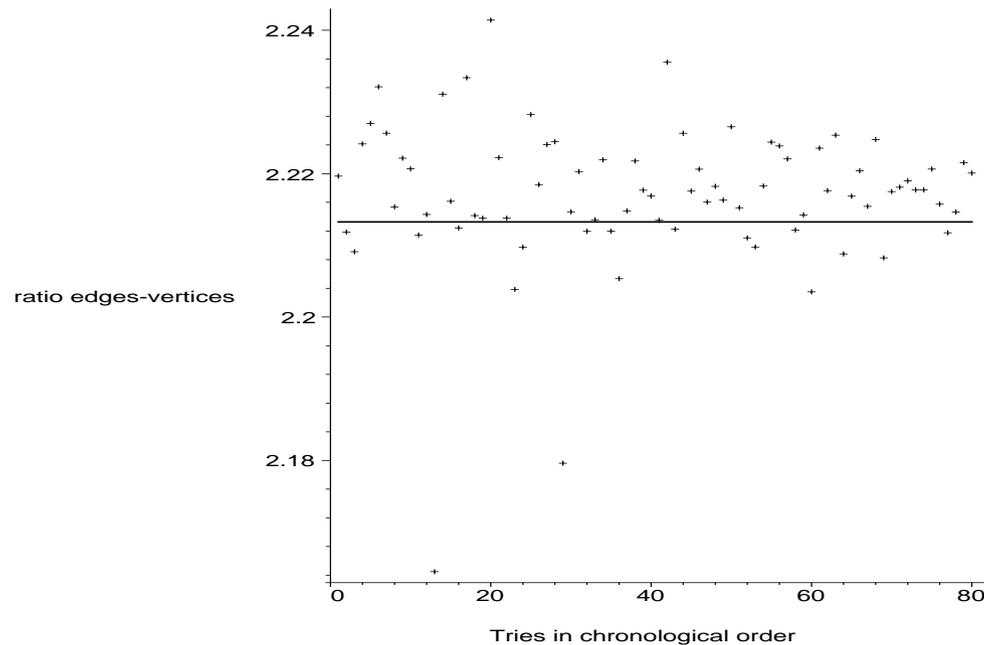
Expérimentations (1)

Soit X_n le nombre d'arêtes d'un graphe planaire aléatoire à n sommets.

Théorème: (Giménez, Noy 2005)

Il existe une constante $\mu \approx 2.2132$ telle que

$$\frac{X_n}{n} \rightarrow \mu \quad \text{en proba. quand } n \rightarrow \infty$$

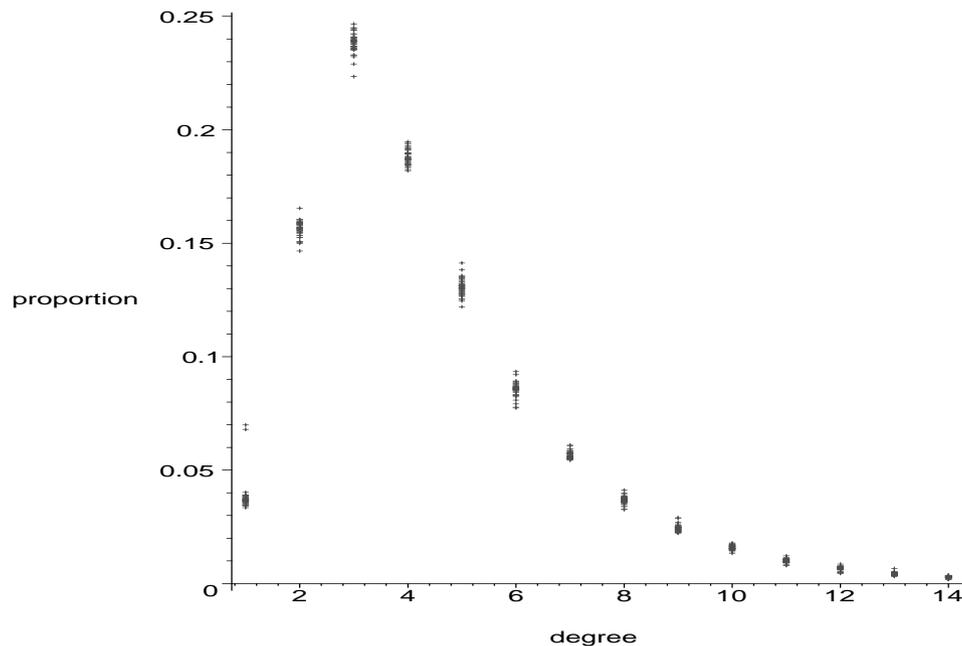


Expérimentations (2)

Conjecture: Soit $Y_{n,k}$ la proportion de sommets de degré k d'un graphe planaire aléatoire à n sommets.

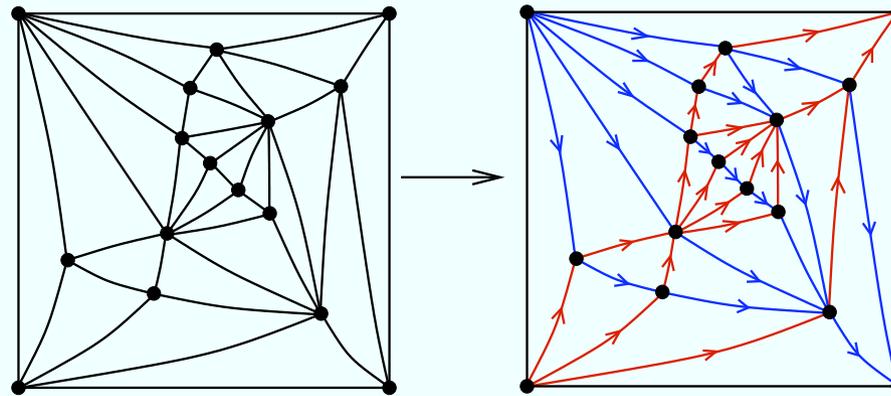
Alors il existe une distribution $(p_k)_{k \geq 1}$ telle que

$$Y_{n,k} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} p_k \quad \text{en proba. quand } n \rightarrow \infty$$



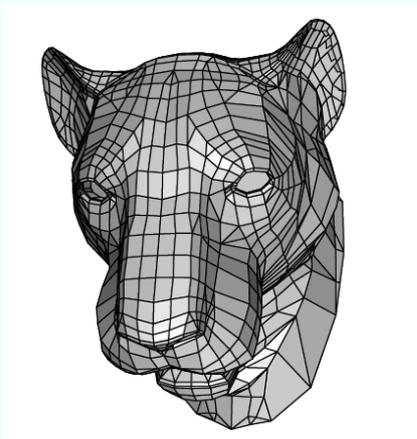
Bilan de la thèse

- Etude des **cartes planaires** à l'aide de **structures combinatoires**



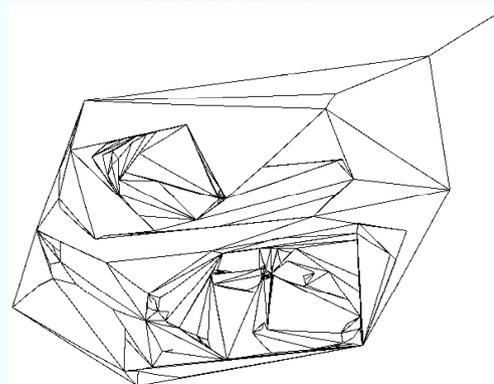
- Algorithmique **efficace** et **analysable** pour:

1) codage



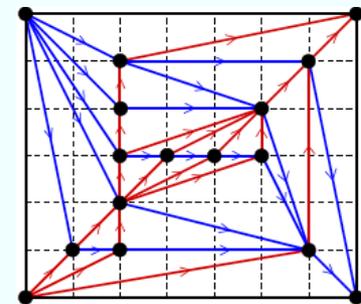
maillage

2) génération aléatoire



graphe planaire

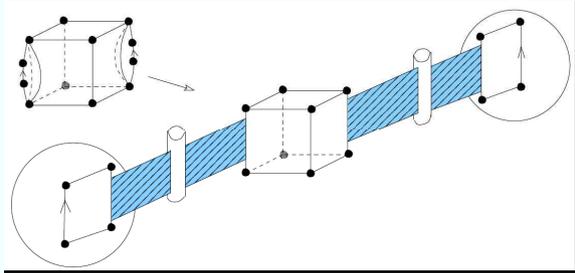
3) tracé en lignes droites



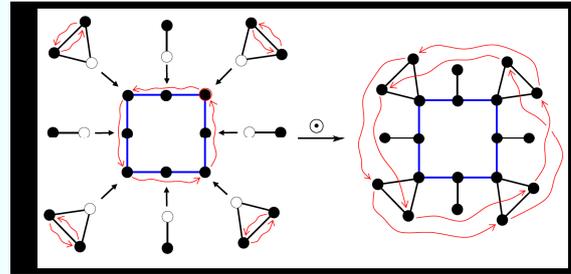
triangulation

Autres travaux

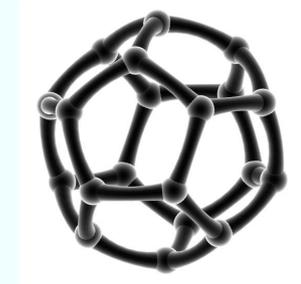
- Comptage de structures à **symétrie près** (3 articles)



cartes



graphes



polytopes

- Comptage **probabiliste** pour l'analyse de flux de données (2 articles)
- Génération **aléatoire** (2 articles)

