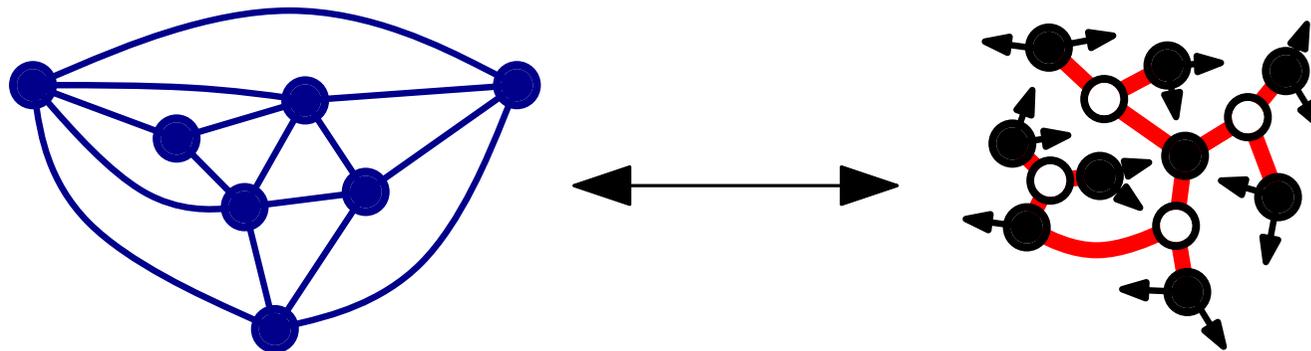


Combinatoire des cartes planaires par méta-bijection

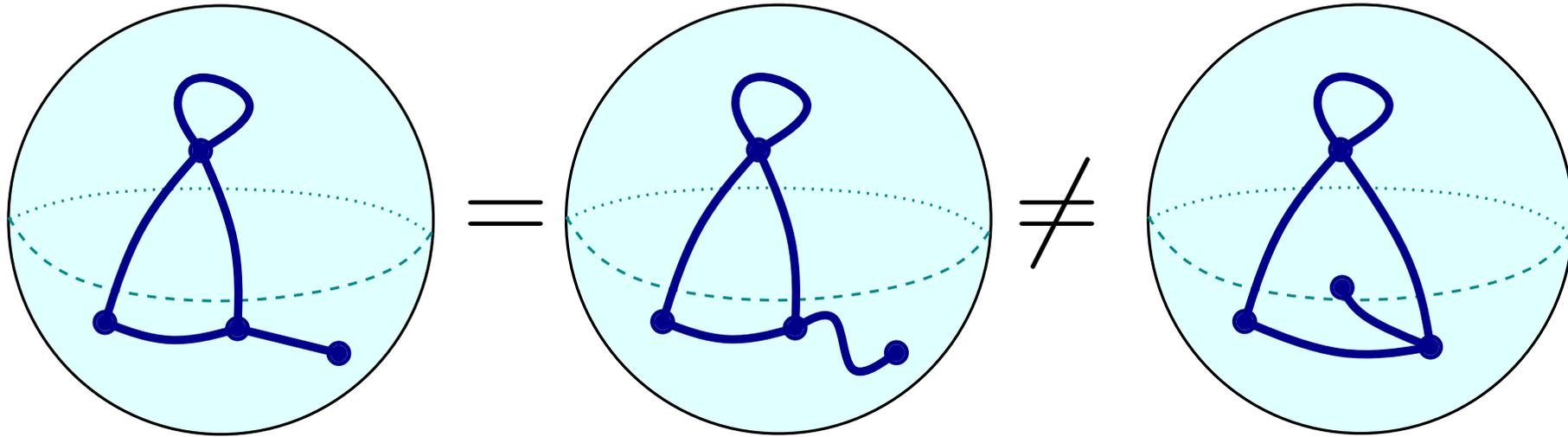
Éric Fusy (CNRS/LIX)



Soutenance d'habilitation, 1 décembre 2015
LRI, Université Paris-sud

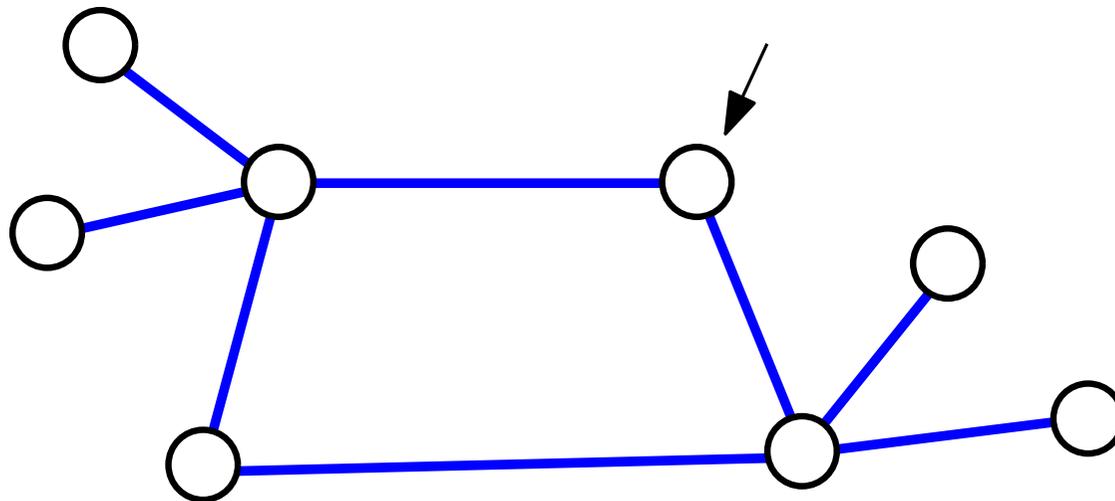
Cartes planaires

- Une **carte planaire** est un graphe connexe plongé sur la **sphère**, considéré à déformation continue près.



- (i) Une carte a des sommets et arêtes (comme un graphe), et des **faces**
- (ii) Encodée par l' **ordre des voisins** autour de chaque sommet

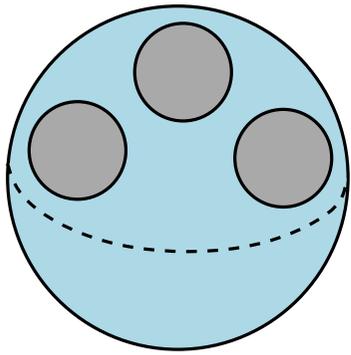
- Une **carte enracinée** est une carte avec un coin marqué



Une carte enracinée

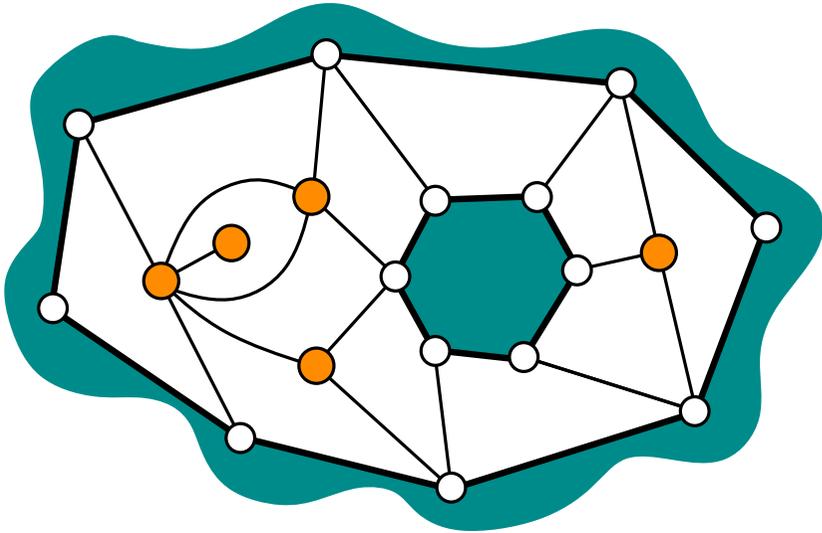
Cartes planaires à bords

- Sphère à k bords = sphère dont on a enlevé k disques topologiques



sphère à 3 bords

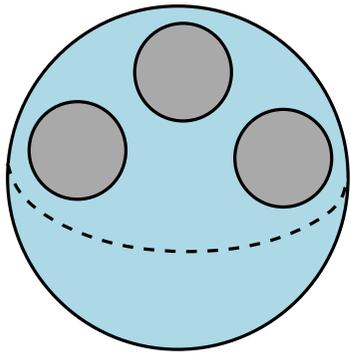
- Carte à k bords = graphe connexe plongé sur la sphère à k bords tel que les bords sont occupés par des arêtes



Une quadrangulation à 2 bords
de tailles 8 et 6, et avec 5 sommets internes

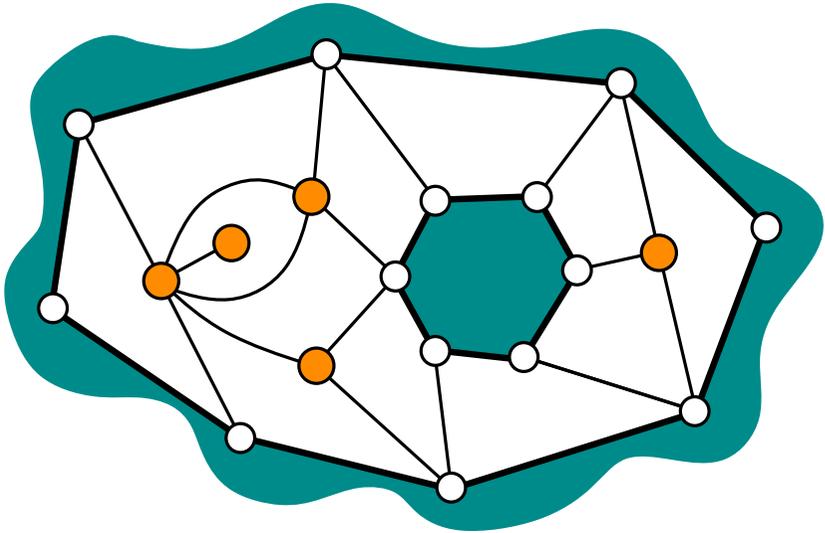
Cartes planaires à bords

- Sphère à k bords = sphère dont on a enlevé k disques topologiques



sphère à 3 bords

- Carte à k bords = graphe connexe plongé sur la sphère à k bords tel que les bords sont occupés par des arêtes

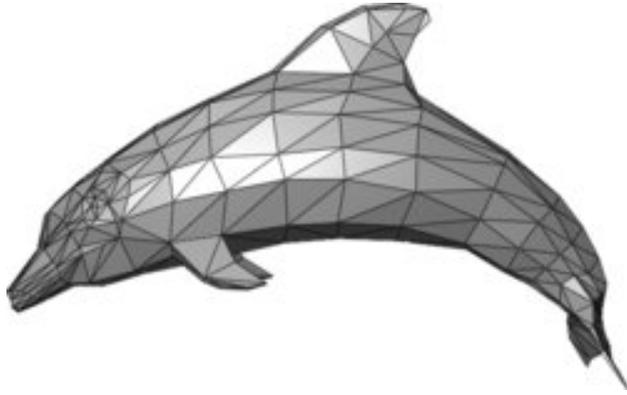


Une quadrangulation à 2 bords
de tailles 8 et 6, et avec 5 sommets internes

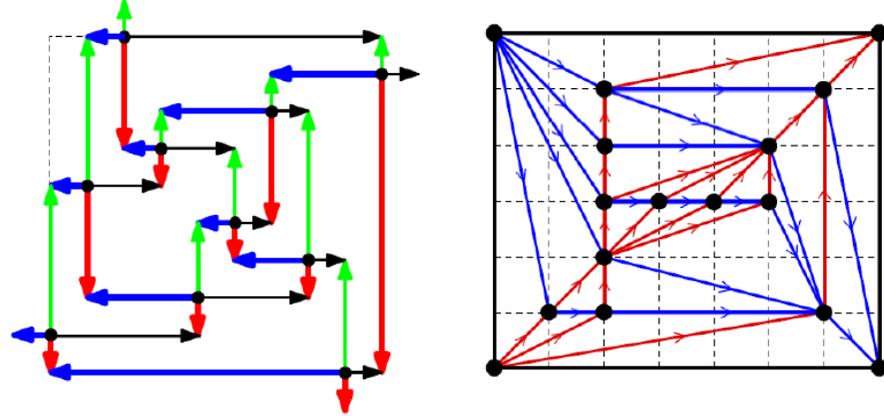
(aussi = carte planaire avec k faces marquées dont les contours sont des cycles simples disjoints)

Motivations pour étudier les cartes

- Applications algorithmiques
compression de maillage

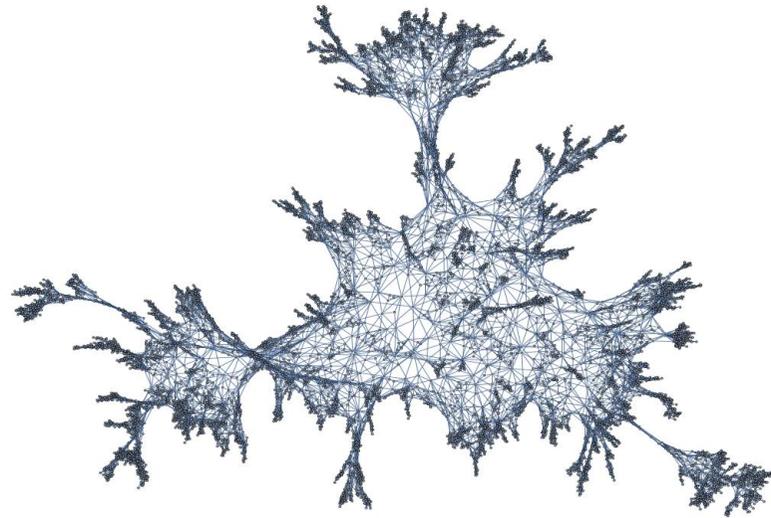


dessin de graphe



- Probabilités & Physique :
surfaces aléatoires \Rightarrow notion de “mesure aléatoire” sur une surface

une carte aléatoire
© Nicolas Curien



- Problèmes de factorisation dans le groupe symétrique
(aussi revêtements ramifiés de surfaces)

Comptage de cartes planaires (enracinées)

- De **jolies formules énumératives** découvertes par Tutte (années 60)

Cartes à n arêtes

$$\frac{2 \cdot 3^n \cdot (2n)!}{n!(n+2)!}$$

Cartes biparties
à n arêtes

$$\frac{3 \cdot 2^{n-1} \cdot (2n)!}{n!(n+2)!}$$

Cartes 2-connexes
à n arêtes

$$\frac{4 \cdot (3n-3)!}{(n-1)!(2n)!}$$

Comptage de cartes planaires (enracinées)

- De **jolies formules énumératives** découvertes par Tutte (années 60)

Cartes à n arêtes

$$\frac{2 \cdot 3^n \cdot (2n)!}{n!(n+2)!}$$

Cartes biparties
à n arêtes

$$\frac{3 \cdot 2^{n-1} \cdot (2n)!}{n!(n+2)!}$$

Cartes 2-connexes
à n arêtes

$$\frac{4 \cdot (3n-3)!}{(n-1)!(2n)!}$$

- Aussi pour les **cartes à un bord**

Triangulations avec un bord

$|\text{bord}| = a$ et m sommets internes

Quelconques ([Krikun'07]) :

$$\frac{4^{m-1} (2a+3m-5)!!(2a)!}{m!(2a+m-1)!!a!(a-1)!} \text{ où } n!! = \prod_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} n - 2i$$

Sans boucles ([Mullin'65]) :

$$\frac{2^{m+3} (2a+3m+2)!(2a-3)!}{(m+2)!(2a+2m+2)!(a-2)!^2}$$

Simplex ([Brown'64]) :

$$\frac{(4m+2a-5)!2(2a-3)!}{m!(3m+2a-3)!(a-1)!(a-3)!}$$

Quadrangulations avec un bord

$|\text{bord}| = 2a$ et m sommets internes

Quelconques ([Bouttier, Guitter'09]) :

$$\frac{3^{m-1} (3a+2m-3)!(3a)!}{m!(3a+m-1)!a!(2a-1)!}$$

Simplex ([Brown'65]) :

$$\frac{(3m+3a-4)!3(3a-2)!}{m!(2m+3a-2)!(a-2)!(2a-1)!}$$

Méthodes énumératives

- **Séries génératrices**

réurrence par suppression de l'arête racine \Rightarrow équations de boucles

[Tutte'63, Bender&Canfield'86, Bousquet-Mélou&Jehanne'06, Eynard'09]

- **Intégrales de matrices**

cartes = contributions de certaines intégrales matricielles gaussiennes

[t'Hooft'74, Brézin et al'78, Di Francesco et al'95]

- **Bijections**

cartes \leftrightarrow arbres "décorés"

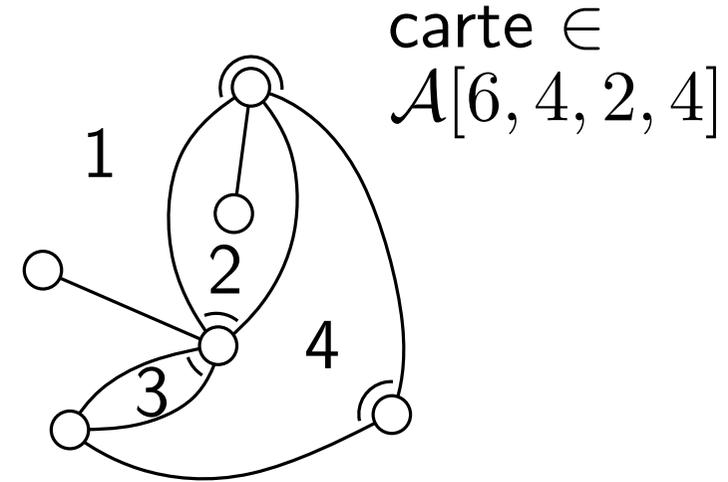
[Cori-Vauquelin'81, Arquès'86, Schaeffer'97, Poulalhon-Schaeffer'03,

Bouttier-Di Francesco-Guitter'04, Albenque-Poulalhon'15]

Formules énumératives multivariées factorisées

Pour les cartes biparties et biparties simples

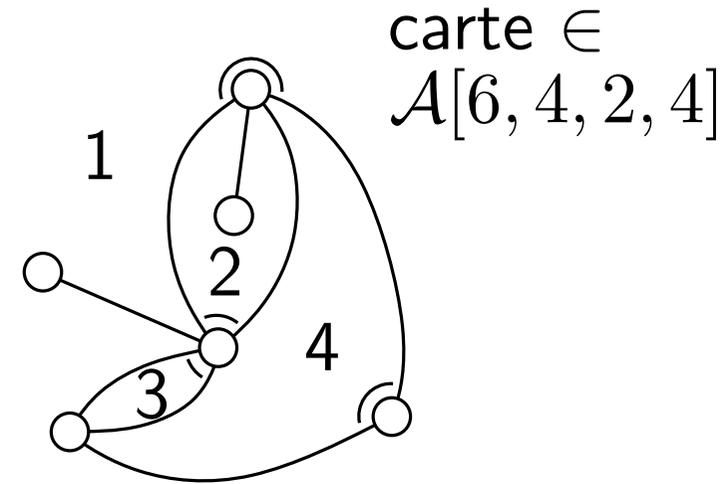
- Soit l_1, \dots, l_r des entiers positifs
- On note $\mathcal{A}[l_1, \dots, l_r]$ l'ensemble des cartes avec r faces (numérotées) f_1, \dots, f_r tel que
 - chaque face f_i a degré l_i
 - chaque face f_i a un coin marqué



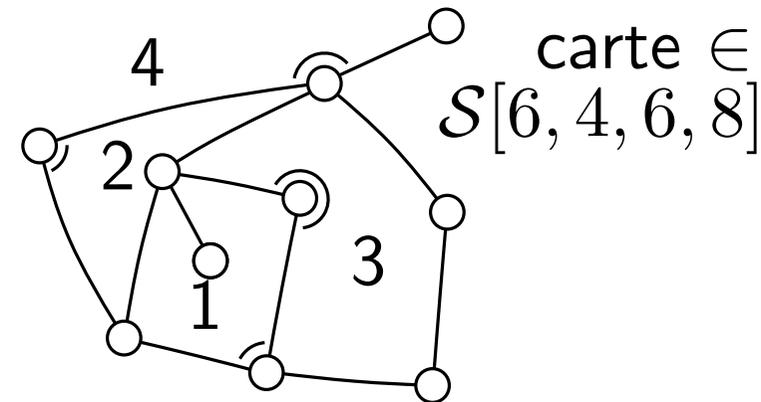
Formules énumératives multivariées factorisées

Pour les cartes biparties et biparties simples

- Soit l_1, \dots, l_r des entiers positifs
- On note $\mathcal{A}[l_1, \dots, l_r]$ l'ensemble des cartes avec r faces (numérotées) f_1, \dots, f_r tel que
 - chaque face f_i a degré l_i
 - chaque face f_i a un coin marqué



- $\mathcal{S}[l_1, \dots, l_r] :=$ sous-ensemble des cartes simples dans $\mathcal{A}[l_1, \dots, l_r]$



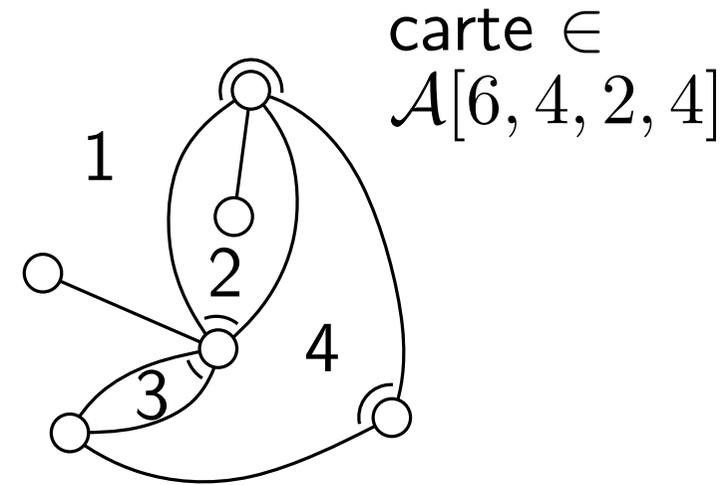
Formules énumératives multivariées factorisées

Pour les cartes biparties et biparties simples

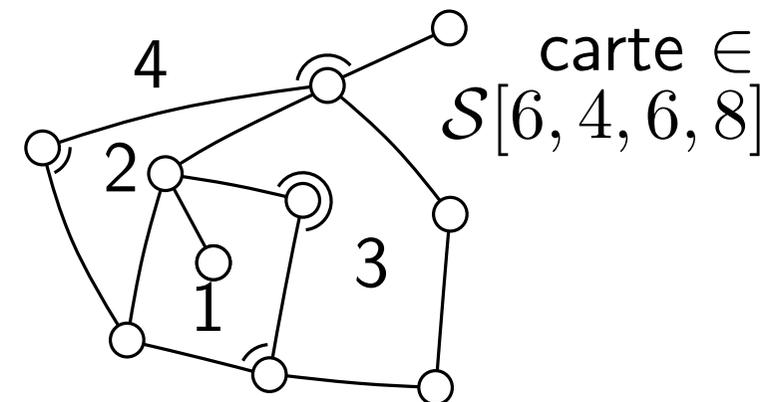
- Soit l_1, \dots, l_r des entiers positifs
- On note $\mathcal{A}[l_1, \dots, l_r]$ l'ensemble des cartes avec r faces (numérotées) f_1, \dots, f_r tel que
 - chaque face f_i a degré l_i
 - chaque face f_i a un coin marqué

1) Formule des slicings de Tutte (1962) :

$$|\mathcal{A}[2a_1, \dots, 2a_r]| = \frac{(v+r-3)!}{v!} \prod_{i=1}^r 2a_i \binom{2a_i-1}{a_i-1}$$



- $\mathcal{S}[l_1, \dots, l_r] :=$ sous-ensemble des cartes simples dans $\mathcal{A}[l_1, \dots, l_r]$



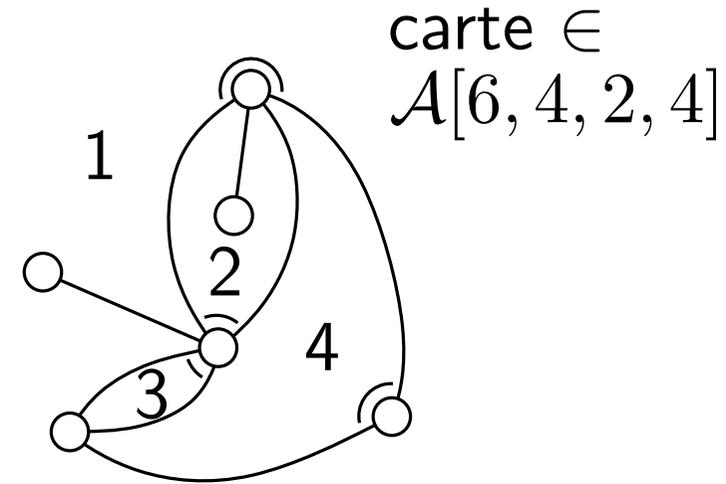
Formules énumératives multivariées factorisées

Pour les cartes biparties et biparties simples

- Soit l_1, \dots, l_r des entiers positifs
- On note $\mathcal{A}[l_1, \dots, l_r]$ l'ensemble des cartes avec r faces (numérotées) f_1, \dots, f_r tel que
 - chaque face f_i a degré l_i
 - chaque face f_i a un coin marqué

1) Formule des slicings de Tutte (1962) :

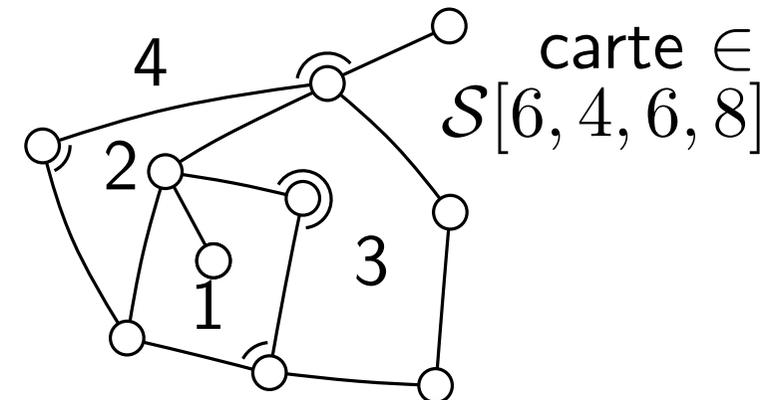
$$|\mathcal{A}[2a_1, \dots, 2a_r]| = \frac{(v+r-3)!}{v!} \prod_{i=1}^r 2a_i \binom{2a_i-1}{a_i-1}$$



- $\mathcal{S}[l_1, \dots, l_r] :=$ sous-ensemble des cartes simples dans $\mathcal{A}[l_1, \dots, l_r]$

2) [Bernardi, F'11]

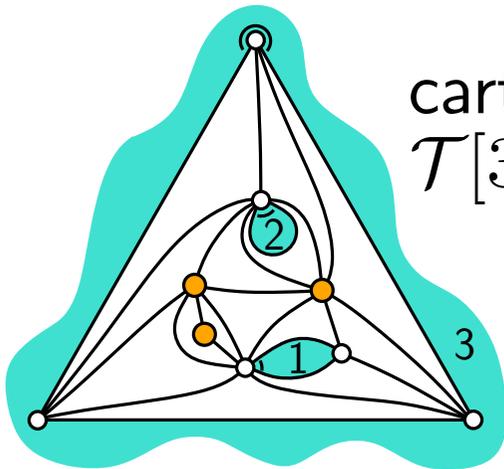
$$|\mathcal{S}[2a_1, \dots, 2a_r]| = \frac{(e+r-3)!}{e!} \prod_{i=1}^r 2a_i \binom{2a_i-1}{a_i-2}$$



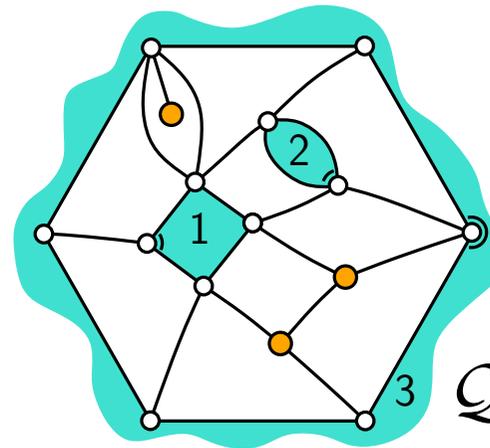
Formules énumératives multivariées factorisées

Pour les triangulations et quadrangulations à bords

- Soit $m \geq 0$ et l_1, \dots, l_r des entiers positifs
- On note $\mathcal{T}[m; l_1, \dots, l_r]$ (resp. $\mathcal{Q}[m; l_1, \dots, l_r]$) l'ensemble des **triangulations** (resp. **quadrangulations**) à r bords B_1, \dots, B_r tel que
 - il y a m sommets internes
 - chaque bord B_i a longueur l_i et un coin marqué



carte \in
 $\mathcal{T}[3; 2, 1, 3]$



carte \in
 $\mathcal{Q}[3; 4, 2, 6]$

Formules énumératives multivariées factorisées

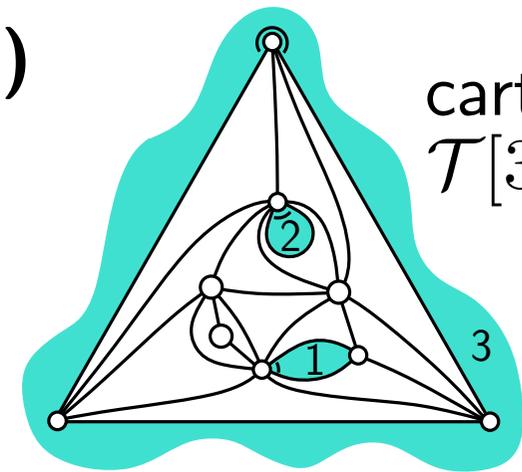
Pour les triangulations et quadrangulations à bords

- Soit $m \geq 0$ et ℓ_1, \dots, ℓ_r des entiers positifs
- On note $\mathcal{T}[m; \ell_1, \dots, \ell_r]$ (resp. $\mathcal{Q}[m; \ell_1, \dots, \ell_r]$) l'ensemble des **triangulations** (resp. **quadrangulations**) à r bords B_1, \dots, B_r tel que
 - il y a m sommets internes
 - chaque bord B_i a longueur ℓ_i et un coin marqué

3) Triangulations : formule de Krikun (2007)

$$|\mathcal{T}[m; a_1, \dots, a_r]| = \frac{4^k (e-2)!!}{m! (2b+k)!!} \prod_{i=1}^r a_i \binom{2a_i}{a_i}$$

avec $b = \sum_i a_i$, $k = r + m - 2$, et $e = 2b + 3k$

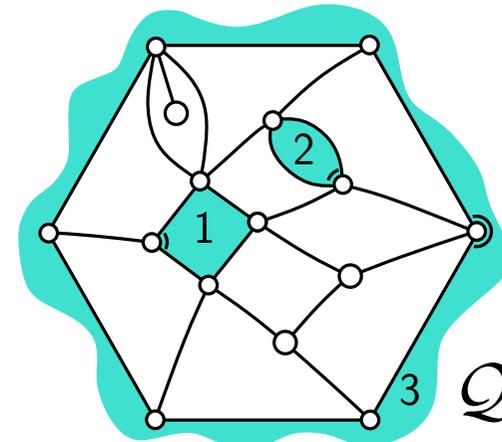


carte \in
 $\mathcal{T}[3; 2, 1, 3]$

4) Quadrangulations : [Bernardi, F'15]

$$|\mathcal{Q}[m; 2a_1, \dots, 2a_r]| = \frac{3^k (e-1)!}{m! (3b+k)!} \prod_{i=1}^r 2a_i \binom{3a_i}{a_i}$$

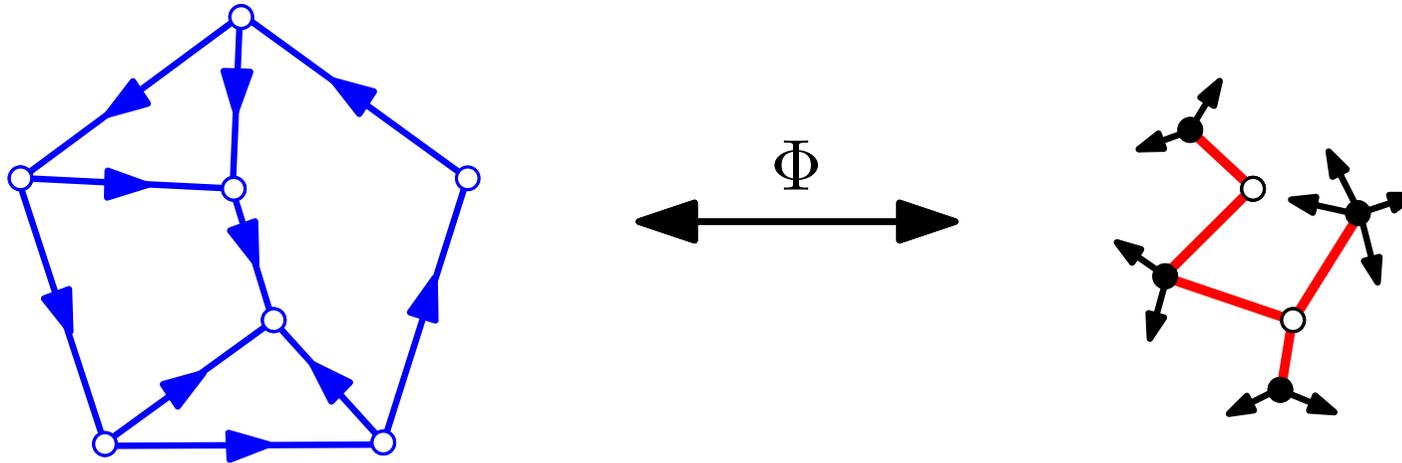
avec $b = \sum_i a_i$, $k = r + m - 2$, et $e = 2b + 3k$



carte \in
 $\mathcal{Q}[3; 4, 2, 6]$

Approche pour montrer ces formules

1. Une **métabijection** Φ entre une certaine classe \mathcal{O} de cartes orientées et une classe \mathcal{T} d'arbres décorés



2. **Spécialisation** aux familles de cartes considérées

Pour chaque famille \mathcal{F} , munir les cartes de \mathcal{F} d'une orientation canonique dans \mathcal{O}



\mathcal{F} s'identifie à une sous-famille $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ de \mathcal{O}

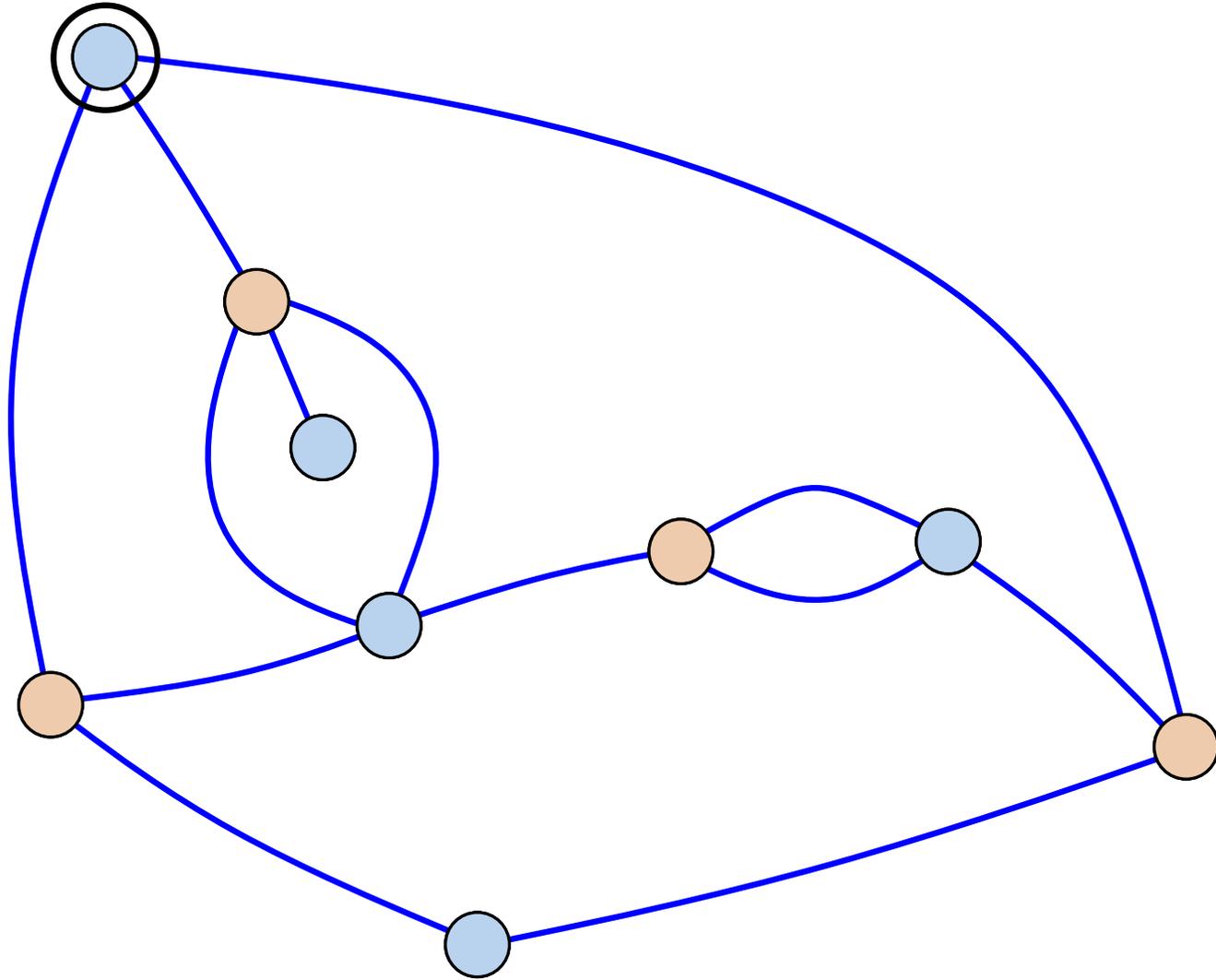


En spécialisant Φ à $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$, on obtient

$$\mathcal{F} \longleftrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{F}} \xleftrightarrow{\Phi} \mathcal{T}_{\mathcal{F}}$$

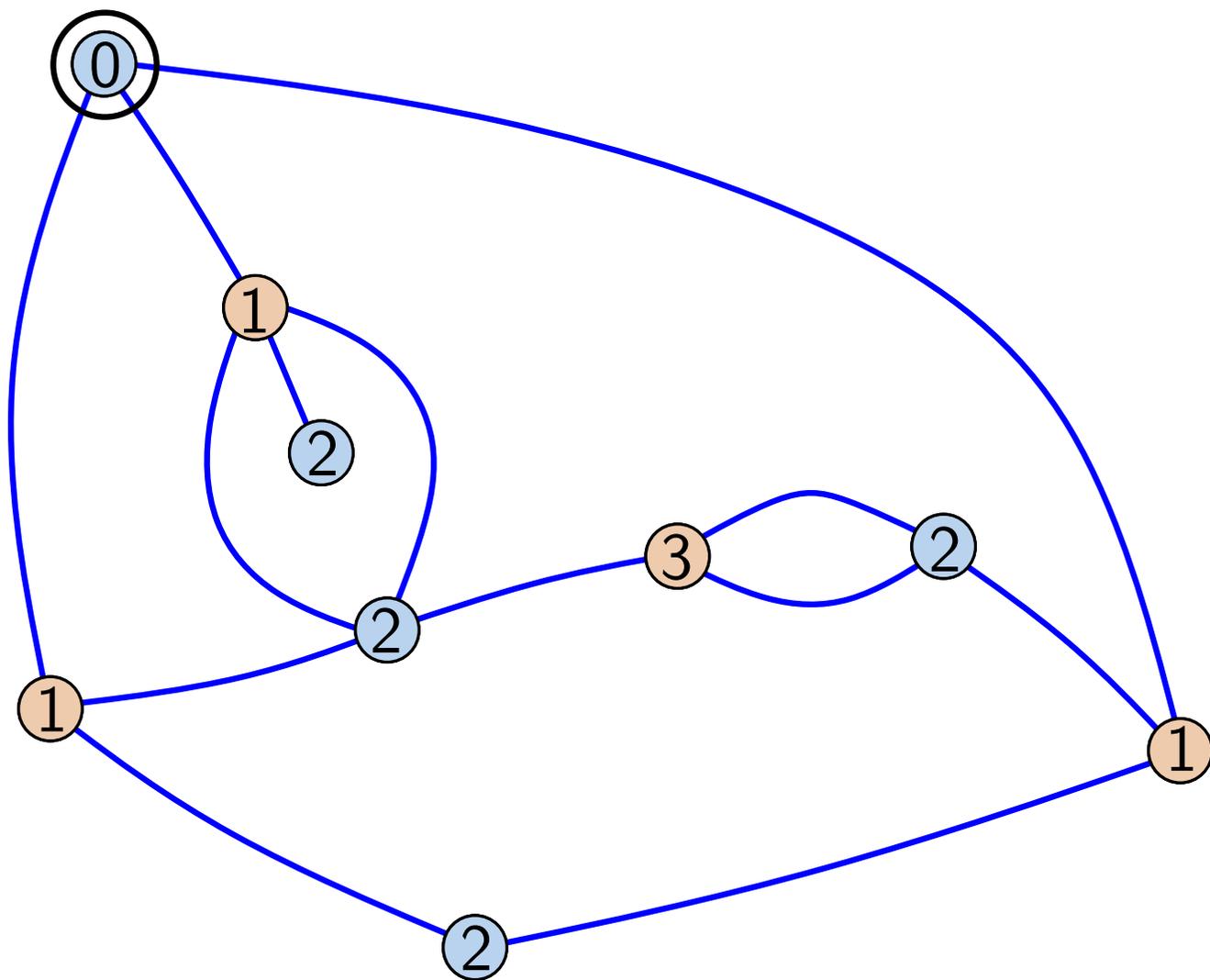
Bijection BDG pour les cartes biparties pointées

[Bouttier, Di Francesco, Guitter'04]



Bijection BDG pour les cartes biparties pointées

[Bouttier, Di Francesco, Guitter'04]



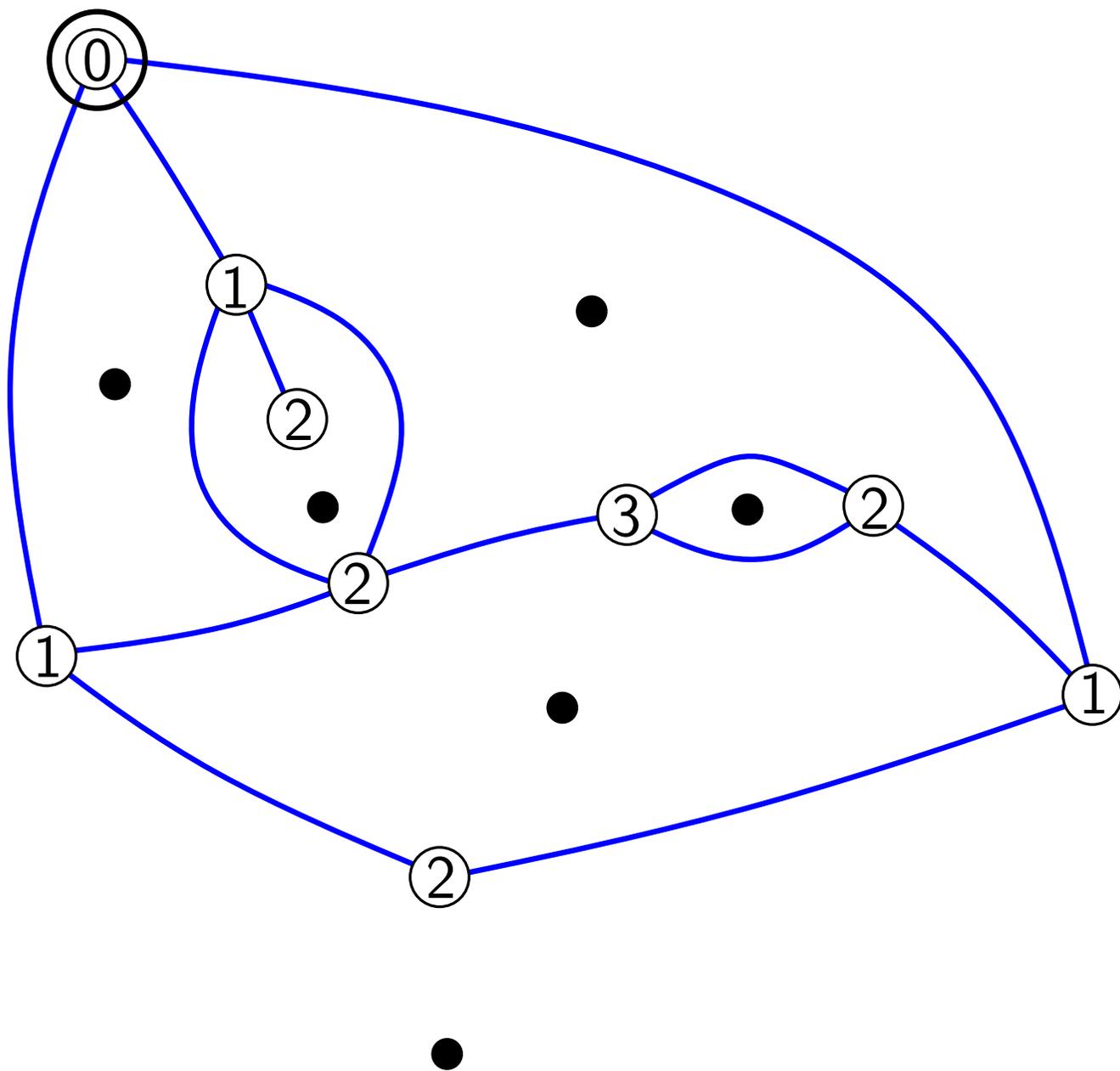
Étiquetage des sommets
par la distance
au sommet pointé

Bijection BDG pour les cartes biparties pointées

[Bouttier, Di Francesco, Guitter'04]

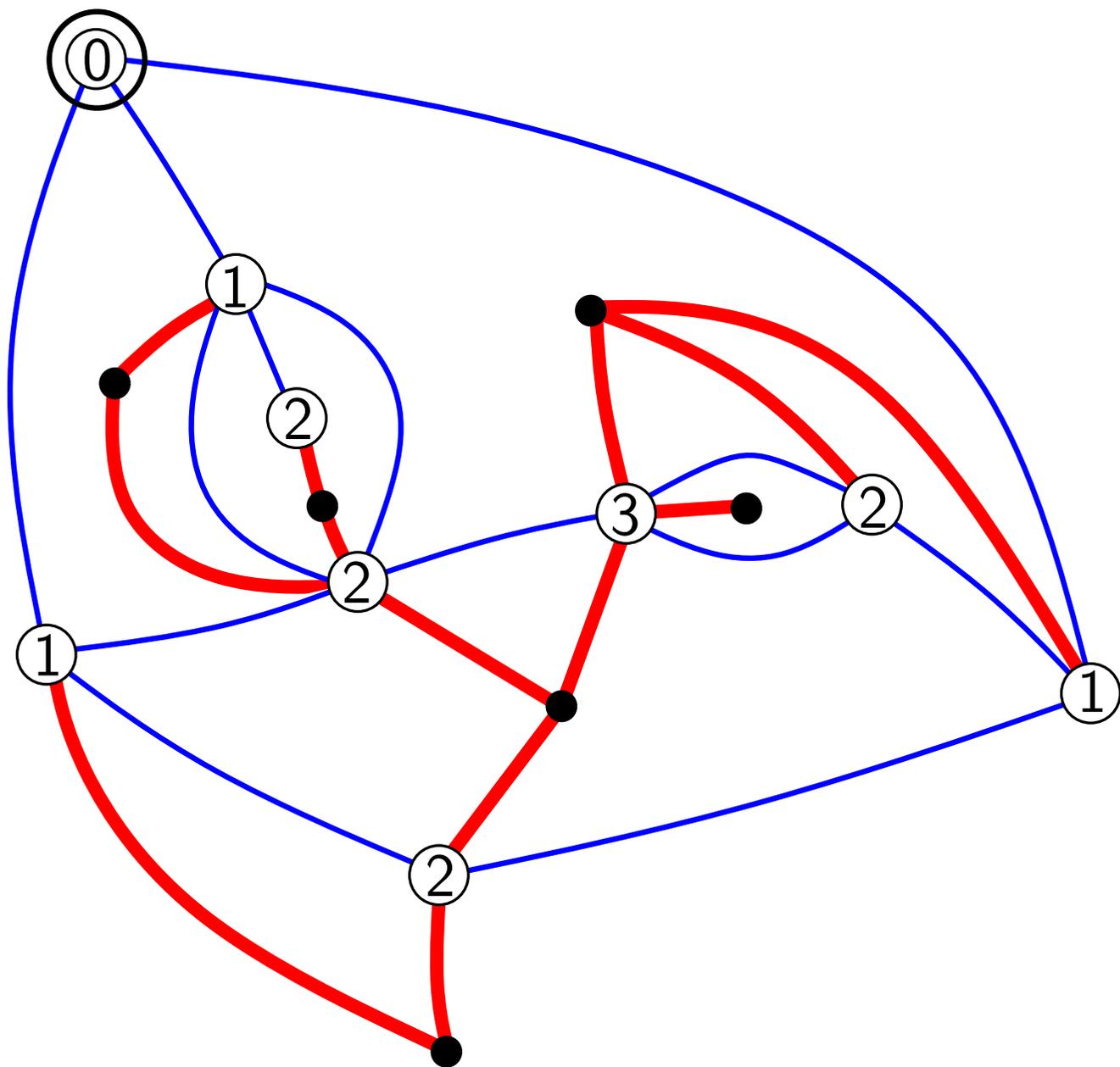
Construction d'un
"mobile" étiqueté

(i) crée un sommet
noir dans chaque face



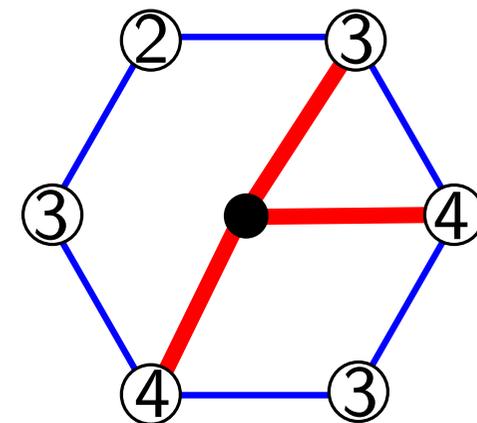
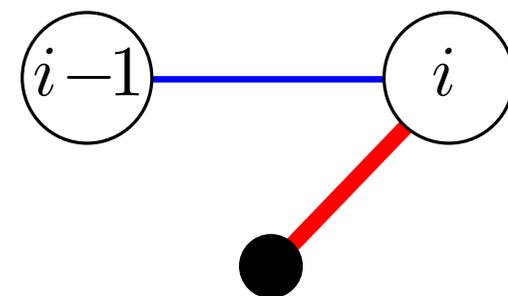
Bijection BDG pour les cartes biparties pointées

[Bouttier, Di Francesco, Guitter'04]



Construction d'un "mobile" étiqueté

- (i) crée un sommet noir dans chaque face
- (ii) chaque arête de la carte donne une arête dans le mobile

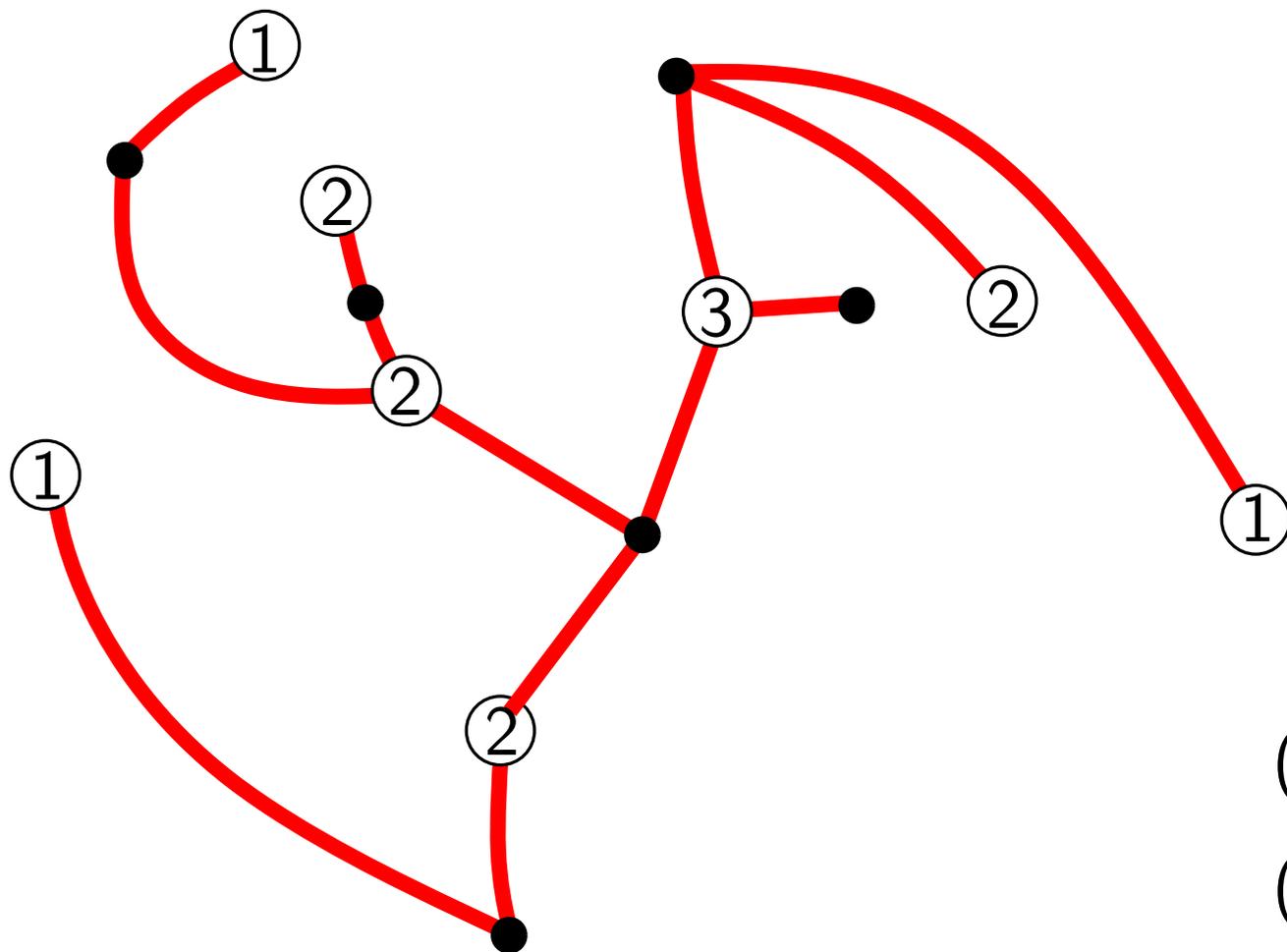


Bijection BDG pour les cartes biparties pointées

[Bouttier, Di Francesco, Guitter'04]

①

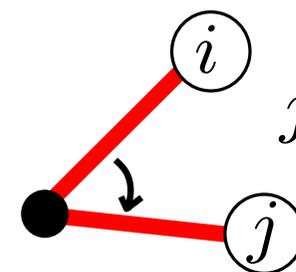
suppression des arêtes de la
carte bipartie et du sommet ①



Conditions:

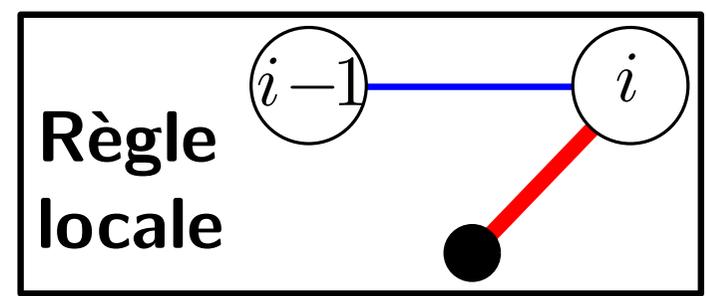
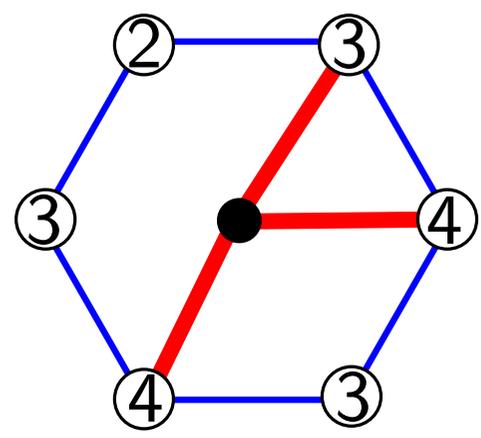
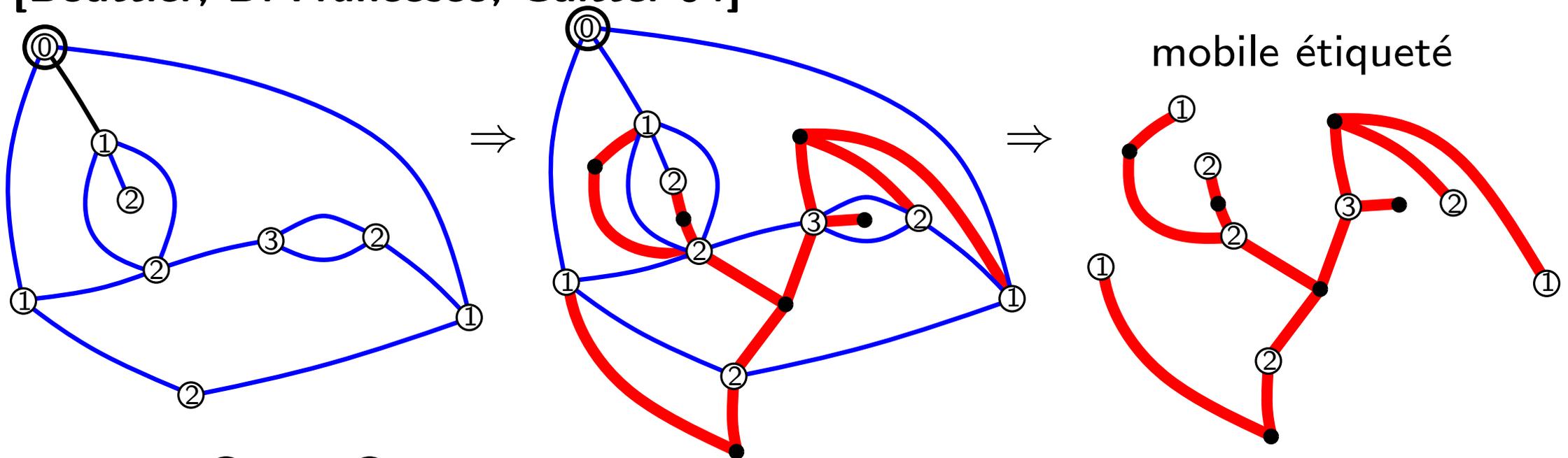
(i) \exists sommet étiquette 1

(ii) $j \leq i+1$



Bijection BDG pour les cartes biparties pointées

[Bouttier, Di Francesco, Guitter'04]



Conditions:

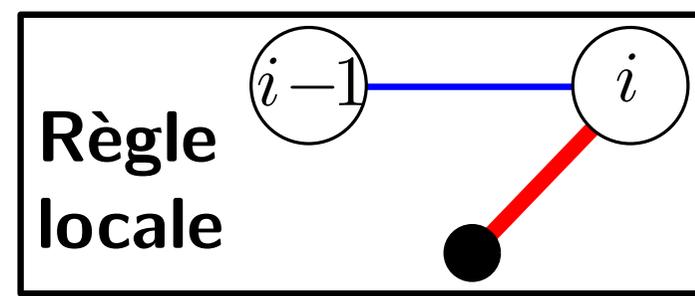
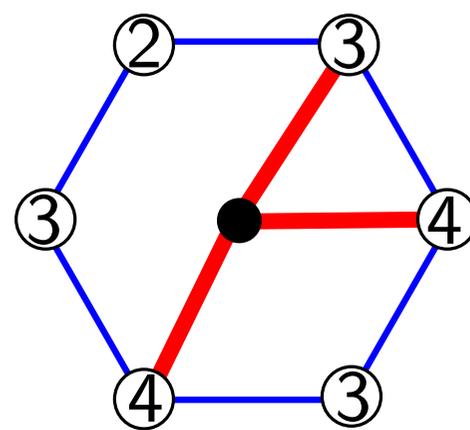
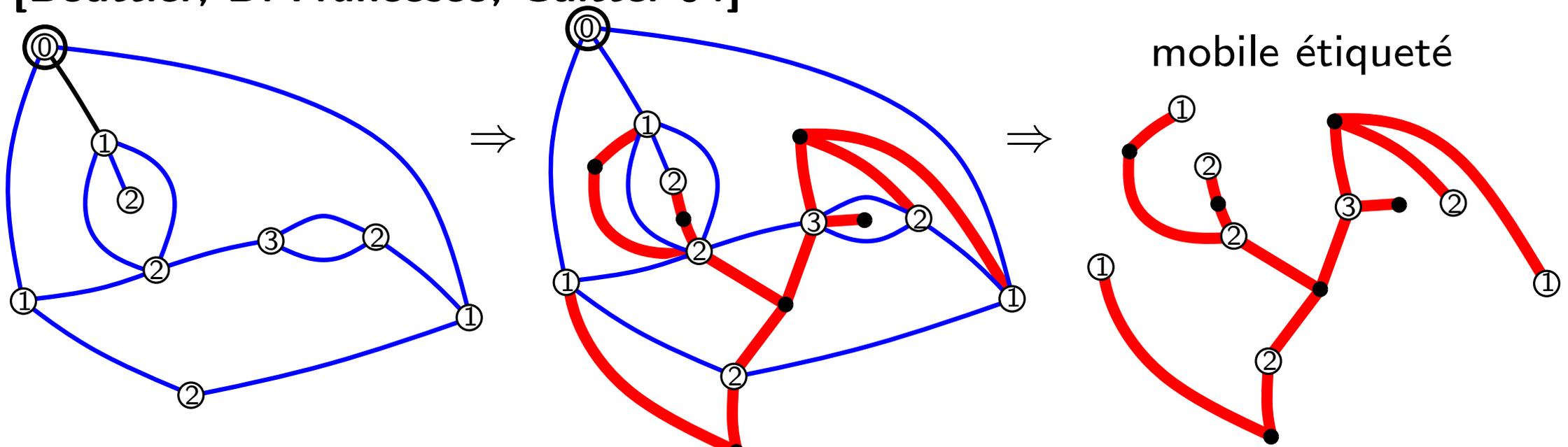
- (i) \exists sommet étiquette 1
- (ii) $j \leq i + 1$

Théorème: La correspondance est une **bijection**.

face degré $2i$ \longleftrightarrow sommet noir degré i

Bijection BDG pour les cartes biparties pointées

[Bouttier, Di Francesco, Guitter'04]



Conditions:

- (i) \exists sommet étiquette 1
- (ii) $j \leq i+1$

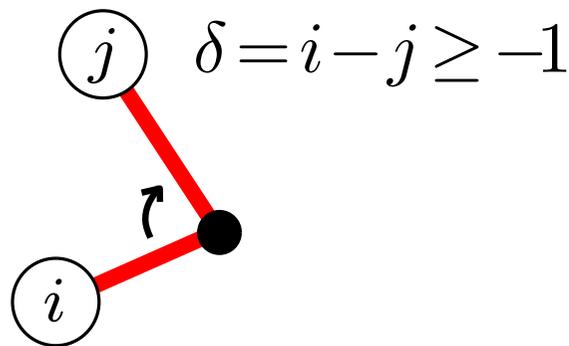
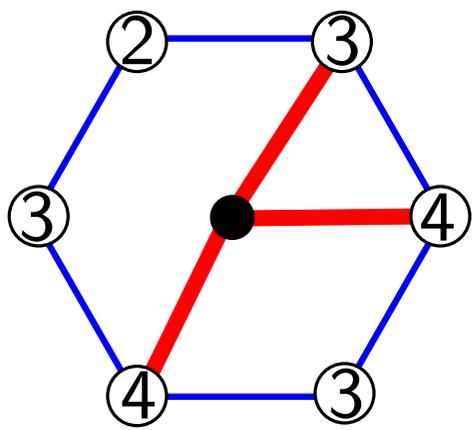
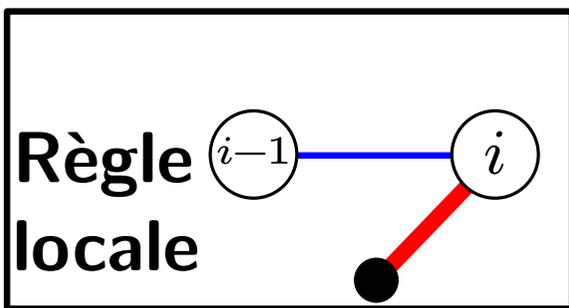
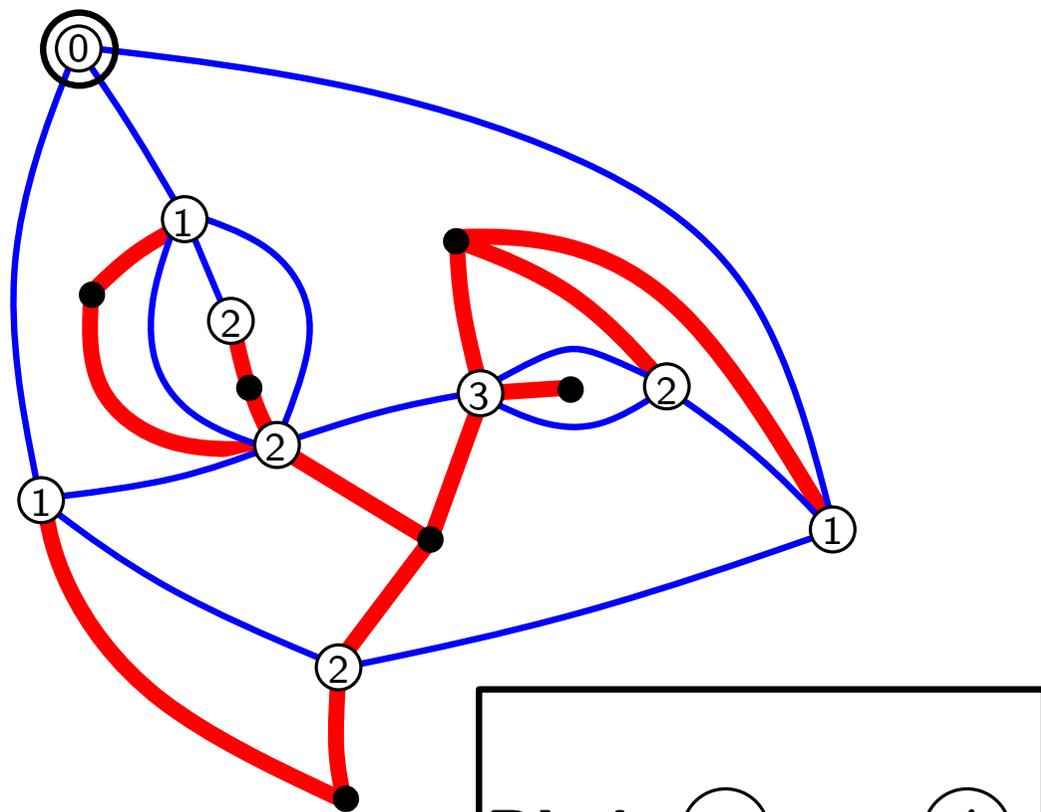
Théorème: La correspondance est une **bijection**.

face degré $2i$ \longleftrightarrow sommet noir degré i

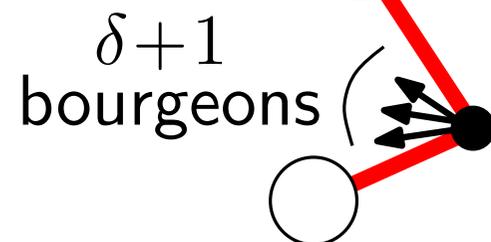
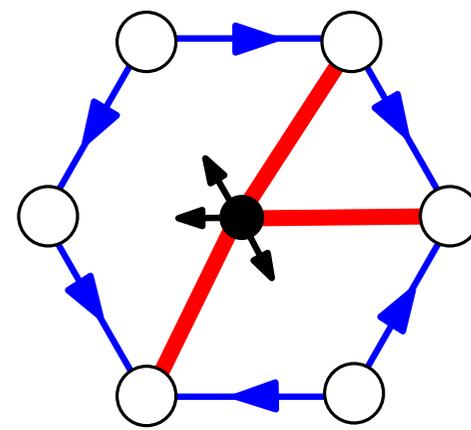
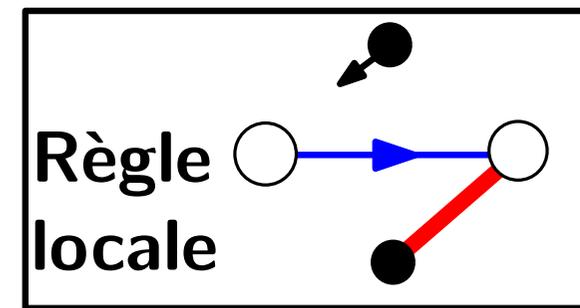
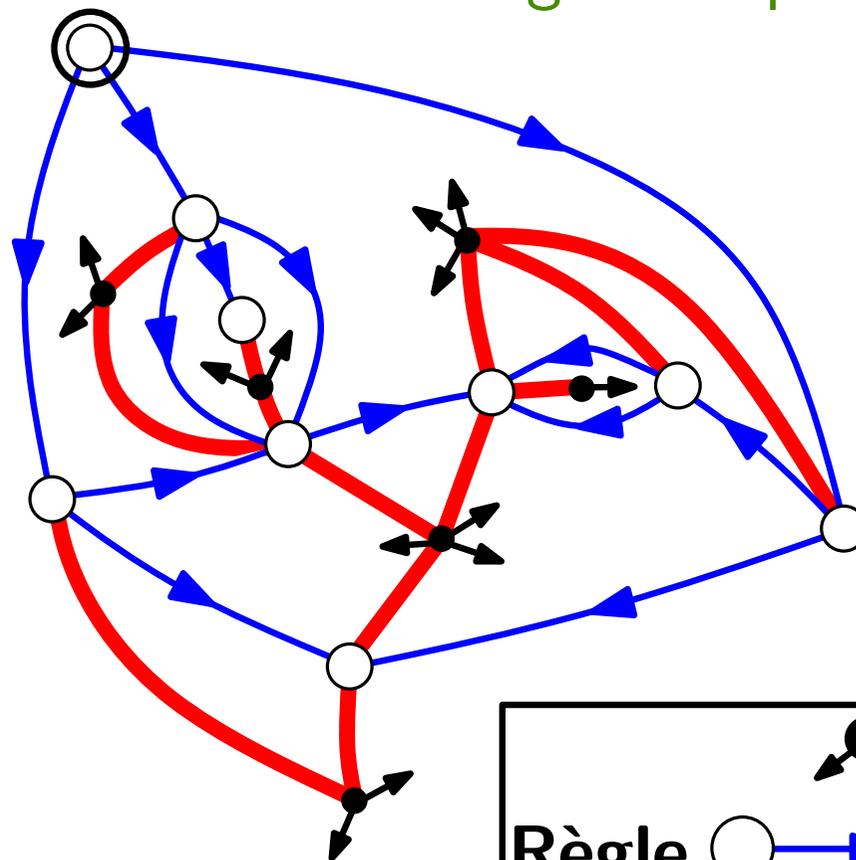
Rq: implique la formule des slicings de Tutte par énumération des mobiles

Reformulation à l'aide d'orientations

Étiquetage de distances



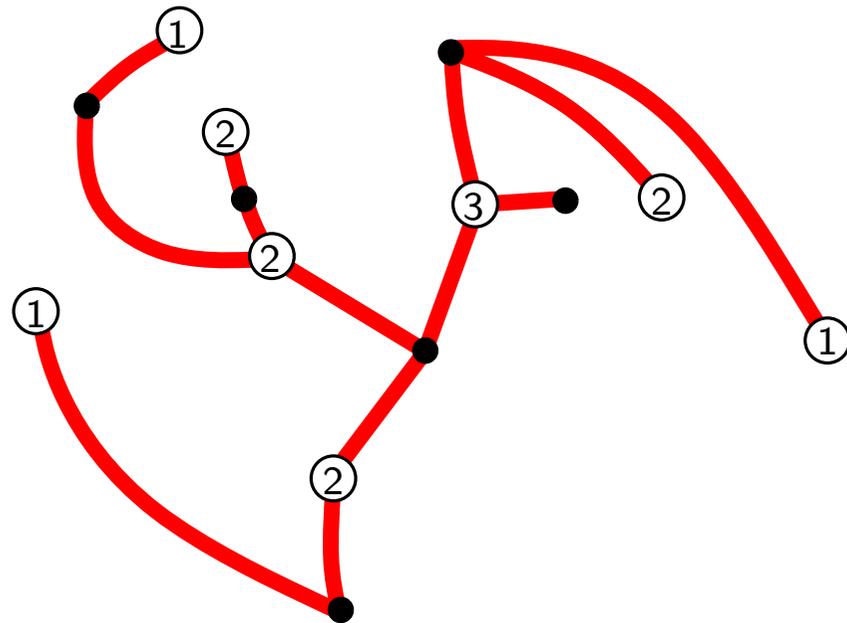
Orientation géodésique



Reformulation à l'aide d'orientations

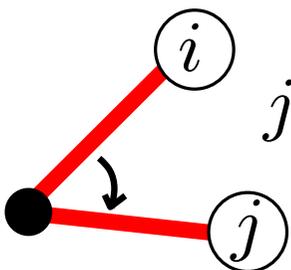
Formulation étiquetée

donne un mobile étiqueté



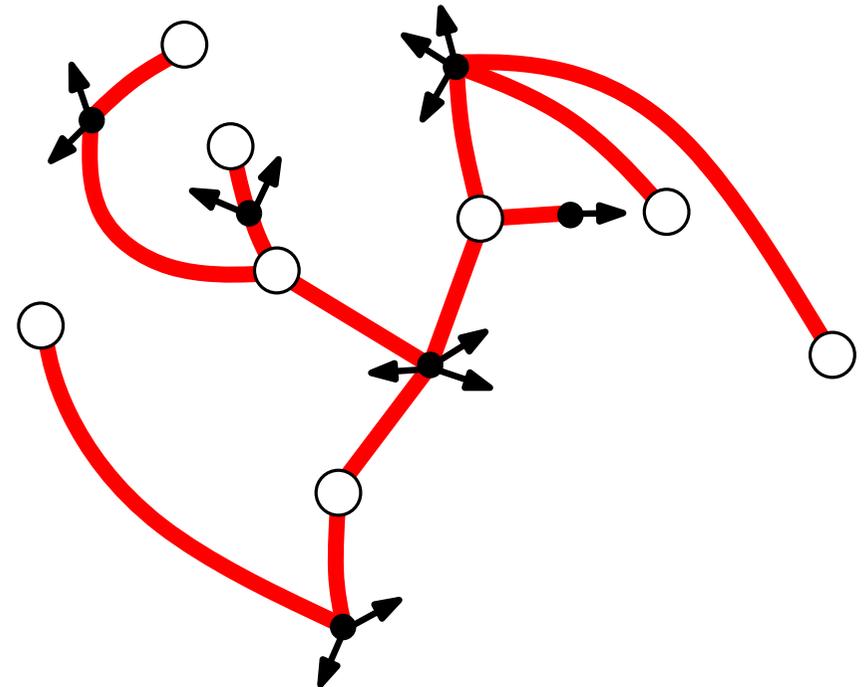
avec les conditions:

(i) \exists sommet étiquette 1

(ii)  $j \leq i+1$

Formulation orientée

donne un mobile "bourgeonnant"



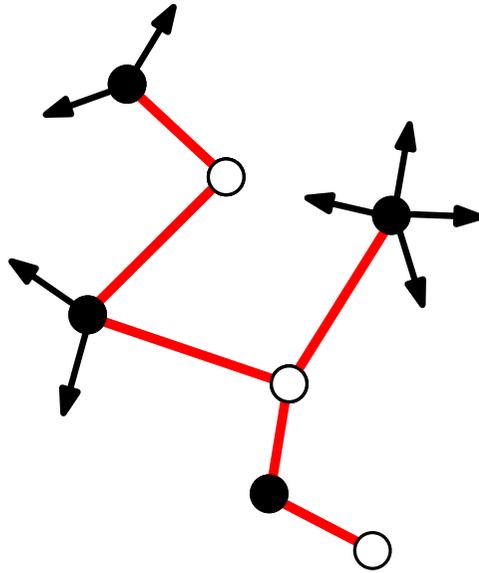
avec la condition:

à chaque sommet noir, autant de bourgeons que de voisins

Définition des mobiles bourgeonnants

- Un **mobile bourgeonnant** est un arbre biparti (sommets noirs/blancs) où chaque coin en chaque sommet noir peut porter des “bourgeons”

excès = nombre d'arêtes - nombre de bourgeons

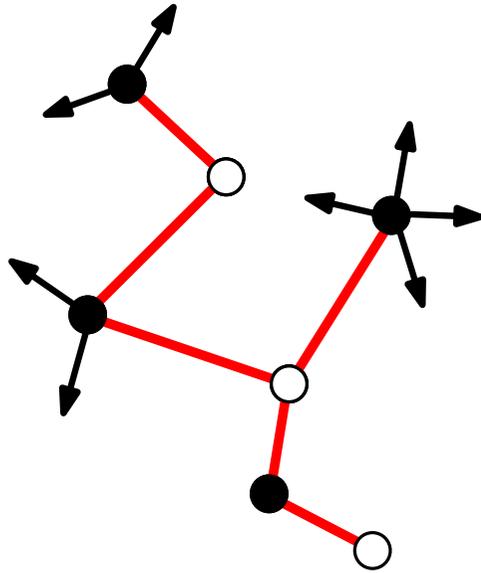


un mobile bourgeonnant
d'excès -2

Définition des mobiles bourgeonnants

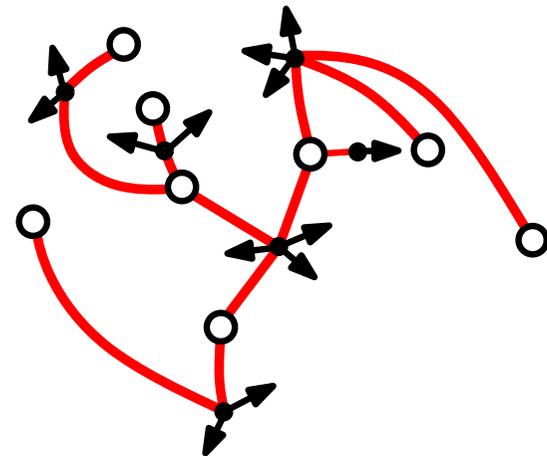
- Un **mobile bourgeonnant** est un arbre biparti (sommets noirs/blancs) où chaque coin en chaque sommet noir peut porter des “bourgeons”

$$\text{excès} = \text{nombre d'arêtes} - \text{nombre de bourgeons}$$



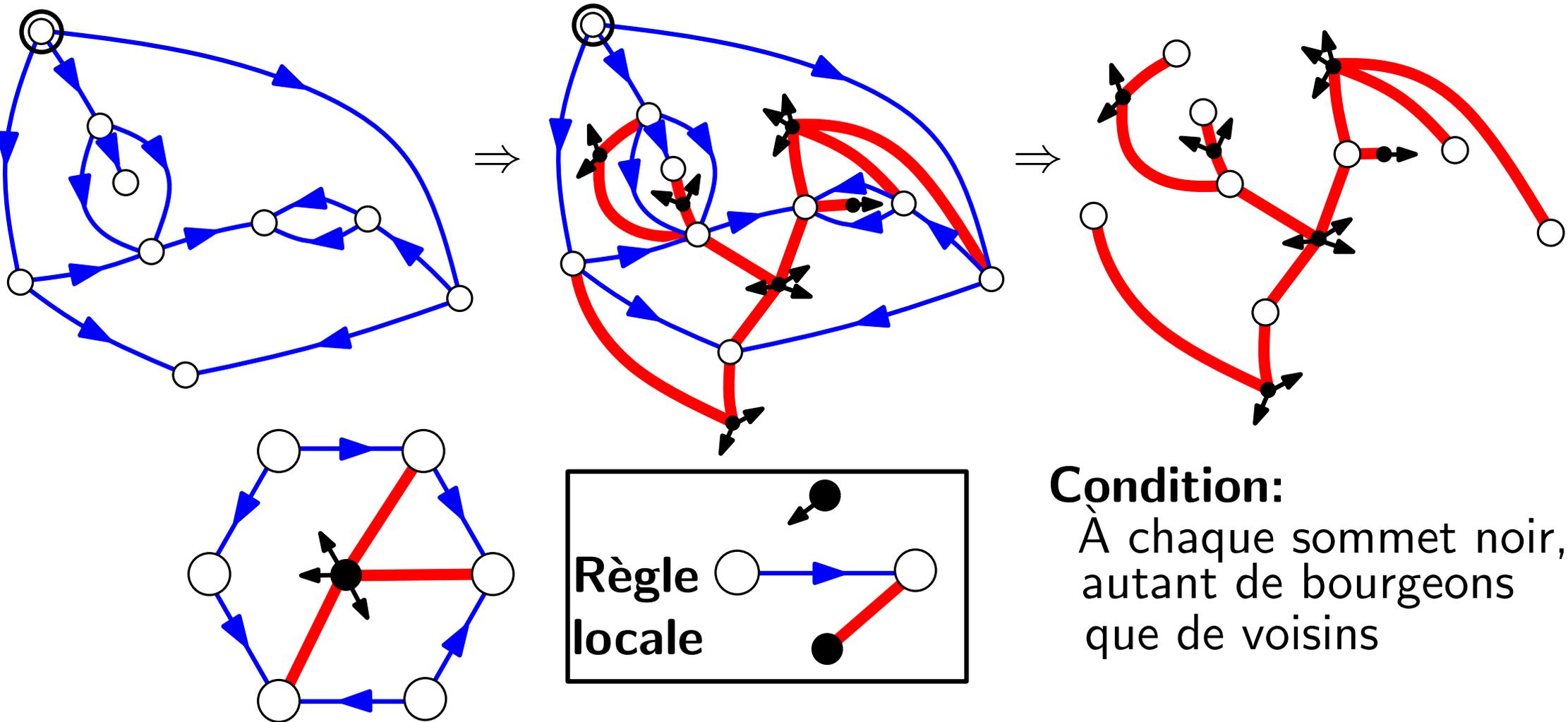
un mobile bourgeonnant
d'excès -2

- Un mobile bourgeonnant est dit **équilibré** si chaque sommet noir a autant de voisins (blancs) que de bourgeons



Rq: forment une sous-famille des mobiles bourgeonnants d'excès 0

Énoncé de la bijection BDG reformulée

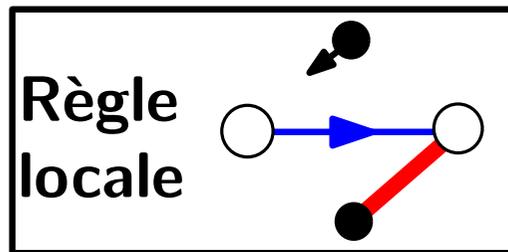
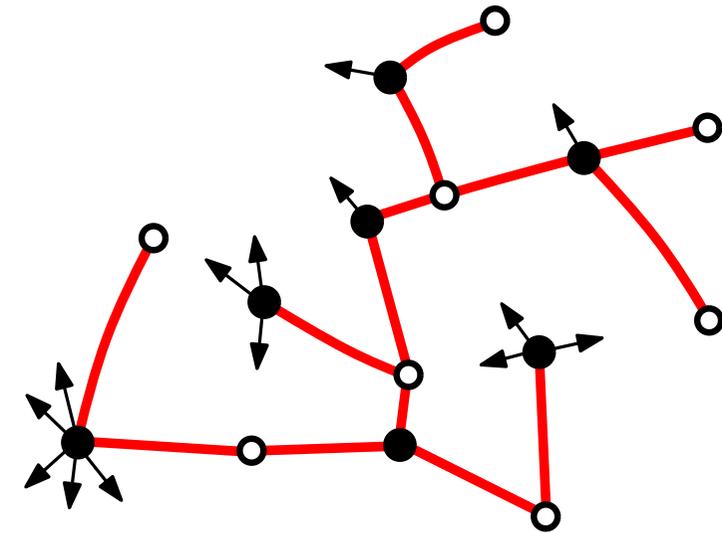
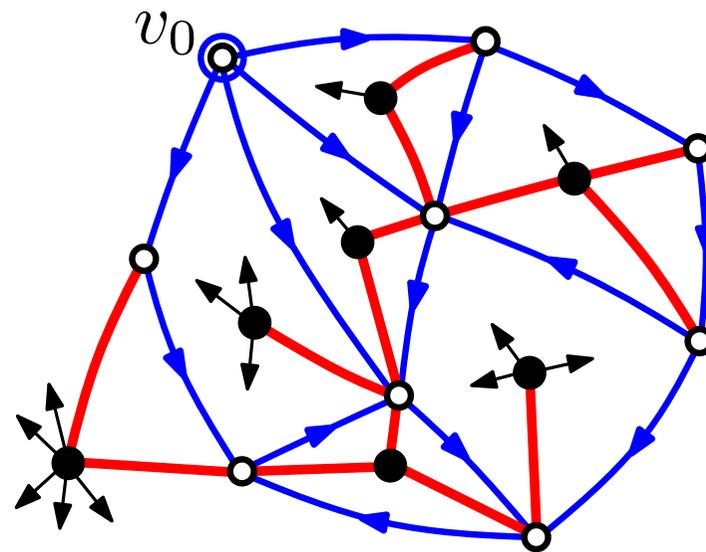
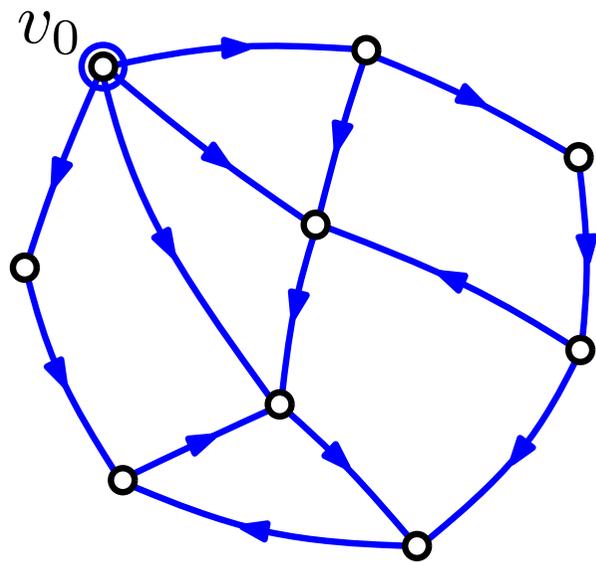


Théorème: La correspondance est une **bijection** entre cartes biparties pointées et mobiles bourgeonnants équilibrés.

face degré $2i$ \longleftrightarrow sommet noir degré $2i$

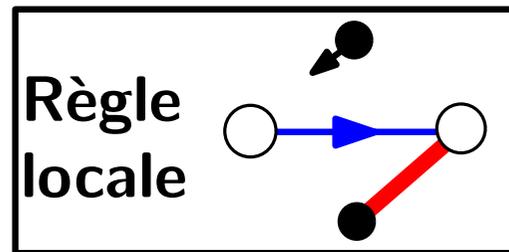
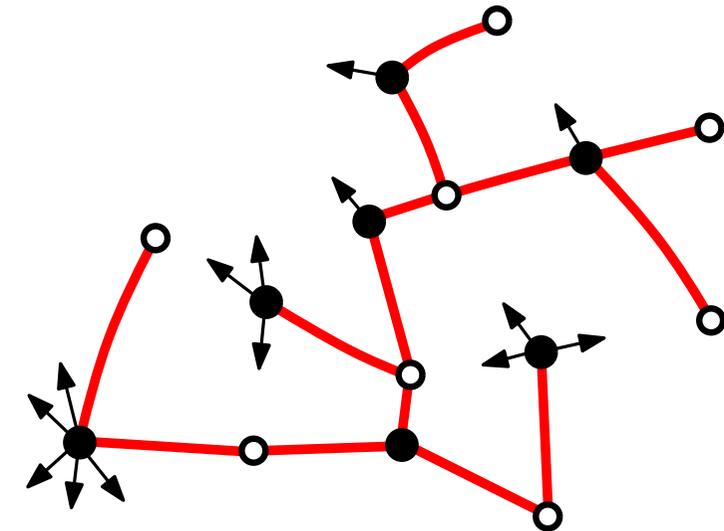
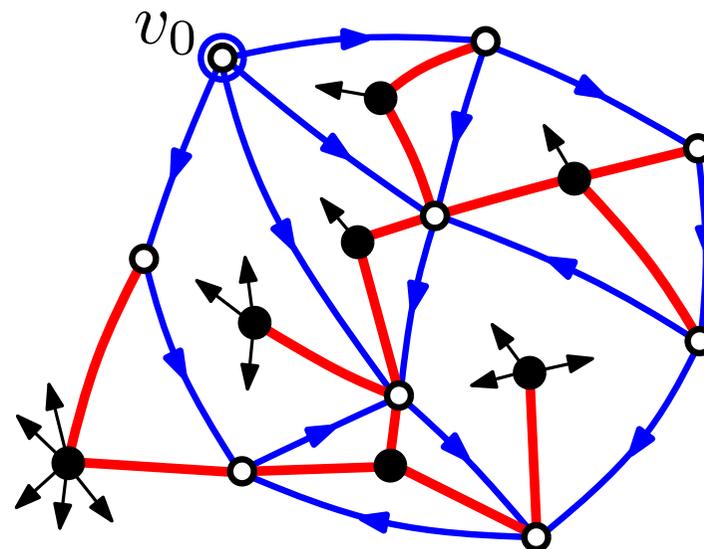
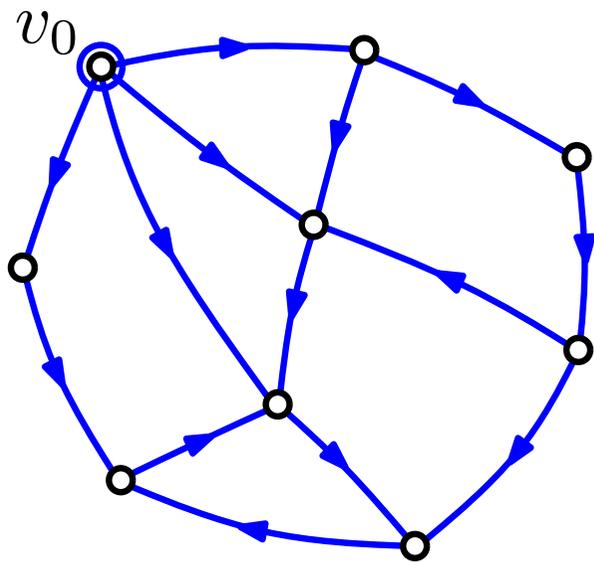
Extension pour les mobiles d'excès zéro

- Plus généralement, on **obtient un mobile bourgeonnant** (d'excès 0) si on part d'une orientation de carte pointée telle que :
 - le sommet pointé v_0 est **"source"**
 - tout sommet est **accessible** de v_0 par un chemin orienté
 - **pas de circuit anti-horaire** (plongement avec $v_0 \in$ face externe)



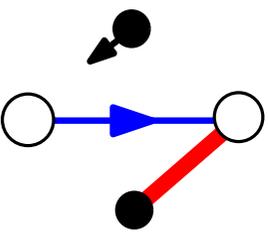
Extension pour les mobiles d'excès zéro

- Plus généralement, on **obtient un mobile bourgeonnant** (d'excès 0) si on part d'une orientation de carte pointée telle que :
 - le sommet pointé v_0 est **"source"**
 - tout sommet est **accessible** de v_0 par un chemin orienté
 - **pas de circuit anti-horaire** (plongement avec $v_0 \in$ face externe)



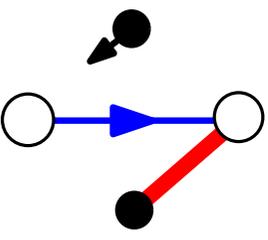
Théorème : si on note \mathcal{O}_0 cette famille d'orientations, alors la correspondance Φ est une bijection avec les mobiles d'excès zéro

Preuve que l'on obtient bien un arbre

On part d'une orientation $M \in \mathcal{O}_0$ et on applique la règle locale 

Soit G le graphe des arêtes rouges et sommets incidents

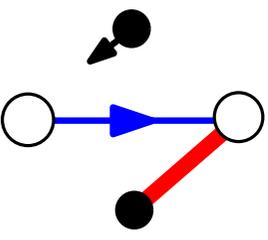
Preuve que l'on obtient bien un arbre

On part d'une orientation $M \in \mathcal{O}_0$ et on applique la règle locale 

Soit G le graphe des arêtes rouges et sommets incidents

G a $|V_M| - 1$ sommets blancs, $|F_M|$ sommets noirs, et $|E_M|$ arêtes

Preuve que l'on obtient bien un arbre

On part d'une orientation $M \in \mathcal{O}_0$ et on applique la règle locale 

Soit G le graphe des arêtes rouges et sommets incidents

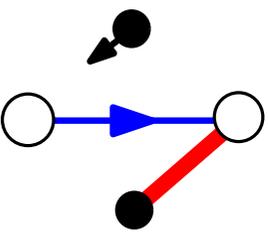
G a $|V_M| - 1$ sommets blancs, $|F_M|$ sommets noirs, et $|E_M|$ arêtes

Relation d'Euler : $|E_M| = |V_M| + |F_M| - 2$

$\Rightarrow G$ a un sommet de plus que d'arêtes

donc G est un arbre ssi G est acyclique

Preuve que l'on obtient bien un arbre

On part d'une orientation $M \in \mathcal{O}_0$ et on applique la règle locale 

Soit G le graphe des arêtes rouges et sommets incidents

G a $|V_M| - 1$ sommets blancs, $|F_M|$ sommets noirs, et $|E_M|$ arêtes

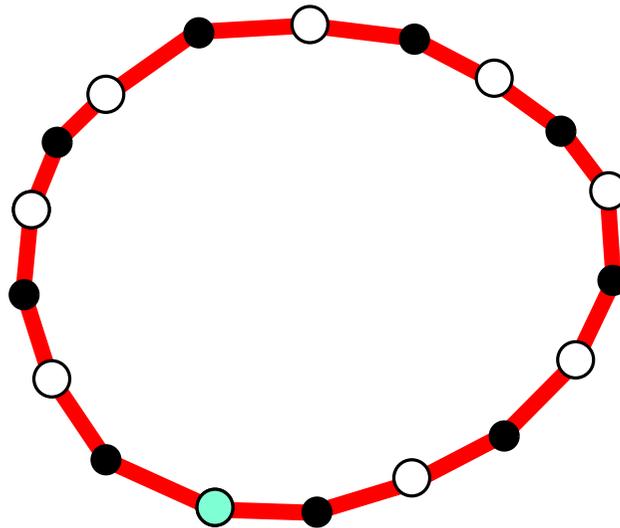
Relation d'Euler : $|E_M| = |V_M| + |F_M| - 2$

$\Rightarrow G$ a un sommet de plus que d'arêtes

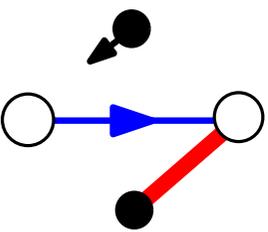
donc G est un arbre ssi G est acyclique

Supposons que G a un cycle :

v_0 



Preuve que l'on obtient bien un arbre

On part d'une orientation $M \in \mathcal{O}_0$ et on applique la règle locale 

Soit G le graphe des arêtes rouges et sommets incidents

G a $|V_M| - 1$ sommets blancs, $|F_M|$ sommets noirs, et $|E_M|$ arêtes

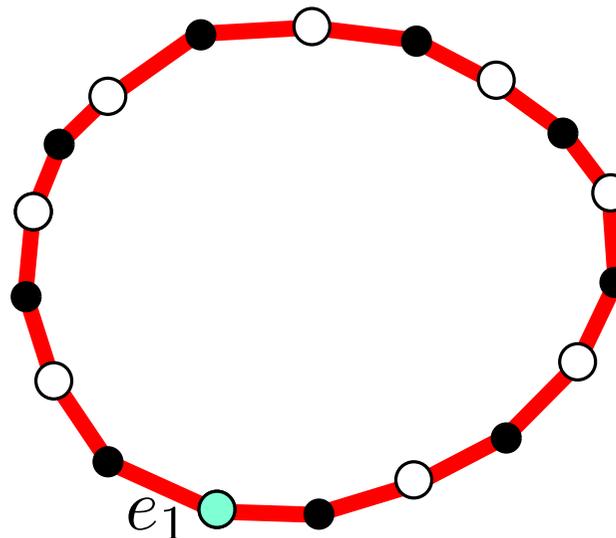
Relation d'Euler : $|E_M| = |V_M| + |F_M| - 2$

$\Rightarrow G$ a un sommet de plus que d'arêtes

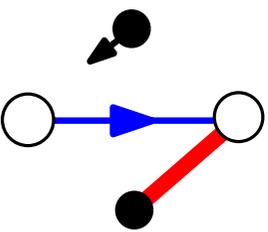
donc G est un arbre ssi G est acyclique

Supposons que G a un cycle :

v_0 



Preuve que l'on obtient bien un arbre

On part d'une orientation $M \in \mathcal{O}_0$ et on applique la règle locale 

Soit G le graphe des arêtes rouges et sommets incidents

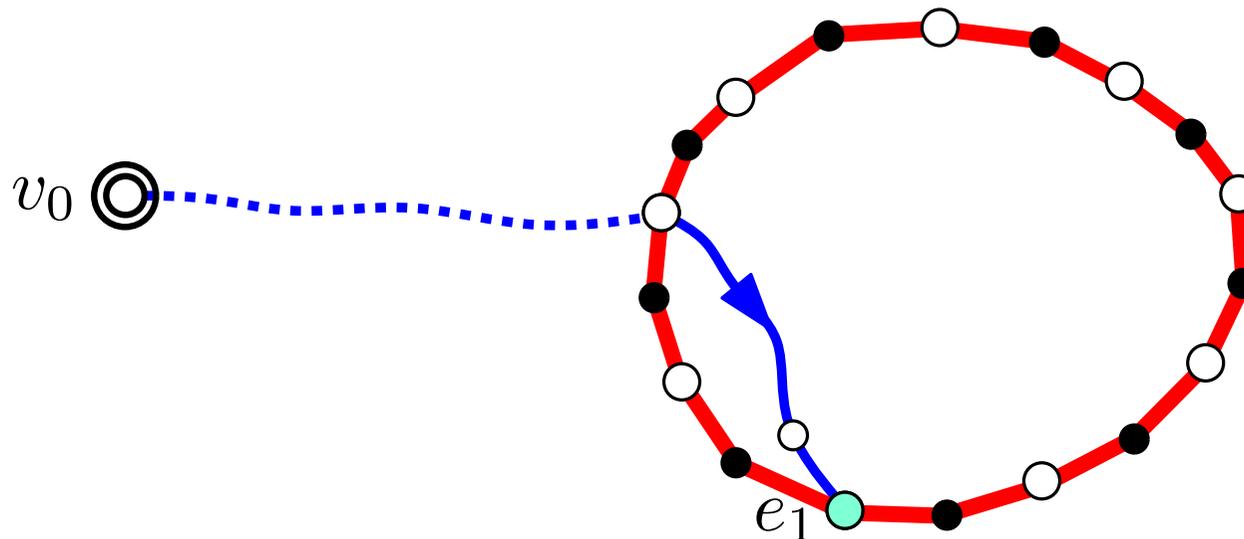
G a $|V_M| - 1$ sommets blancs, $|F_M|$ sommets noirs, et $|E_M|$ arêtes

Relation d'Euler : $|E_M| = |V_M| + |F_M| - 2$

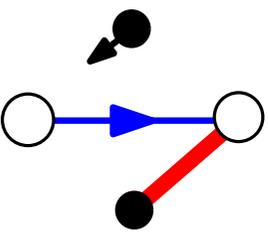
$\Rightarrow G$ a un sommet de plus que d'arêtes

donc G est un arbre ssi G est acyclique

Supposons que G a un cycle :



Preuve que l'on obtient bien un arbre

On part d'une orientation $M \in \mathcal{O}_0$ et on applique la règle locale 

Soit G le graphe des arêtes rouges et sommets incidents

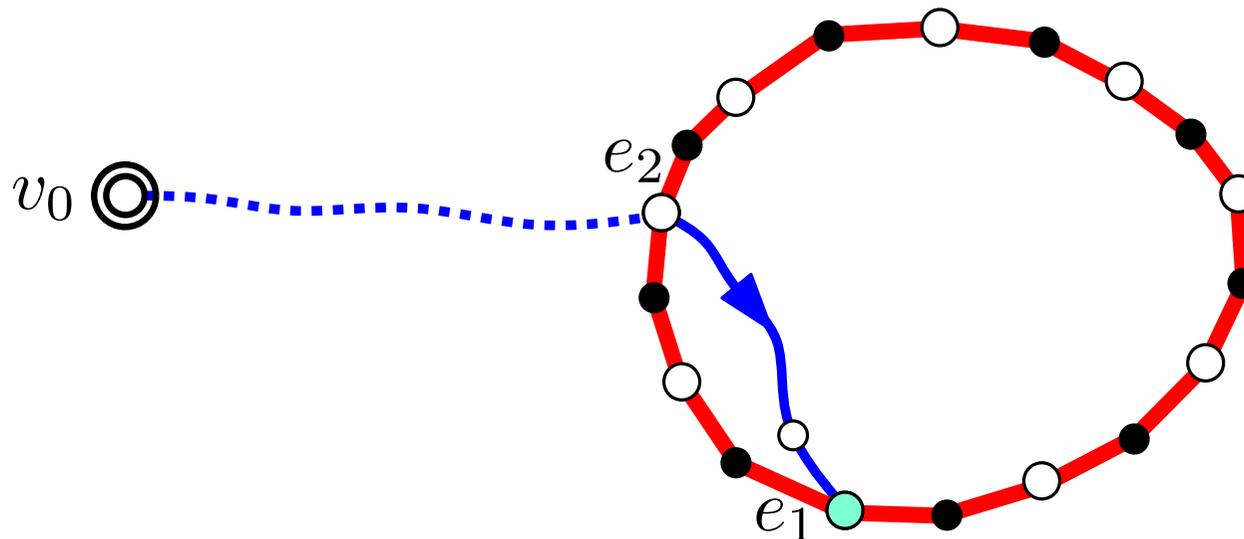
G a $|V_M| - 1$ sommets blancs, $|F_M|$ sommets noirs, et $|E_M|$ arêtes

Relation d'Euler : $|E_M| = |V_M| + |F_M| - 2$

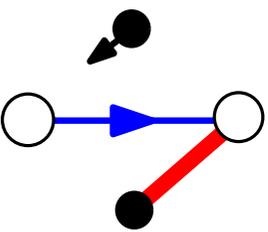
$\Rightarrow G$ a un sommet de plus que d'arêtes

donc G est un arbre ssi G est acyclique

Supposons que G a un cycle :



Preuve que l'on obtient bien un arbre

On part d'une orientation $M \in \mathcal{O}_0$ et on applique la règle locale 

Soit G le graphe des arêtes rouges et sommets incidents

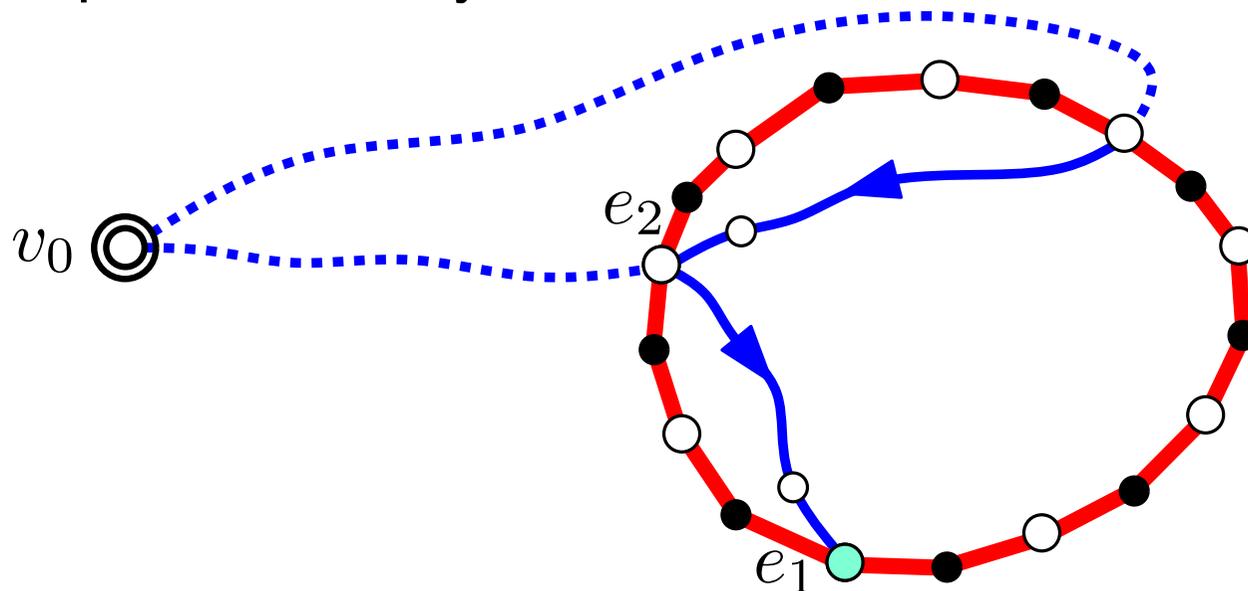
G a $|V_M| - 1$ sommets blancs, $|F_M|$ sommets noirs, et $|E_M|$ arêtes

Relation d'Euler : $|E_M| = |V_M| + |F_M| - 2$

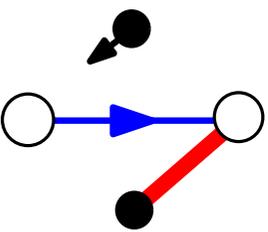
$\Rightarrow G$ a un sommet de plus que d'arêtes

donc G est un arbre ssi G est acyclique

Supposons que G a un cycle :



Preuve que l'on obtient bien un arbre

On part d'une orientation $M \in \mathcal{O}_0$ et on applique la règle locale 

Soit G le graphe des arêtes rouges et sommets incidents

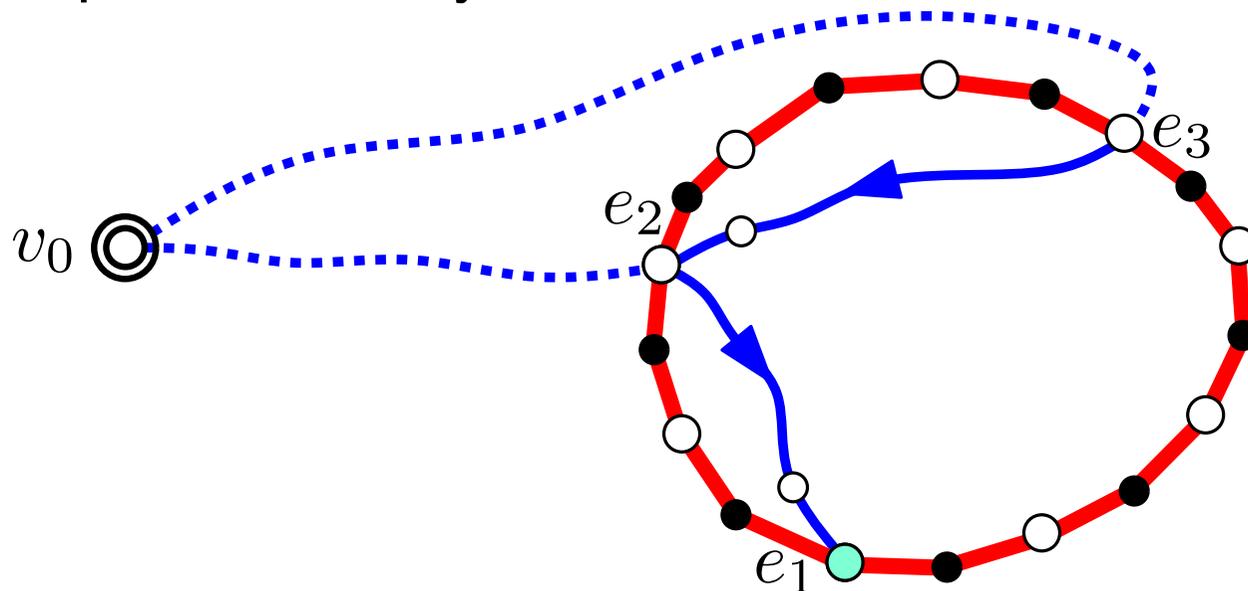
G a $|V_M| - 1$ sommets blancs, $|F_M|$ sommets noirs, et $|E_M|$ arêtes

Relation d'Euler : $|E_M| = |V_M| + |F_M| - 2$

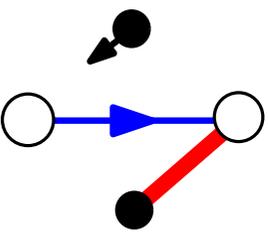
$\Rightarrow G$ a un sommet de plus que d'arêtes

donc G est un arbre ssi G est acyclique

Supposons que G a un cycle :



Preuve que l'on obtient bien un arbre

On part d'une orientation $M \in \mathcal{O}_0$ et on applique la règle locale 

Soit G le graphe des arêtes rouges et sommets incidents

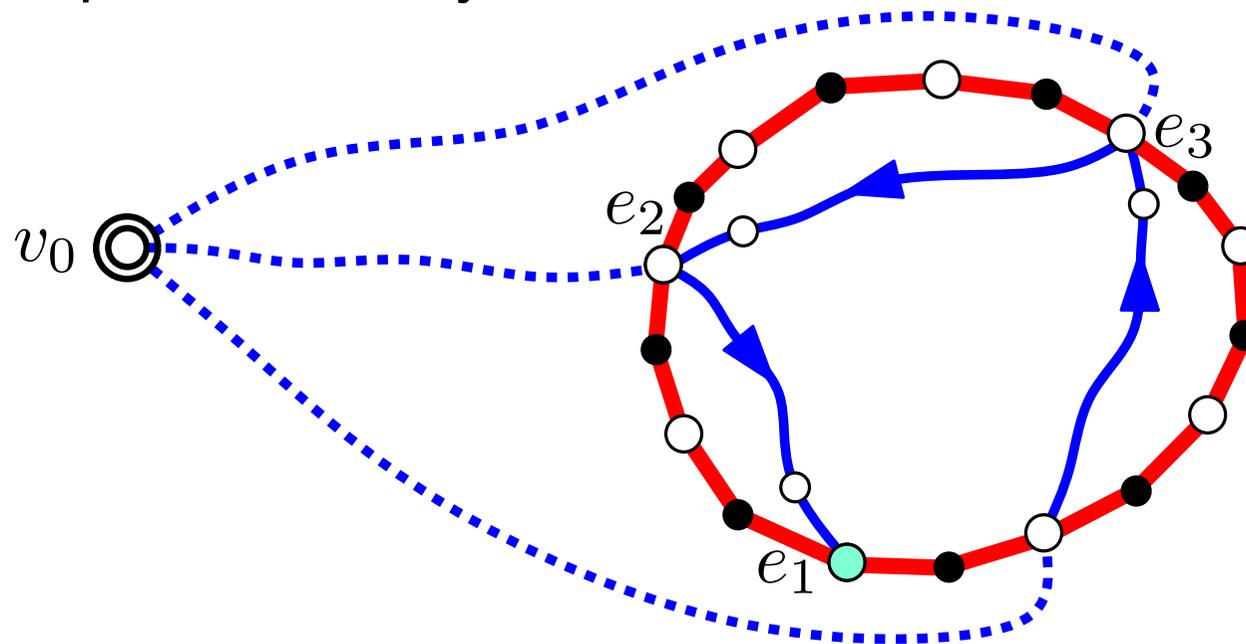
G a $|V_M| - 1$ sommets blancs, $|F_M|$ sommets noirs, et $|E_M|$ arêtes

Relation d'Euler : $|E_M| = |V_M| + |F_M| - 2$

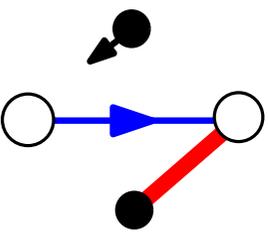
$\Rightarrow G$ a un sommet de plus que d'arêtes

donc G est un arbre ssi G est acyclique

Supposons que G a un cycle :



Preuve que l'on obtient bien un arbre

On part d'une orientation $M \in \mathcal{O}_0$ et on applique la règle locale 

Soit G le graphe des arêtes rouges et sommets incidents

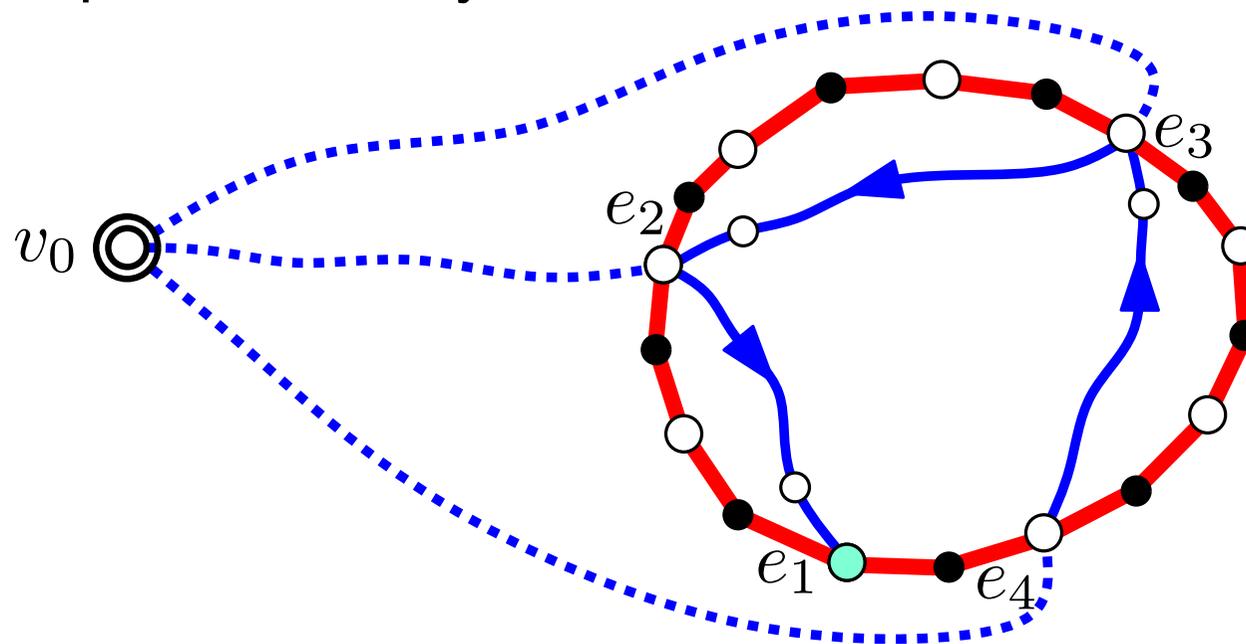
G a $|V_M| - 1$ sommets blancs, $|F_M|$ sommets noirs, et $|E_M|$ arêtes

Relation d'Euler : $|E_M| = |V_M| + |F_M| - 2$

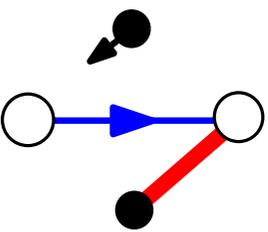
$\Rightarrow G$ a un sommet de plus que d'arêtes

donc G est un arbre ssi G est acyclique

Supposons que G a un cycle :



Preuve que l'on obtient bien un arbre

On part d'une orientation $M \in \mathcal{O}_0$ et on applique la règle locale 

Soit G le graphe des arêtes rouges et sommets incidents

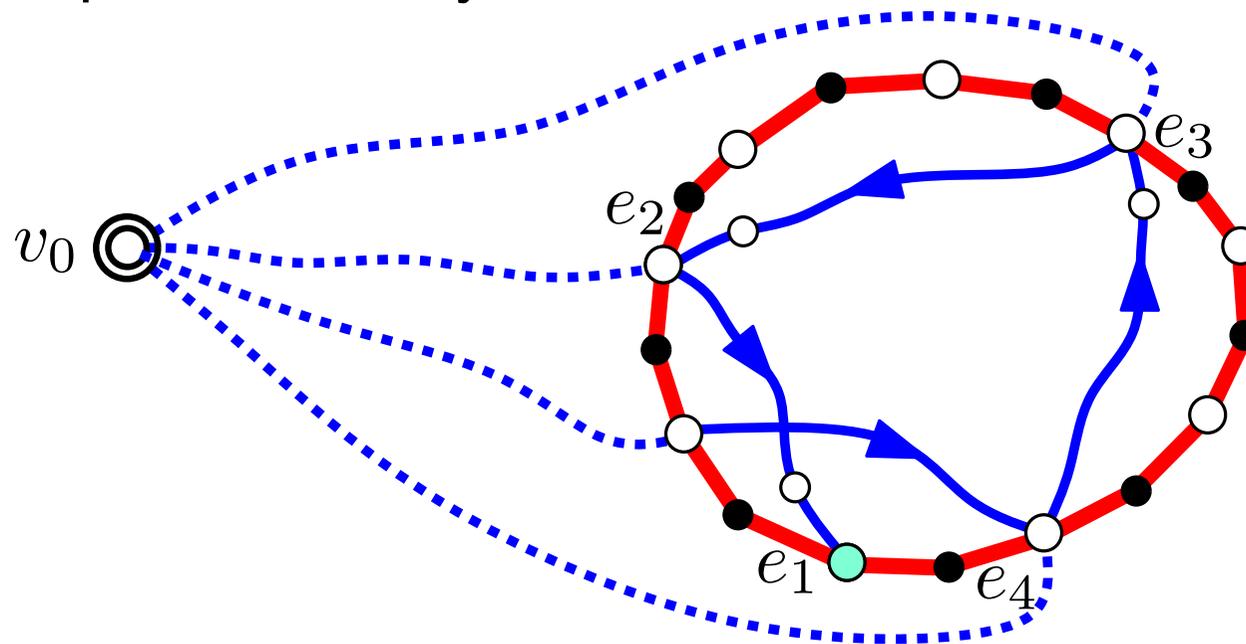
G a $|V_M| - 1$ sommets blancs, $|F_M|$ sommets noirs, et $|E_M|$ arêtes

Relation d'Euler : $|E_M| = |V_M| + |F_M| - 2$

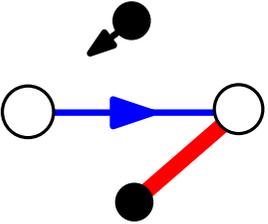
$\Rightarrow G$ a un sommet de plus que d'arêtes

donc G est un arbre ssi G est acyclique

Supposons que G a un cycle :



Preuve que l'on obtient bien un arbre

On part d'une orientation $M \in \mathcal{O}_0$ et on applique la règle locale 

Soit G le graphe des arêtes rouges et sommets incidents

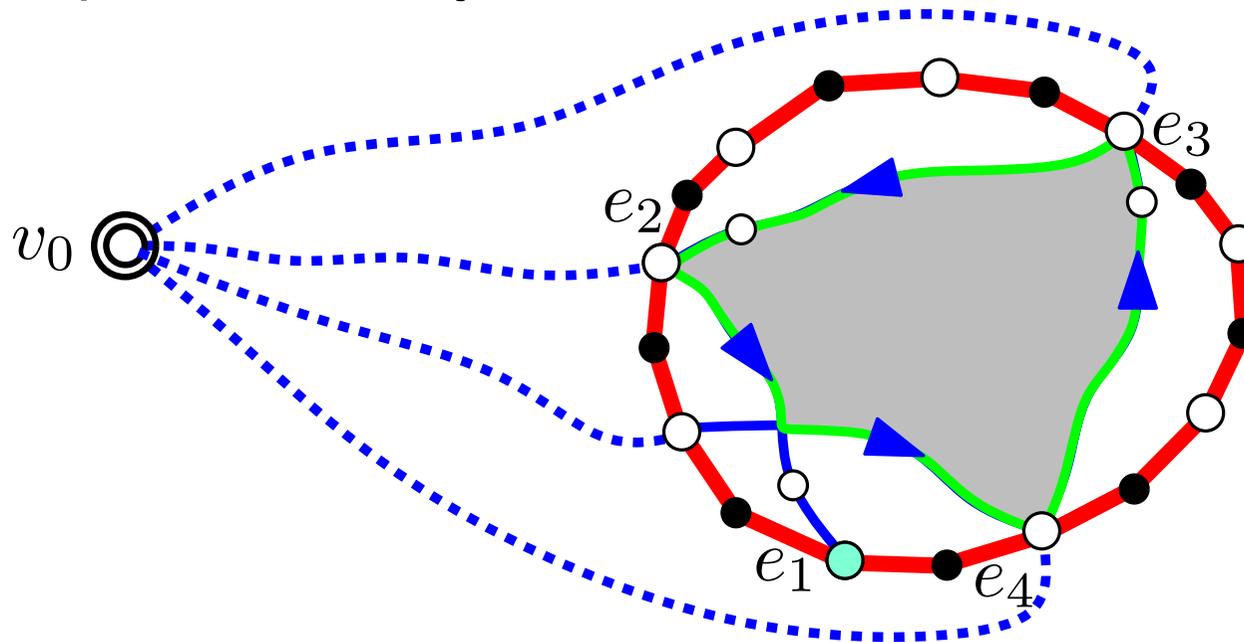
G a $|V_M| - 1$ sommets blancs, $|F_M|$ sommets noirs, et $|E_M|$ arêtes

Relation d'Euler : $|E_M| = |V_M| + |F_M| - 2$

$\Rightarrow G$ a un sommet de plus que d'arêtes

donc G est un arbre ssi G est acyclique

Supposons que G a un cycle :



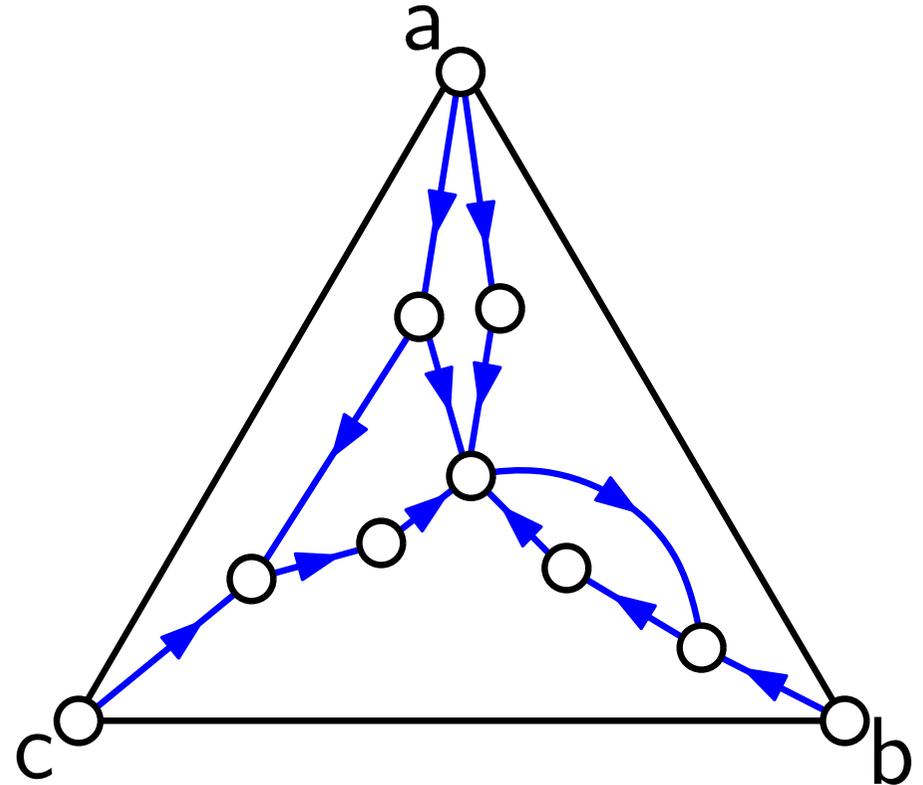
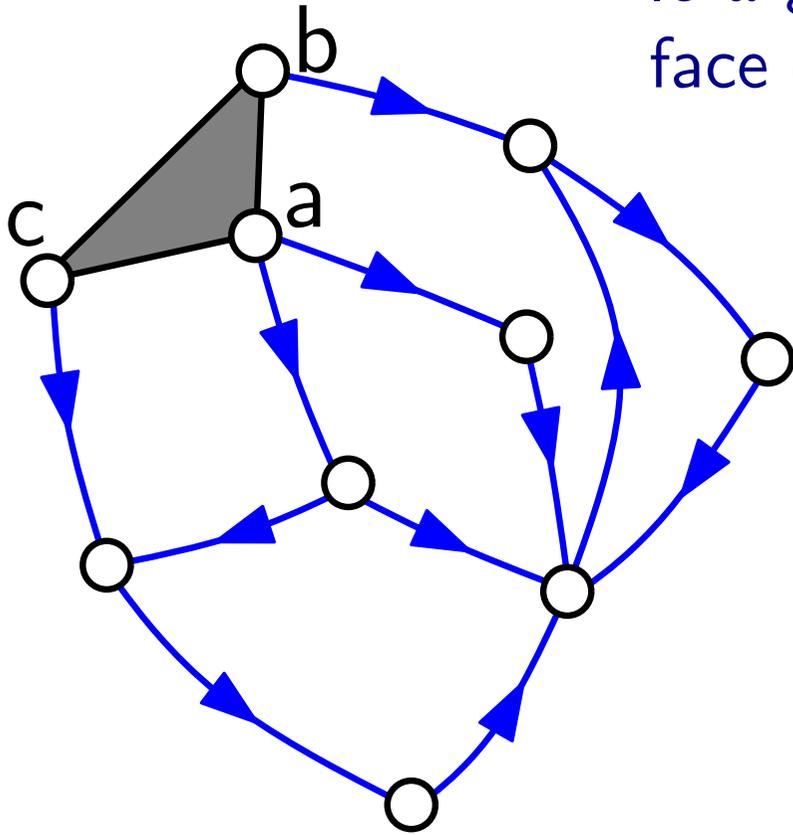
cycle anti-horaire
prisonnier

Extension pour les mobiles d'excès ≤ 0

Plus généralement la "source" peut être un d -gone, pour $d \geq 0$

Exemple pour $d = 3$

Pour $d > 0$, on prend le d -gone source comme face externe

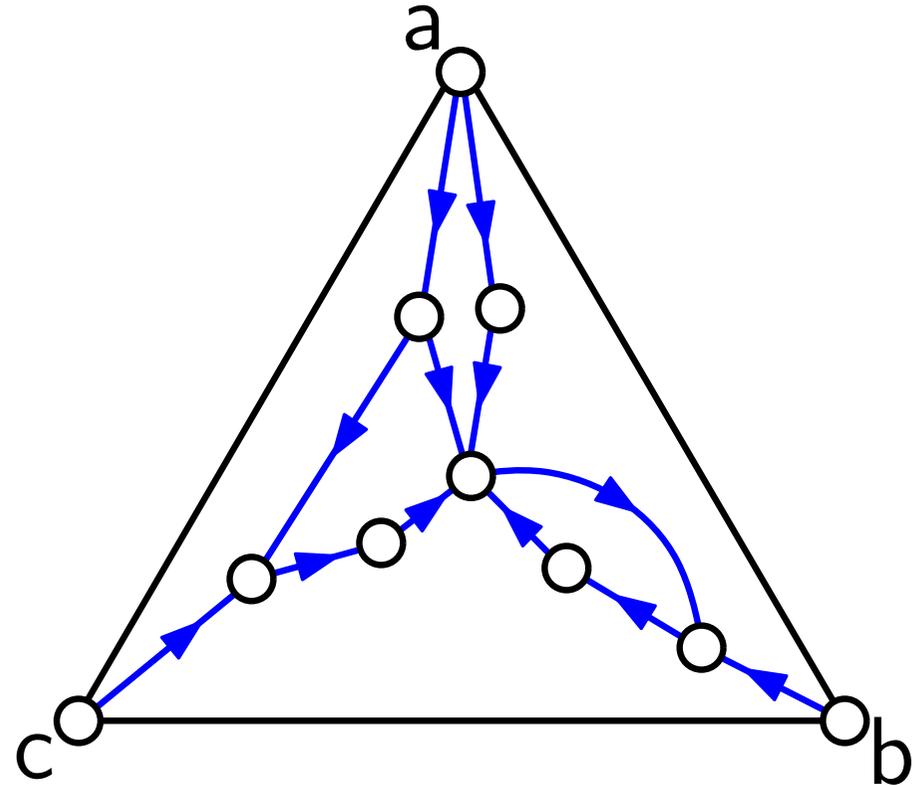
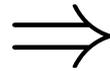
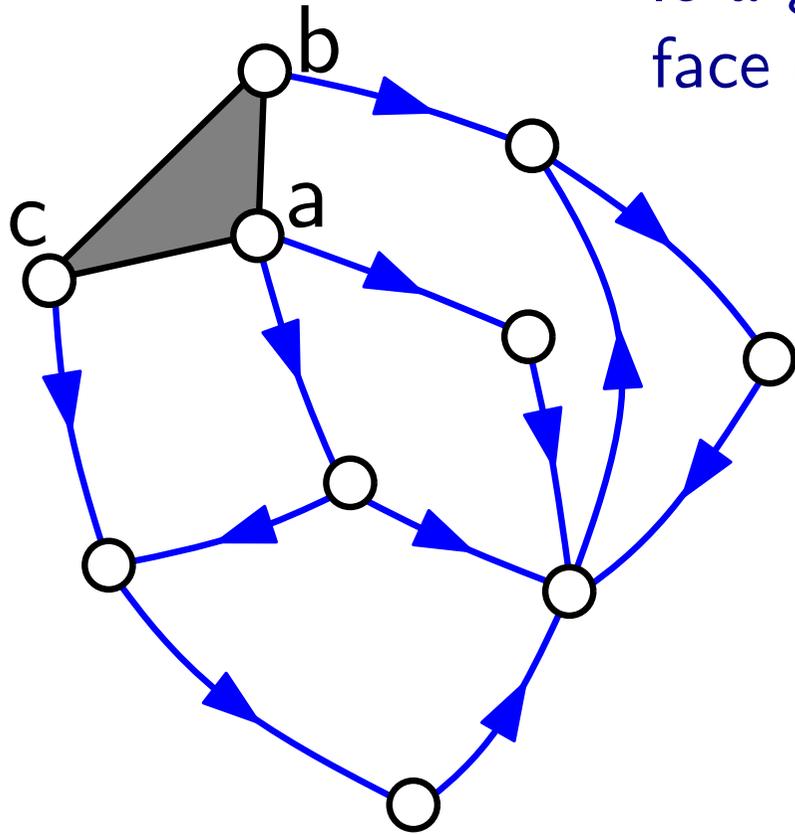


Extension pour les mobiles d'excès ≤ 0

Plus généralement la "source" peut être un d -gone, pour $d \geq 0$

Exemple pour $d = 3$

Pour $d > 0$, on prend le d -gone source comme face externe

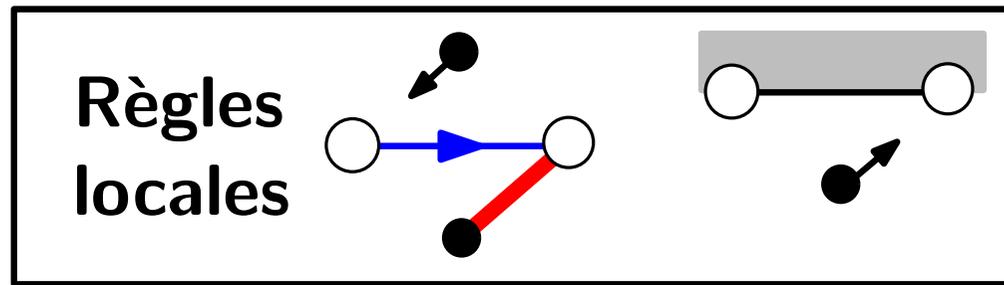
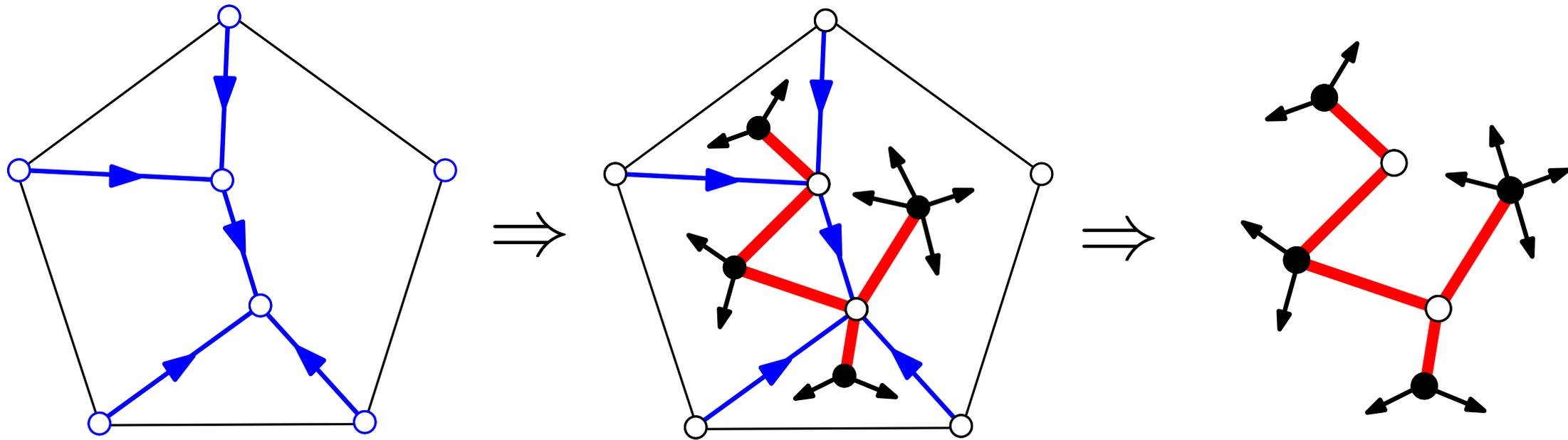


Soit \mathcal{O}_{-d} la famille de ces orientations, avec toujours les conditions :

- le d -gone **source** n'a que des arêtes sortantes
- tout sommet peut être **atteint** par un chemin dirigé partant de la source
- **pas de cycle anti-horaire**

Extension pour les mobiles d'excès ≤ 0

Méta bijection Φ



Théorème [Bernardi-F'10]: Pour tout $\delta \leq 0$, Φ est une **bijection** entre \mathcal{O}_δ et les mobiles d'excès δ .

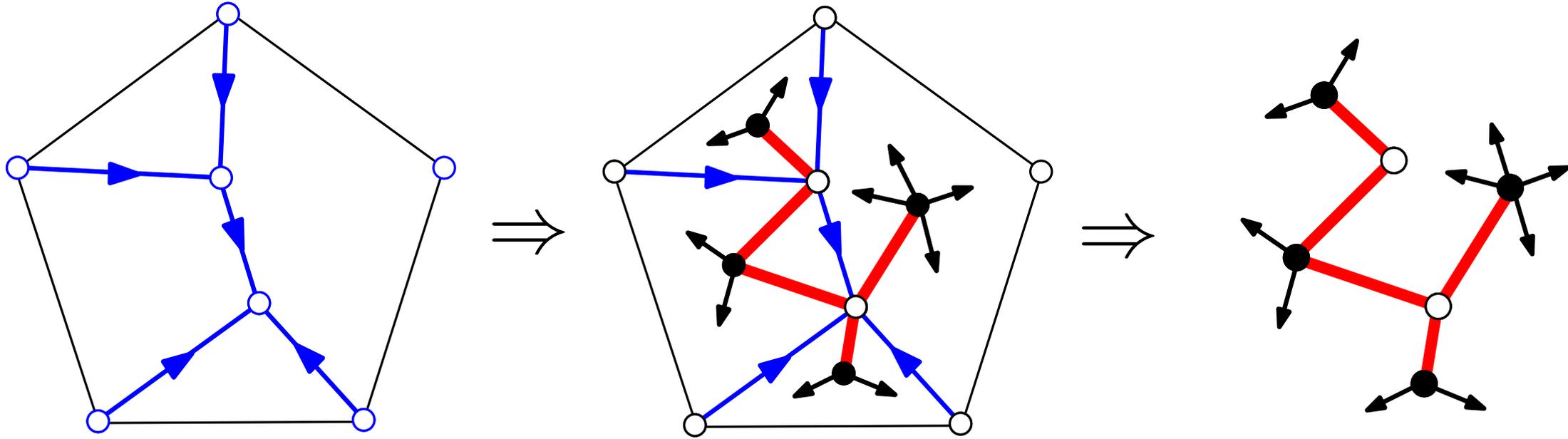
degrés des faces internes \longleftrightarrow degrés des sommets noirs

degrés entrants des sommets internes \longleftrightarrow degrés des sommets blancs

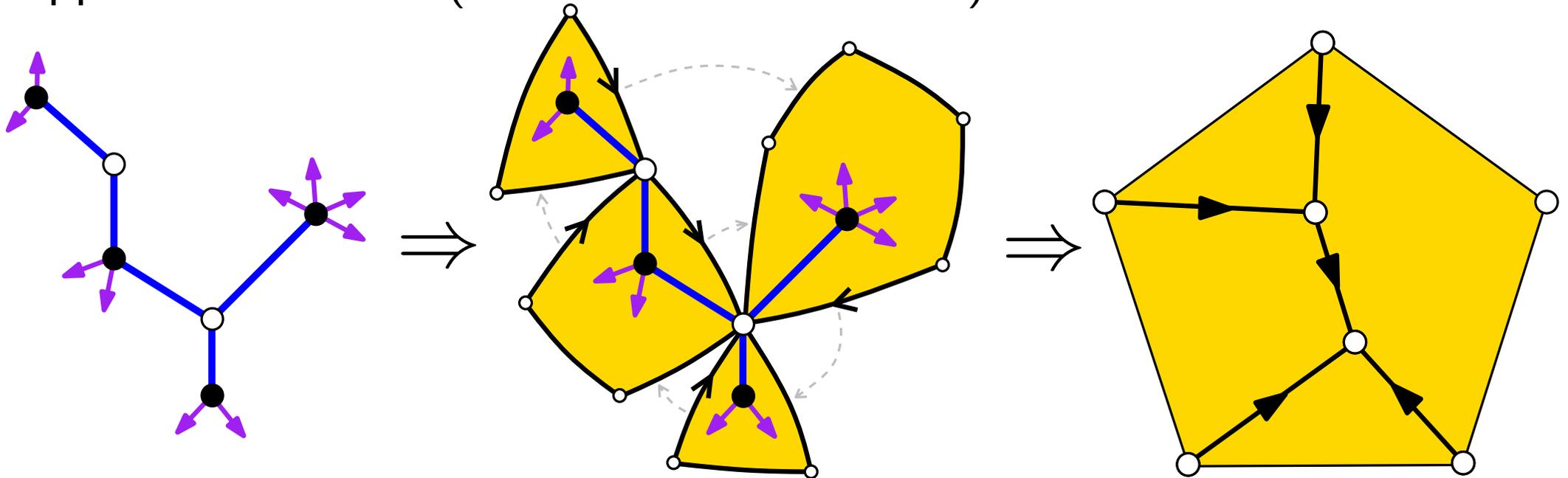
cf [Bernardi'07], [Bernardi-Chapuy'10]

Extension pour les mobiles d'excès ≤ 0

Méta bijection Φ



• Application inverse (via structure de cactus)

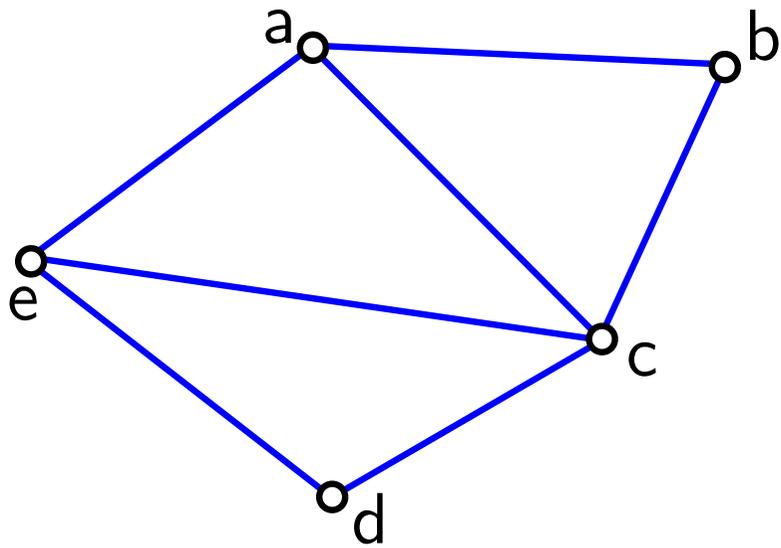


Application aux cartes biparties simples

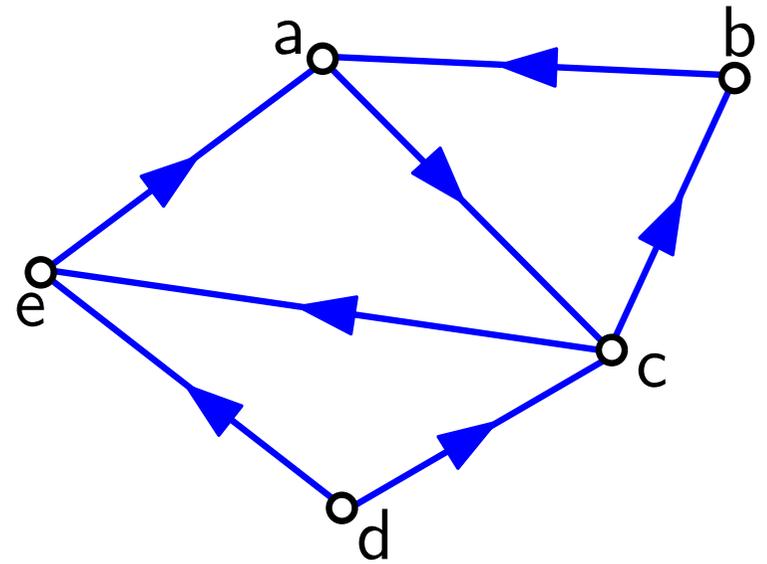
α -orientations

Soit $G = (V, E)$ un graphe, et soit α une fonction de V vers \mathbb{N}

α -orientation de G : orientation où chaque $v \in V$ a $\alpha(v)$ arêtes entrantes



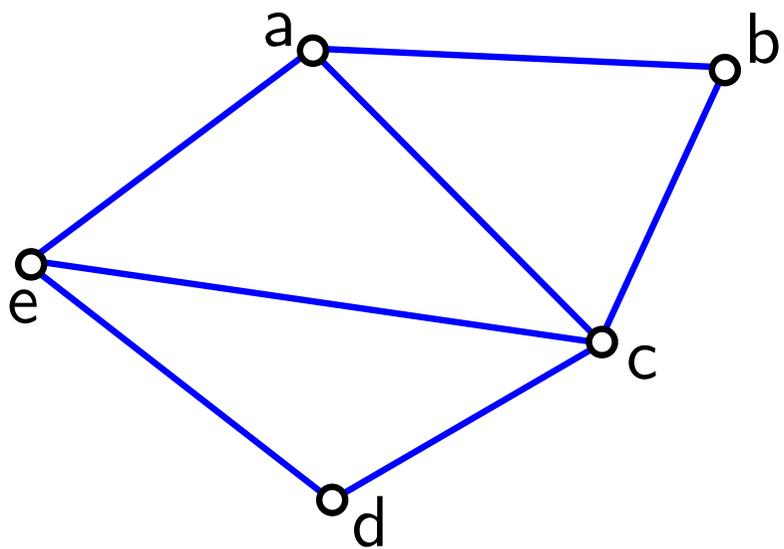
α :	a	\rightarrow	2
	b	\rightarrow	1
	c	\rightarrow	2
	d	\rightarrow	0
	e	\rightarrow	2



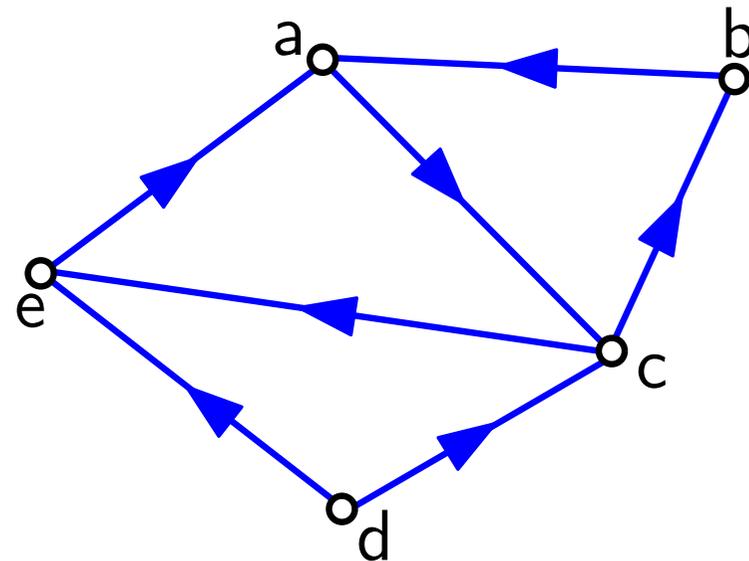
α -orientations

Soit $G = (V, E)$ un graphe, et soit α une fonction de V vers \mathbb{N}

α -orientation de G : orientation où chaque $v \in V$ a $\alpha(v)$ arêtes entrantes

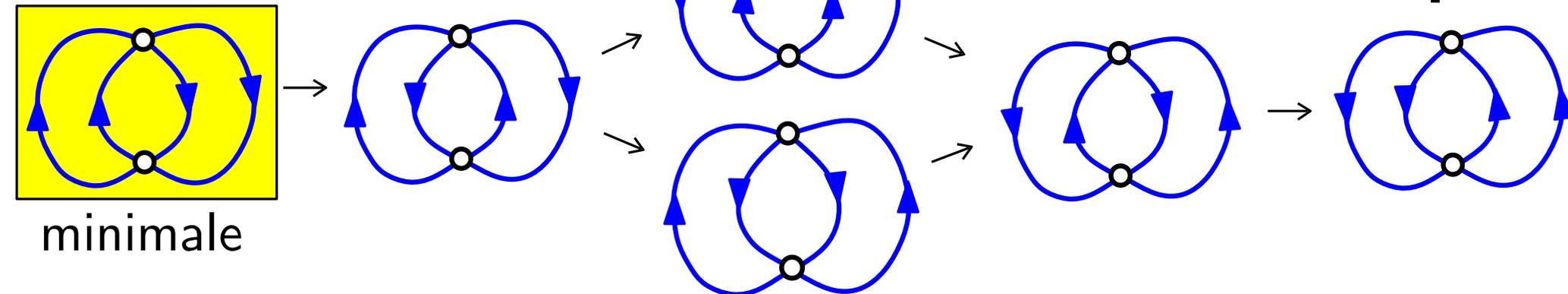


α :	a	\rightarrow	2
	b	\rightarrow	1
	c	\rightarrow	2
	d	\rightarrow	0
	e	\rightarrow	2



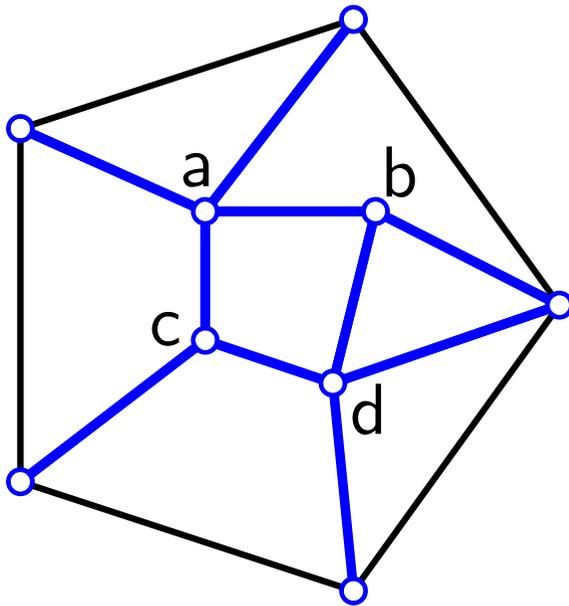
Lemme : Si G est plongé dans le plan et admet une α -orientation, alors G admet une unique α -orientation sans cycle anti-horaire, appelée minimale

[Propp'93], [O. de Mendez'94],
[Felsner'03]

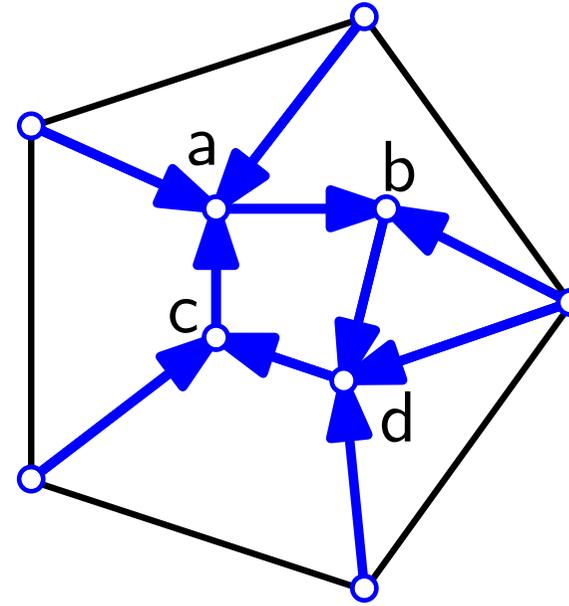


α -orientations dans notre cadre

- Le polygone externe (source) est non-orienté
- Les sommets externes n'ont pas d'arête entrante



$$\alpha : \begin{array}{l} a \rightarrow 3 \\ b \rightarrow 2 \\ c \rightarrow 2 \\ d \rightarrow 3 \end{array}$$



On a toujours : si G admet une α -orientation, alors G admet une unique α -orientation “minimale” (sans cycle anti-horaire)

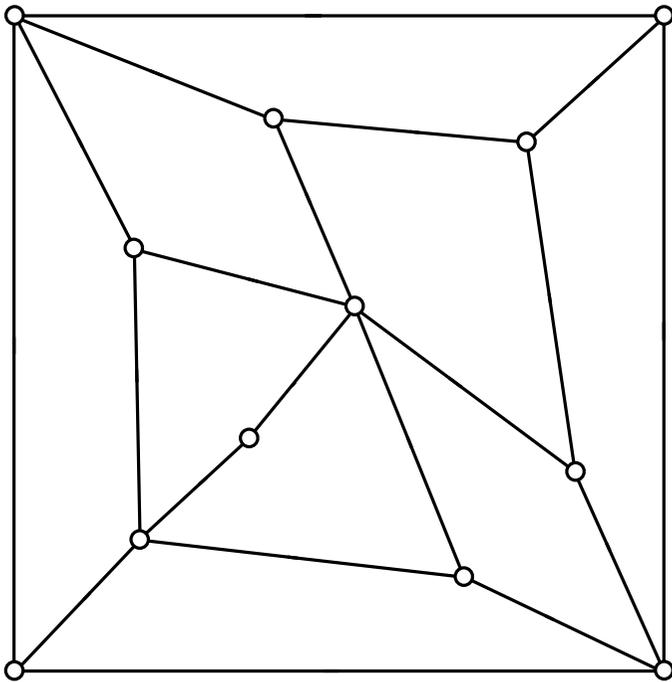
Orientations pour les quadrangulations simples

2-orientation = orientation où chaque sommet interne a 2 entrantes

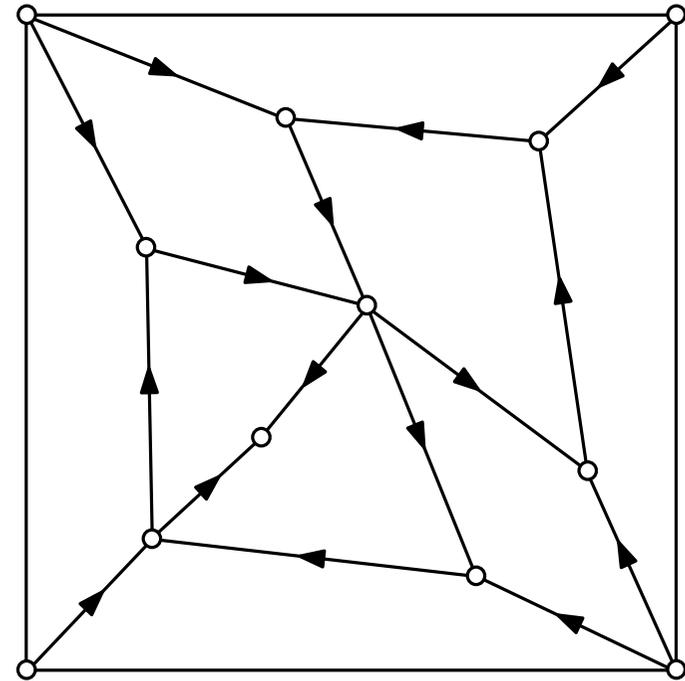
[de Fraysseix, Ossona de Mendez'01]:

Une quadrangulation est simple ssi elle admet une 2-orientation.

Toute 2-orientation est accessible depuis le bord externe



une quadrangulation simple



munie d'une 2-orientation

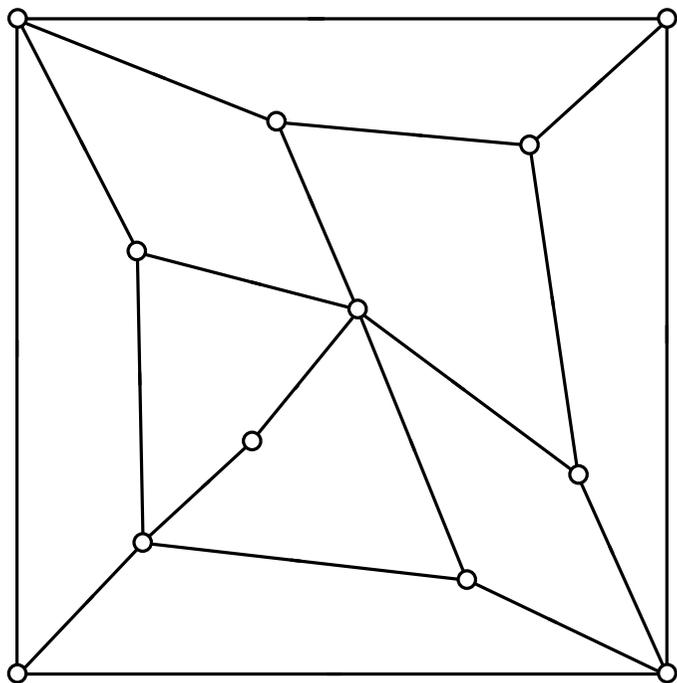
Orientations pour les quadrangulations simples

2-orientation = orientation où chaque sommet interne a 2 entrantes

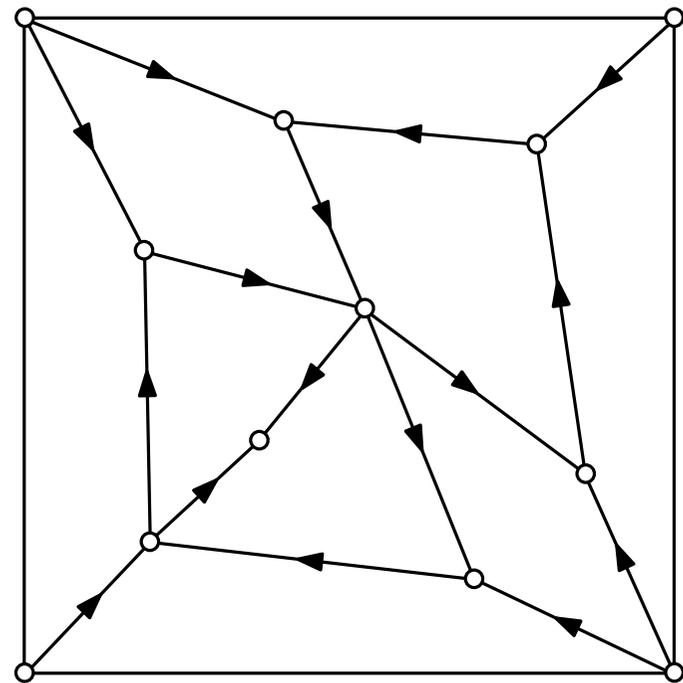
[de Fraysseix, Ossona de Mendez'01]:

Une quadrangulation est simple ssi elle admet une 2-orientation.

Toute 2-orientation est accessible depuis le bord externe



une quadrangulation simple

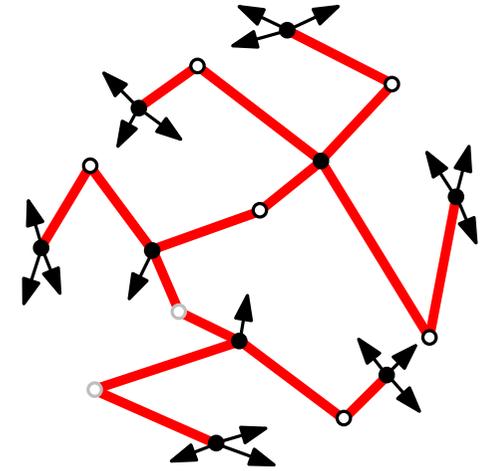
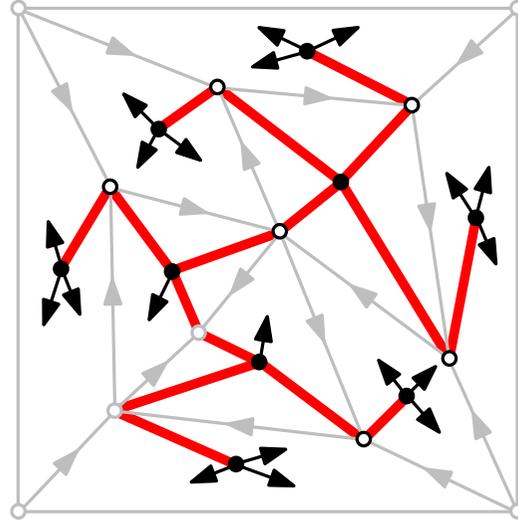
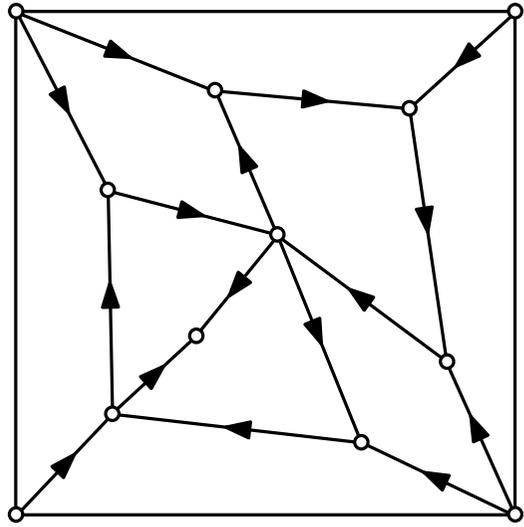


munie d'une 2-orientation

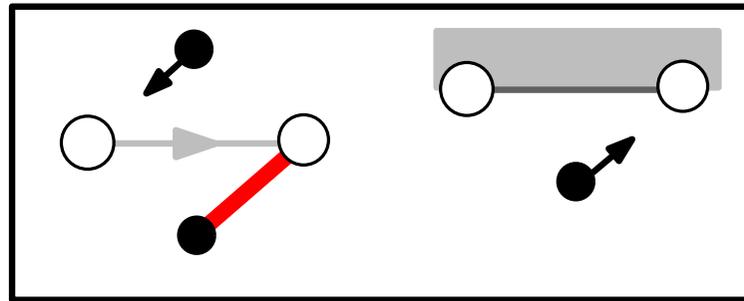
Preuve existence : (i) algorithme itératif OU (ii) critère général d'existence de α -orientations + tout graphe planaire $G = (V, E)$ biparti a $|E| \leq 2|V| - 4$

Bijection pour les quadrangulations simples

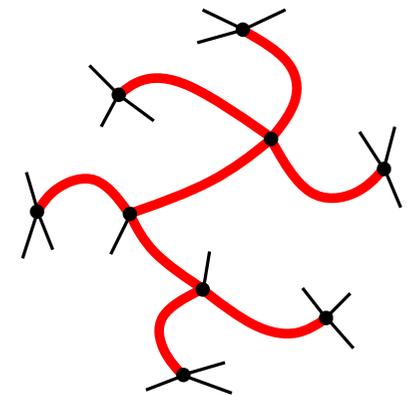
- On applique la méta-bijection Φ à toute quadrangulation simple munie de sa 2-orientation minimale (qui est dans \mathcal{O}_{-4})



tout \circ a 2 entrantes
toute face a degré 4

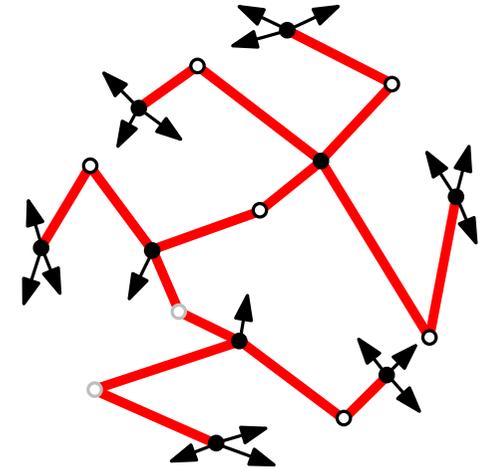
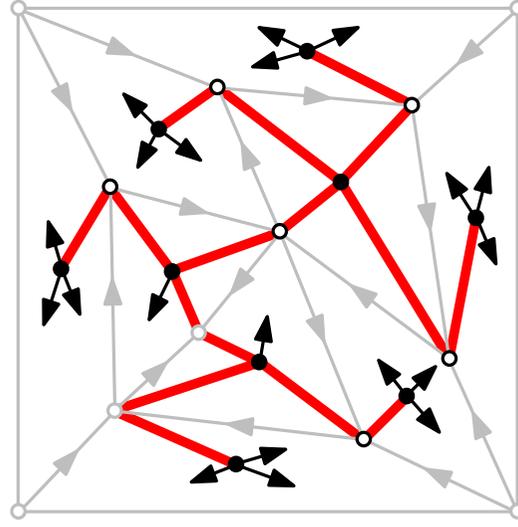
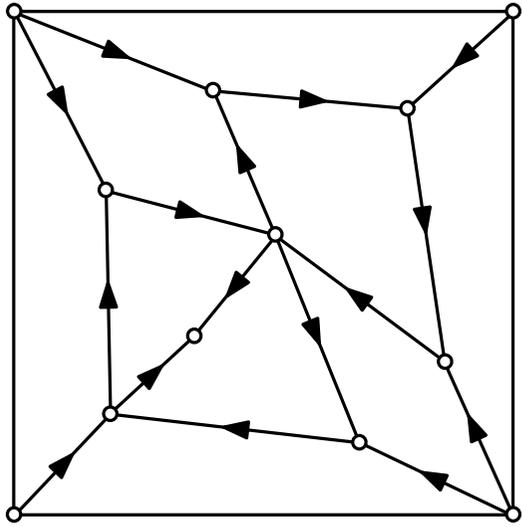


tout \circ a degré 2
tout \bullet a degré 4
(\simeq arbre ternaire non enraciné)

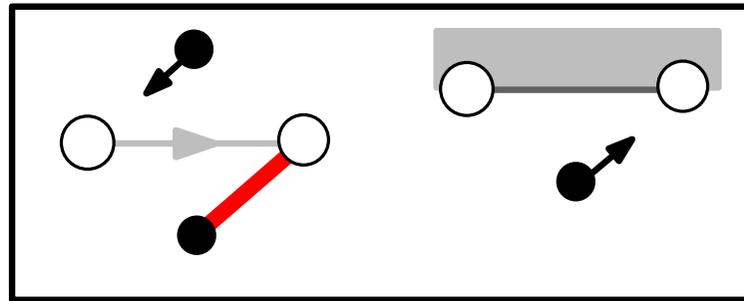


Bijection pour les quadrangulations simples

- On applique la méta-bijection Φ à toute quadrangulation simple munie de sa 2-orientation minimale (qui est dans \mathcal{O}_{-4})

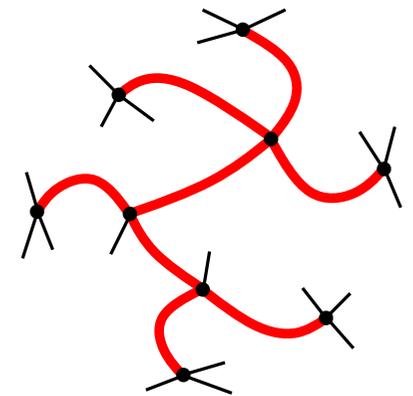


tout \circ a 2 entrantes
toute face a degré 4



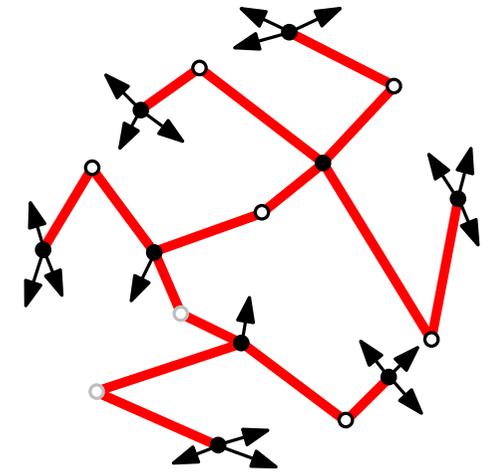
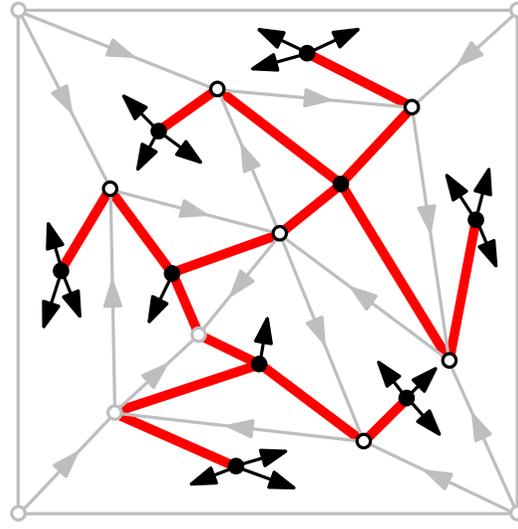
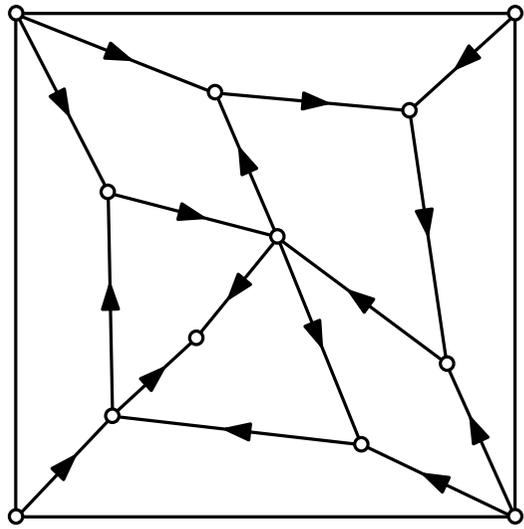
tout \circ a degré 2
tout \bullet a degré 4
(\simeq arbre ternaire
non enraciné)

- On retrouve une bijection dans [Schaeffer'99]

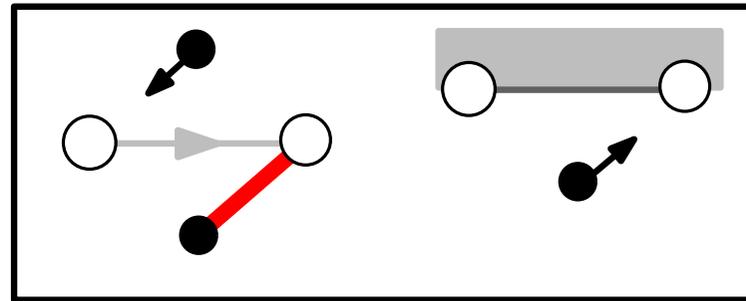


Bijection pour les quadrangulations simples

- On applique la méta-bijection Φ à toute quadrangulation simple munie de sa 2-orientation minimale (qui est dans \mathcal{O}_{-4})

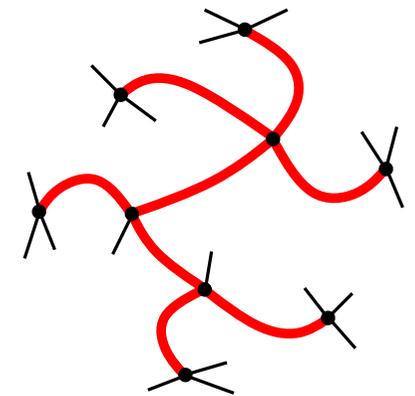


tout \circ a 2 entrantes
toute face a degré 4



tout \circ a degré 2
tout \bullet a degré 4
(\simeq arbre ternaire non enraciné)

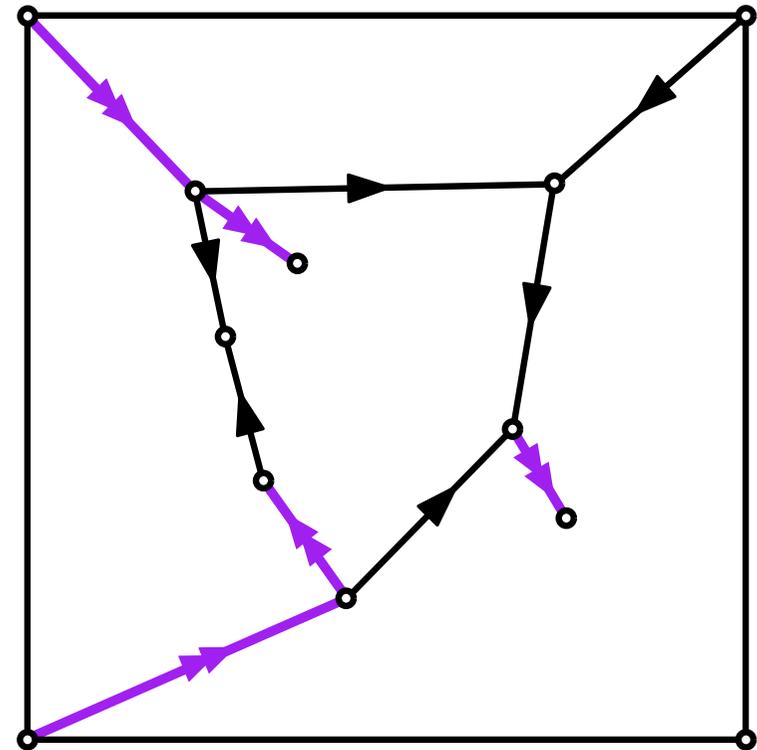
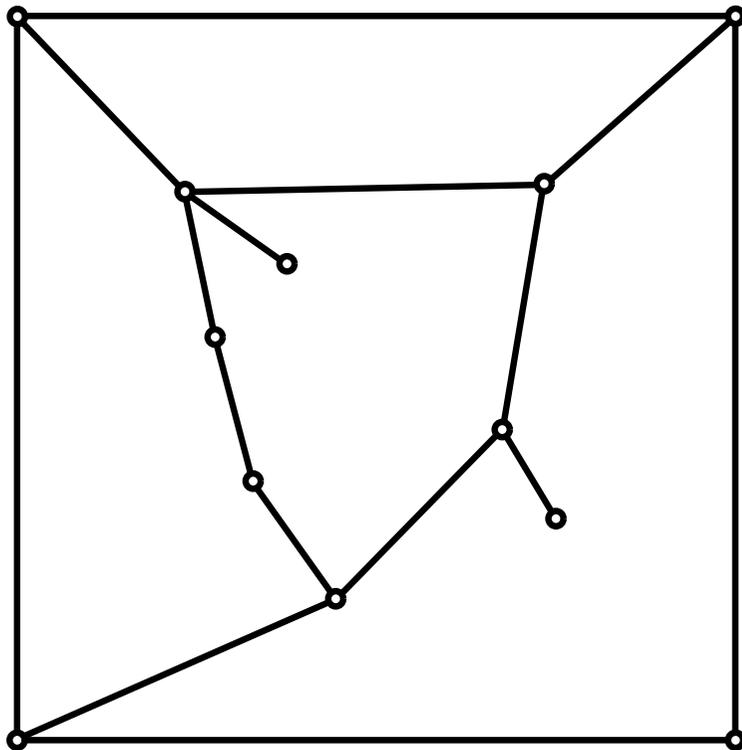
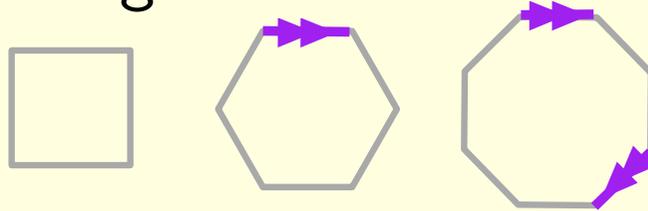
- On retrouve une bijection dans [Schaeffer'99]
- bijection $\Rightarrow \frac{4(3n)!}{n!(2n+2)!}$ quadrangulations simples enracinées avec $n + 1$ faces



Extension aux cartes biparties simples

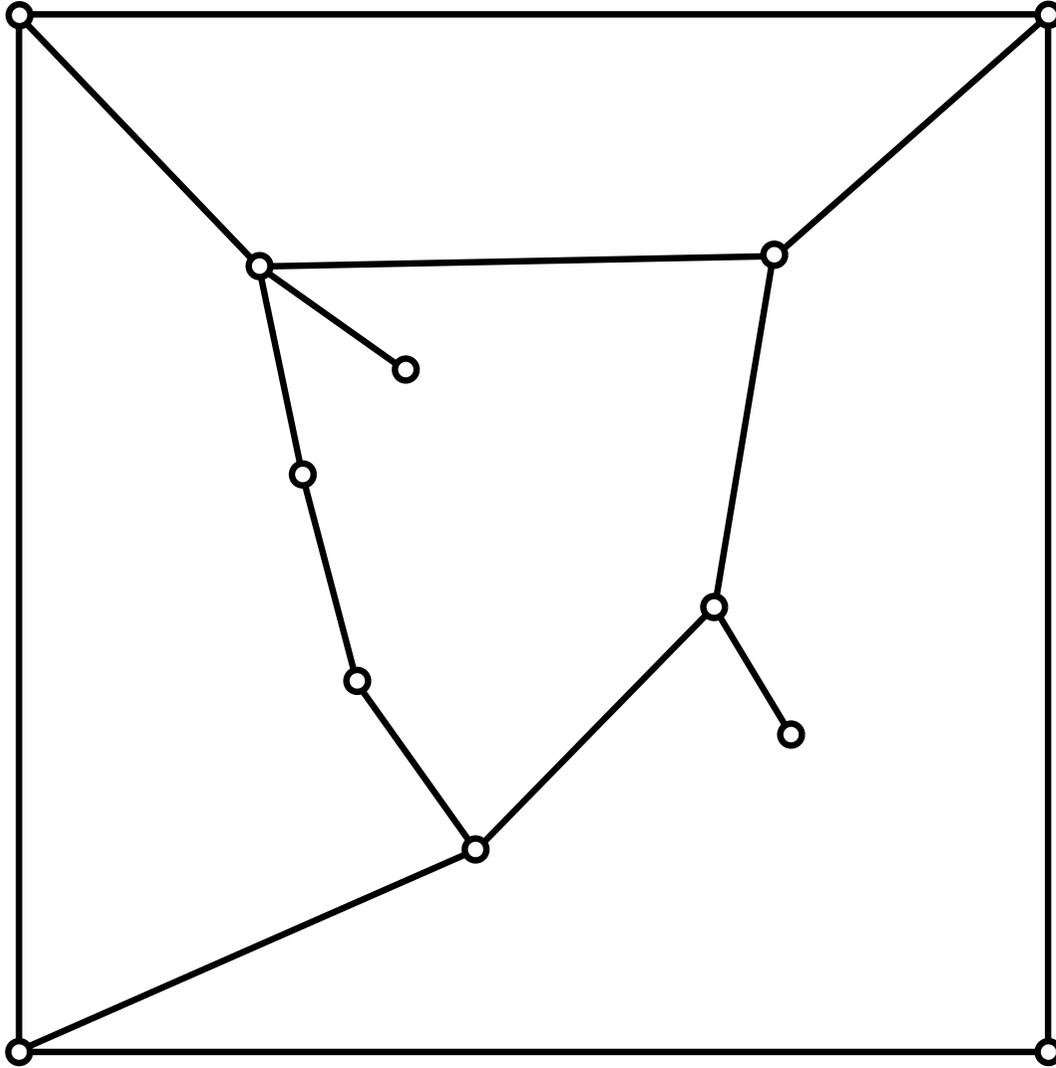
Soit M une **carte bipartie simple de degré externe 4**. Alors M a une unique orientation dans \mathcal{O}_{-4} tel que

- chaque arête compte simple  ou double 
- chaque sommet interne a degré entrant 2
- chaque face interne de degré $2i$ a $i - 2$ arêtes "comptant double" dans le sens horaire



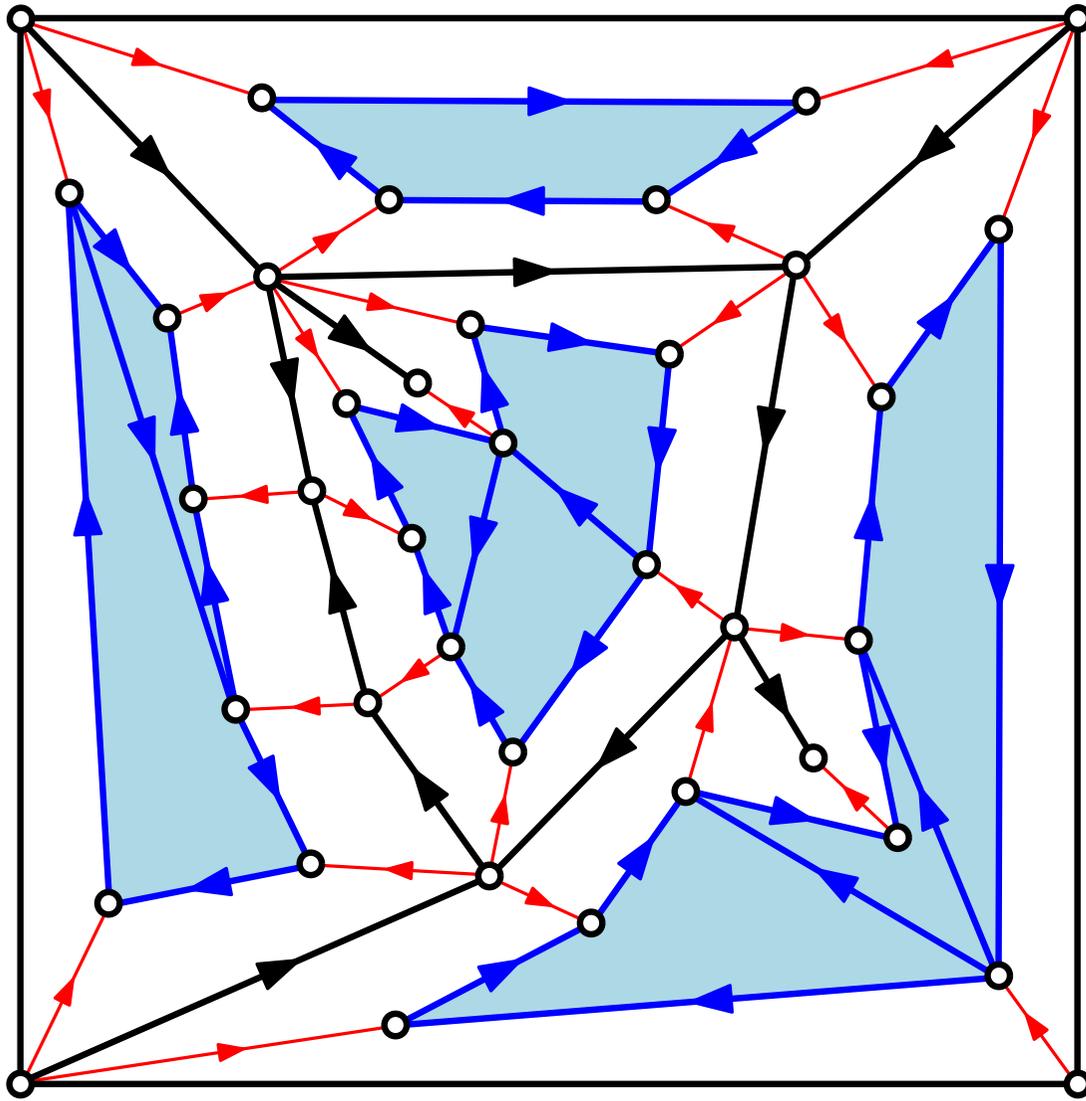
Extension aux cartes biparties simples

Comment on calcule cette orientation

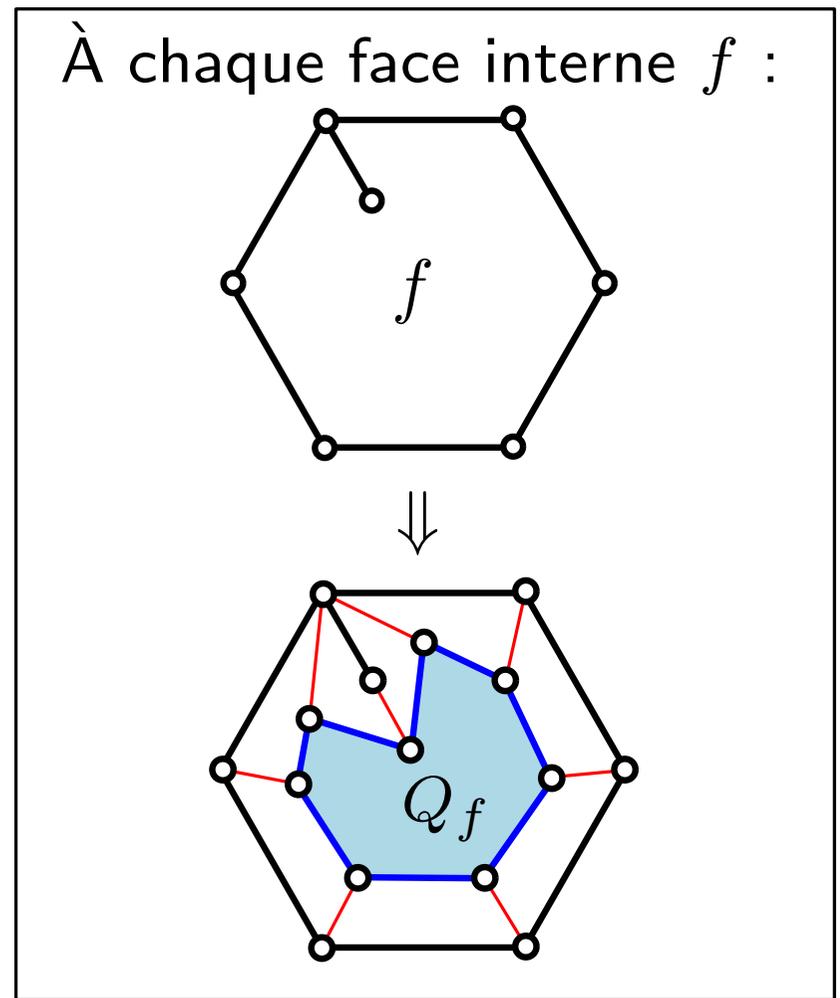


Extension aux cartes biparties simples

Comment on calcule cette orientation

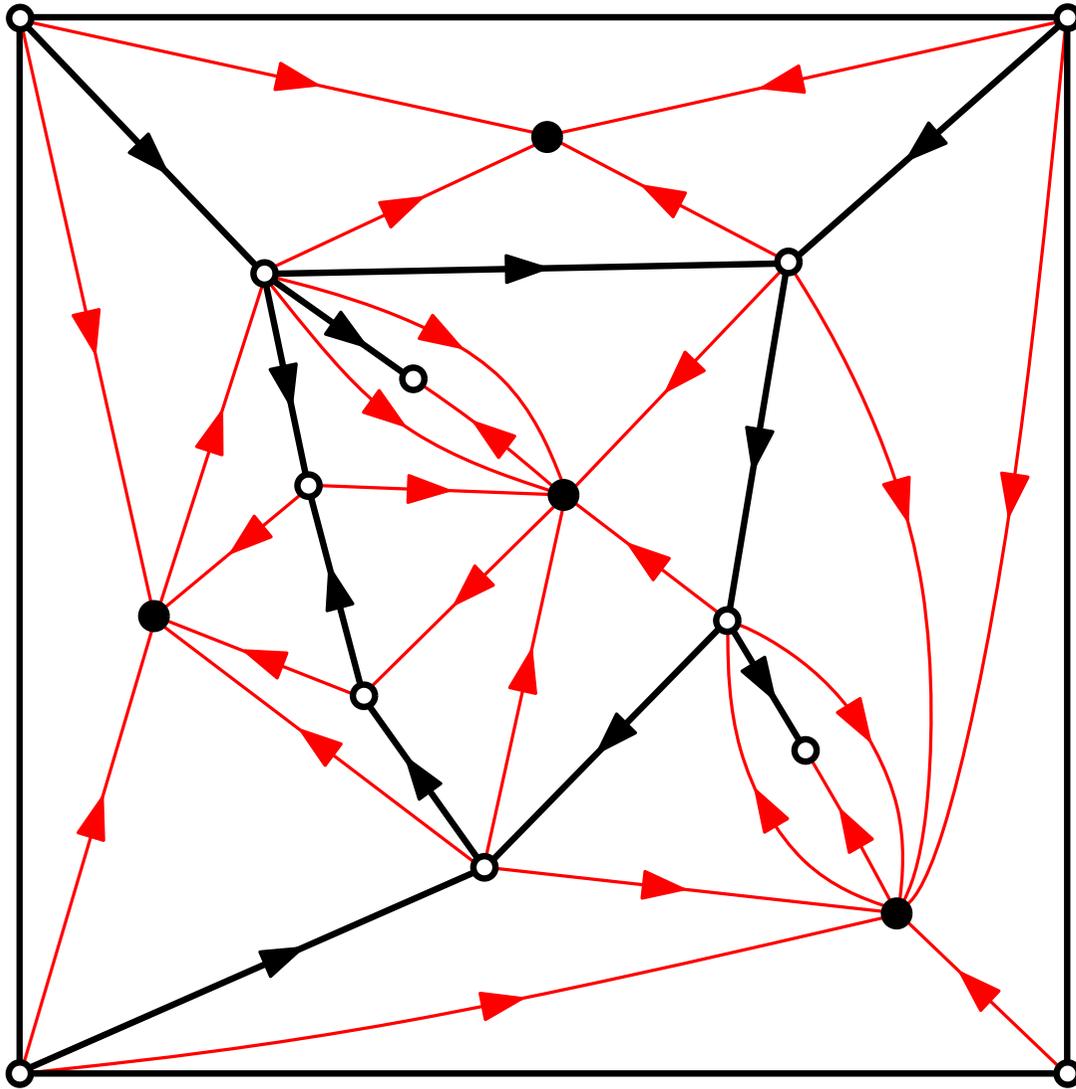


On complète en une quadrangulation simple munie d'une 2-orientation

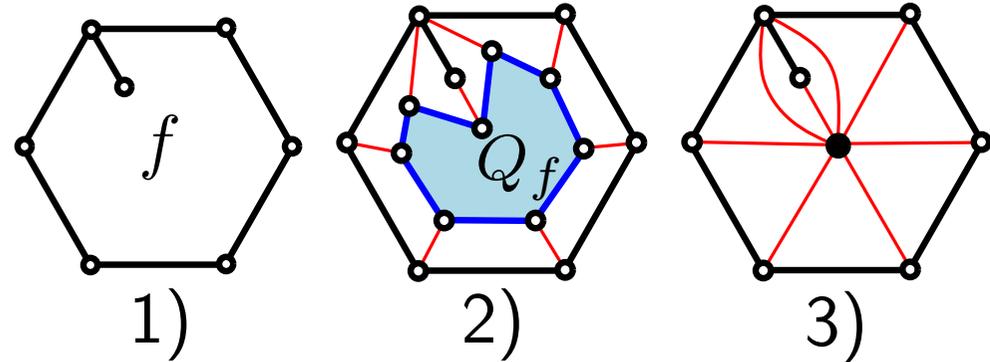


Extension aux cartes biparties simples

Comment on calcule cette orientation



contraction en un sommet noir dans chaque face interne

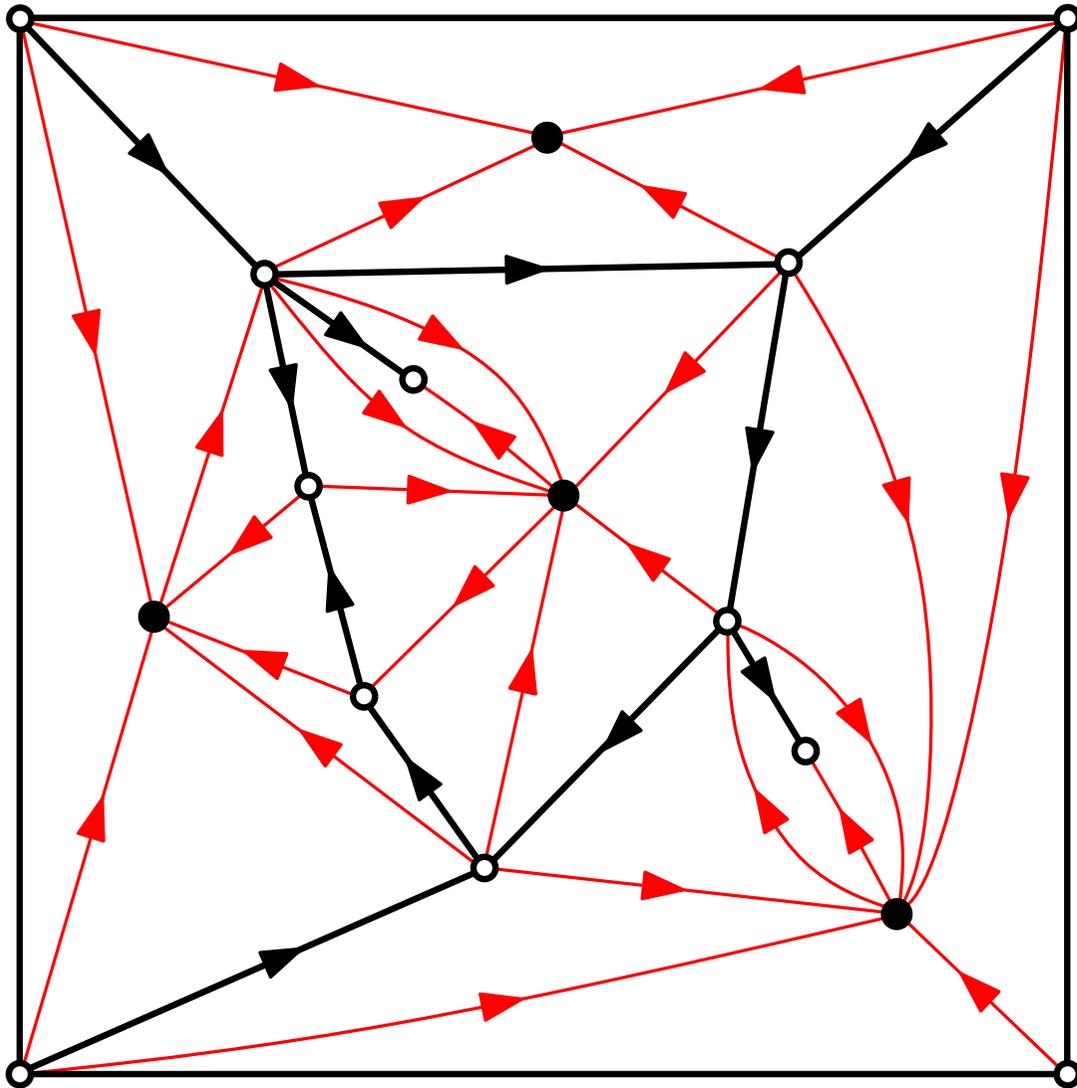


on obtient une α -orientation

- si v est blanc, $\alpha(v) = 2$
- si v est noir de degré $2i$,
 $\alpha(v) = i + 2$

Extension aux cartes biparties simples

Comment on calcule cette orientation



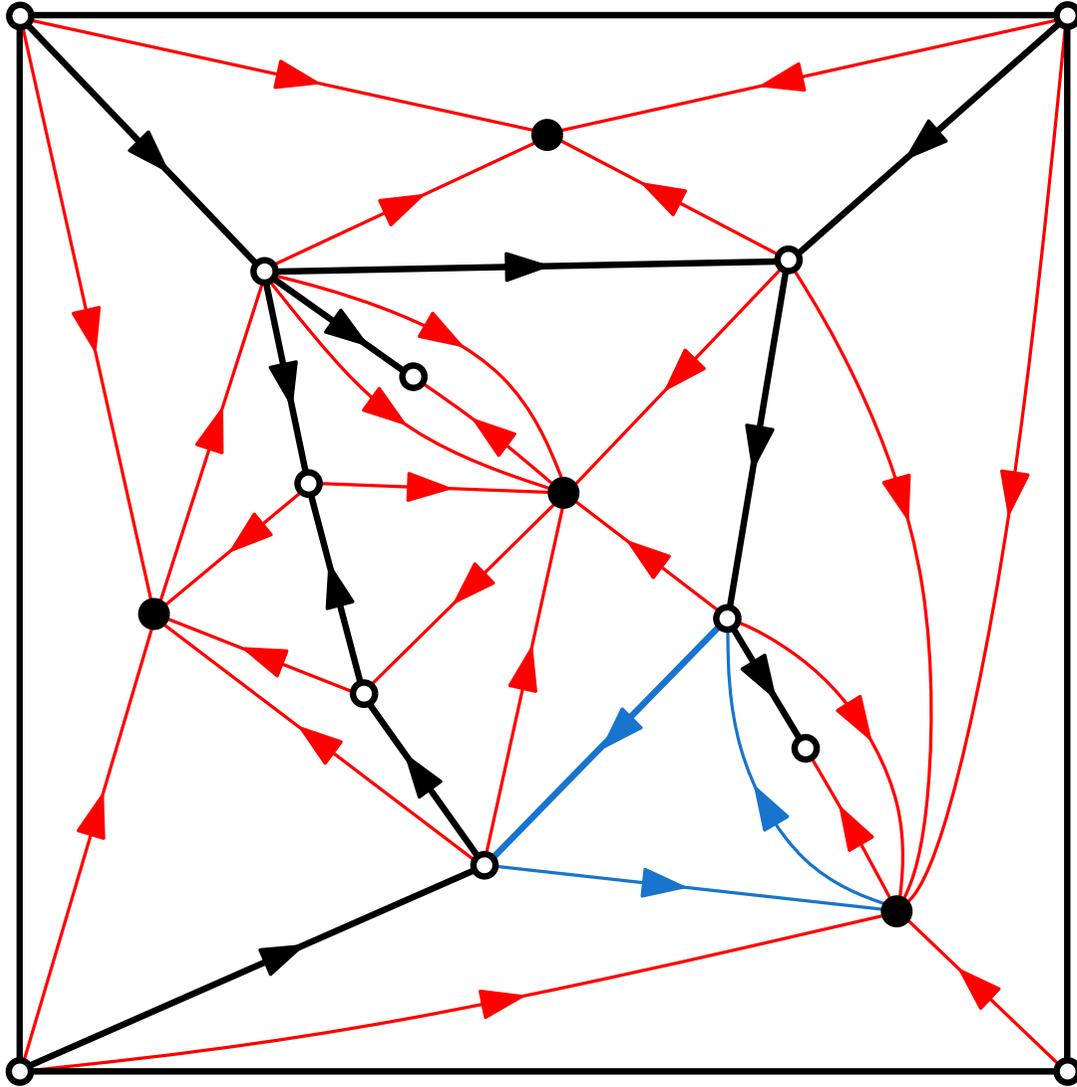
on obtient une α -orientation

- si v est blanc, $\alpha(v) = 2$
- si v est noir de degré $2i$,
 $\alpha(v) = i + 2$

on prend la α -orientation minimale

Extension aux cartes biparties simples

Comment on calcule cette orientation



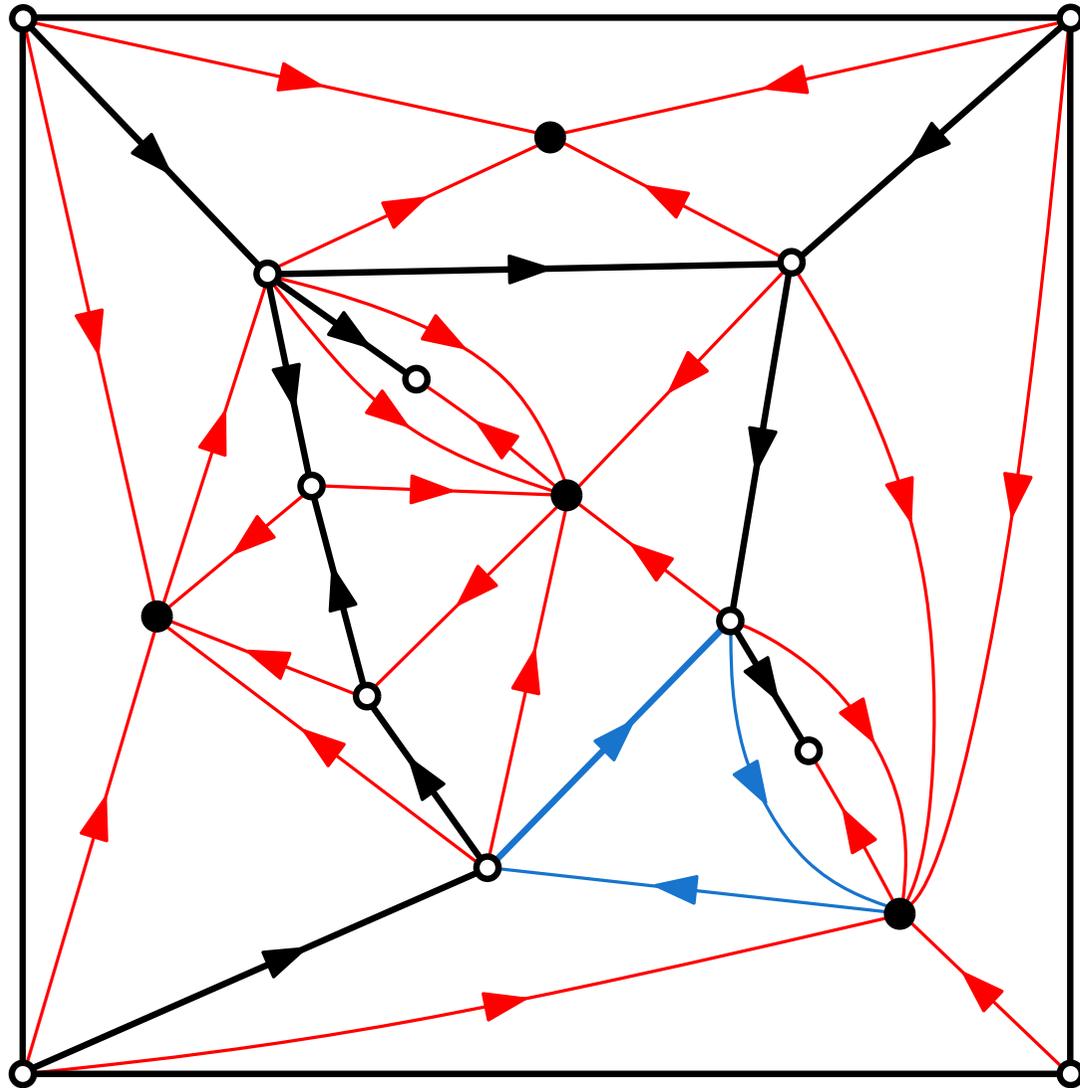
on obtient une α -orientation

- si v est blanc, $\alpha(v) = 2$
- si v est noir de degré $2i$,
 $\alpha(v) = i + 2$

on prend la α -orientation minimale

Extension aux cartes biparties simples

Comment on calcule cette orientation



on obtient une α -orientation

- si v est blanc, $\alpha(v) = 2$

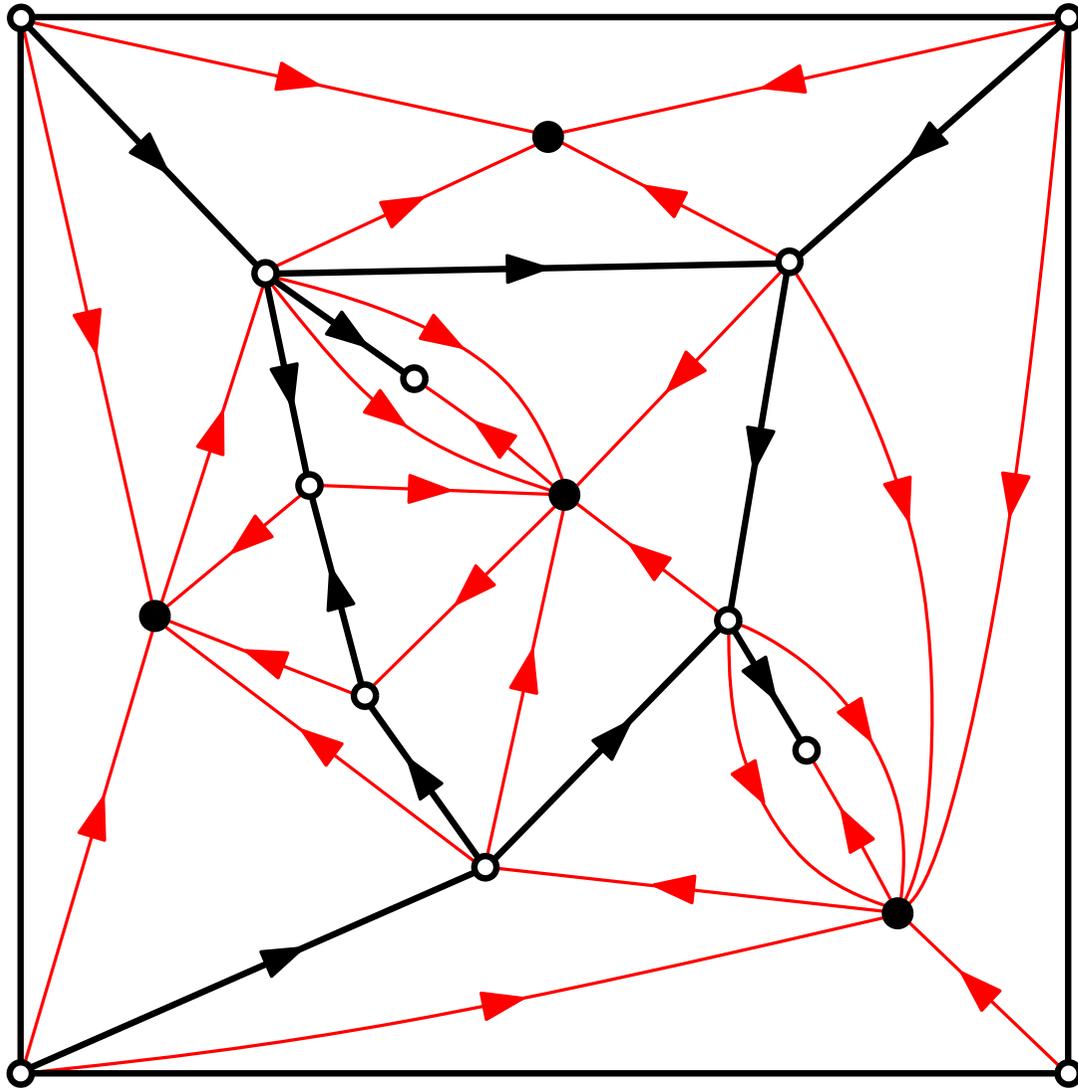
- si v est noir de degré $2i$,

$$\alpha(v) = i + 2$$

on prend la α -orientation minimale

Extension aux cartes biparties simples

Comment on calcule cette orientation



on obtient une α -orientation

- si v est blanc, $\alpha(v) = 2$

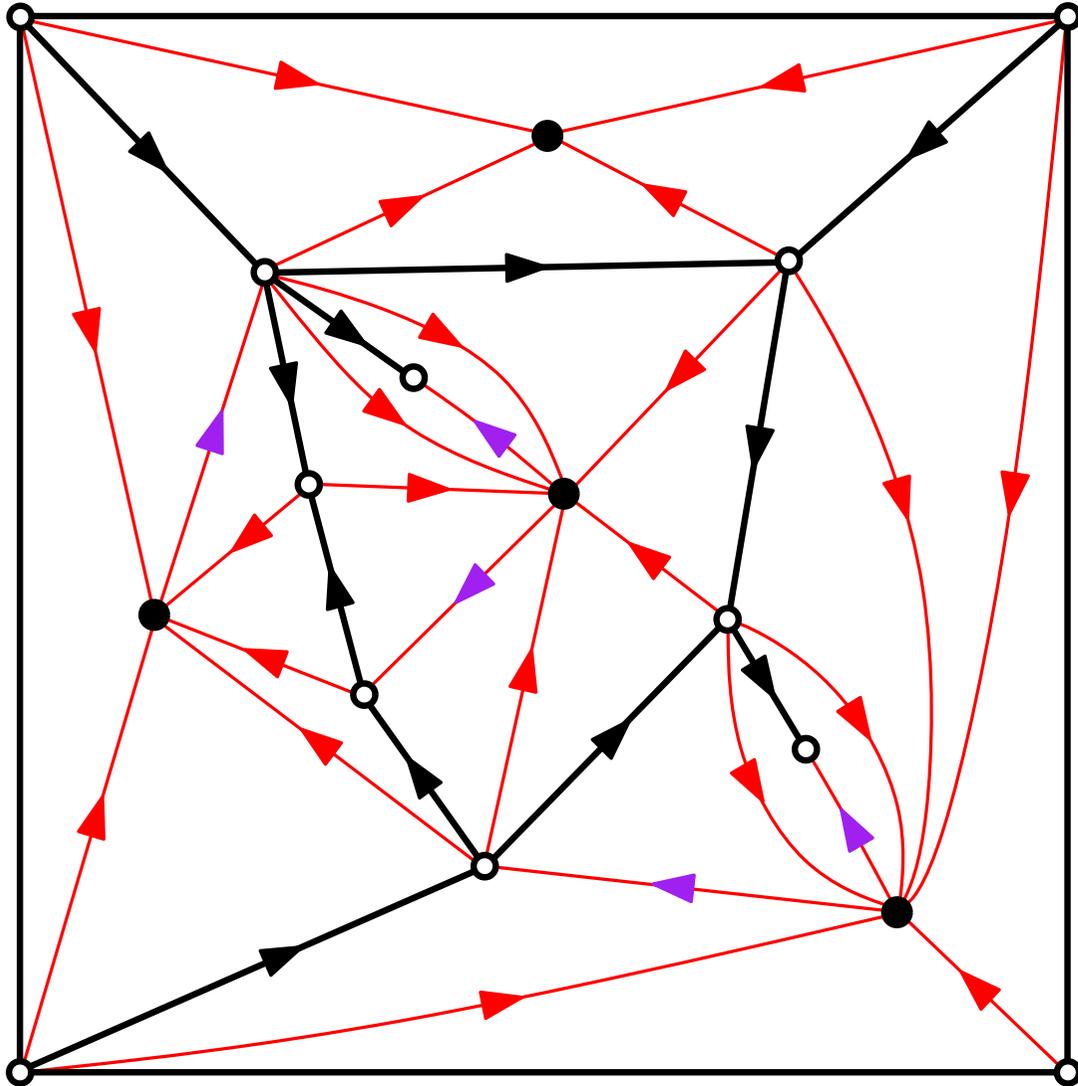
- si v est noir de degré $2i$,

$$\alpha(v) = i + 2$$

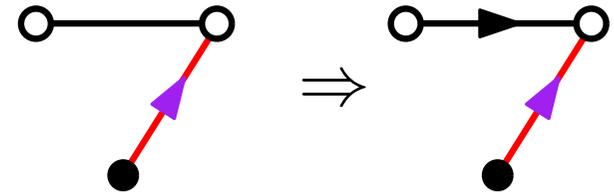
on prend la α -orientation minimale

Extension aux cartes biparties simples

Comment on calcule cette orientation

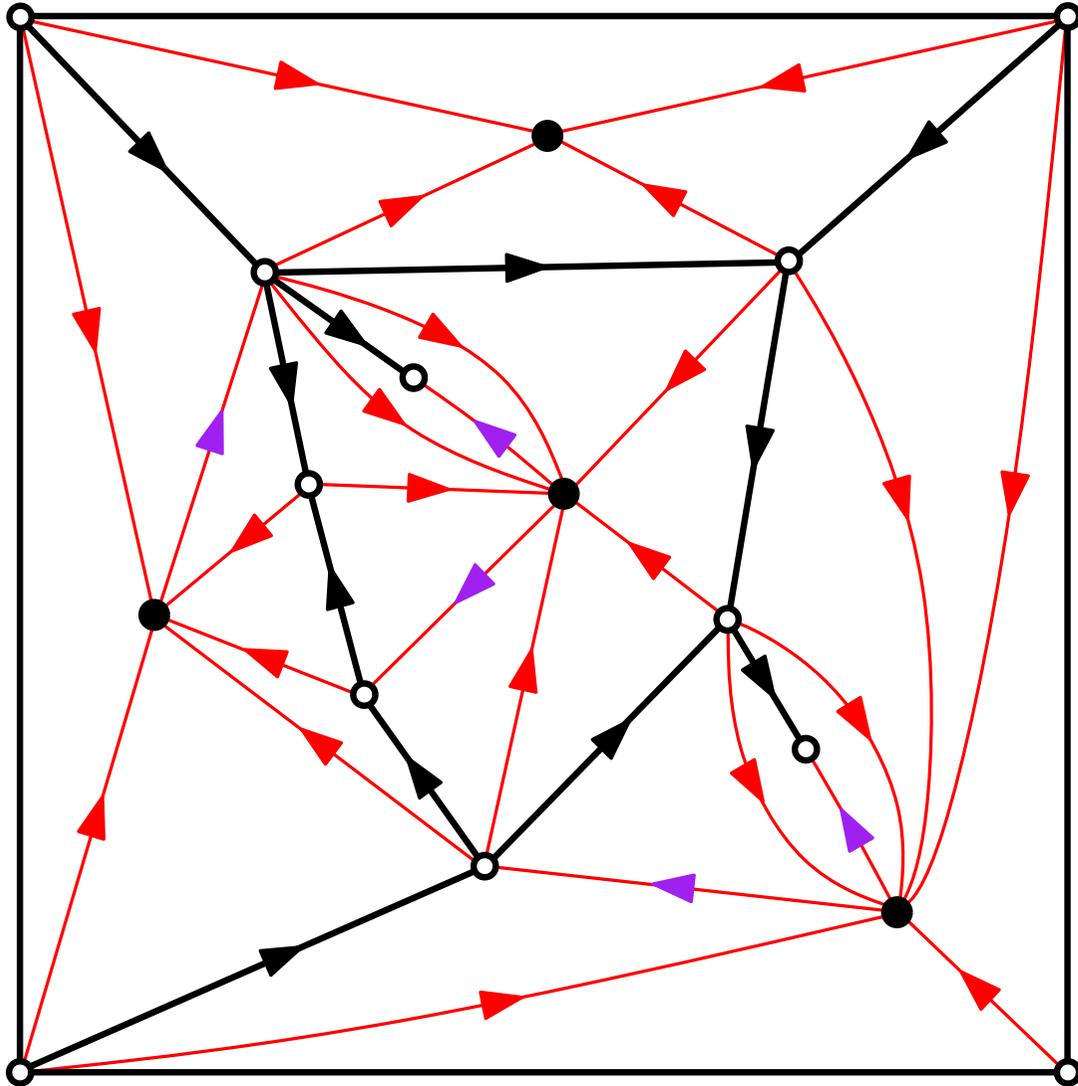


On a la propriété locale :

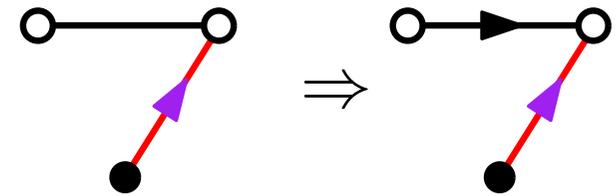


Extension aux cartes biparties simples

Comment on calcule cette orientation



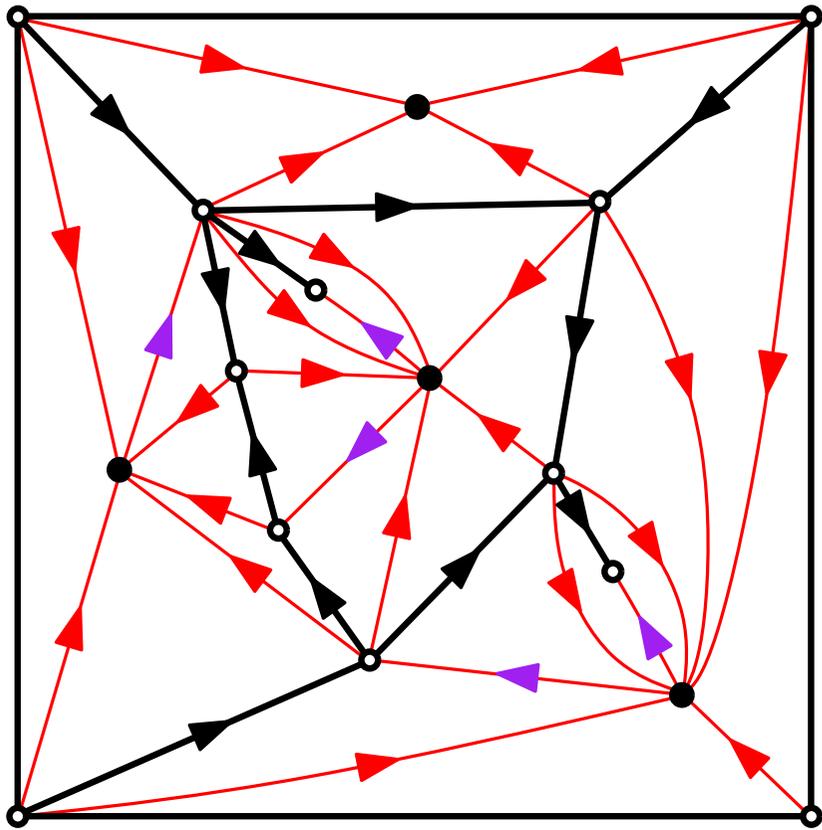
On a la propriété locale :



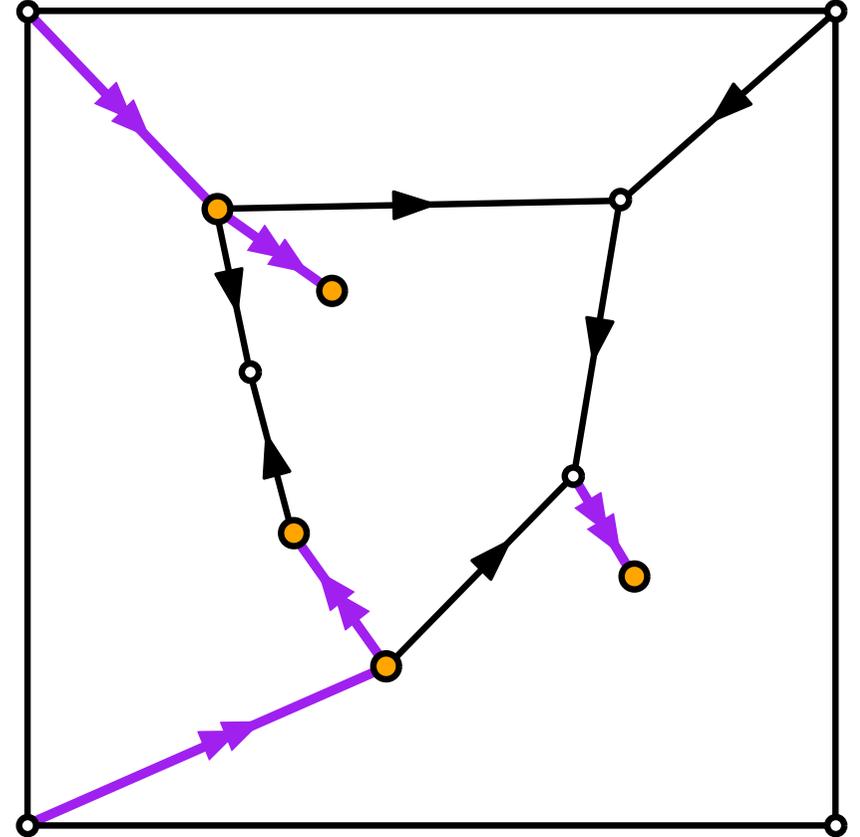
il y a $i - 2$ telles arêtes pour tout sommet noir de degré $2i$

Extension aux cartes biparties simples

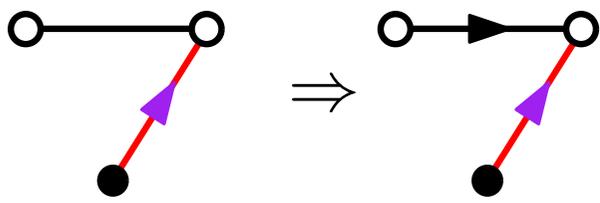
Comment on calcule cette orientation



→
orientation induite



On a la propriété locale :



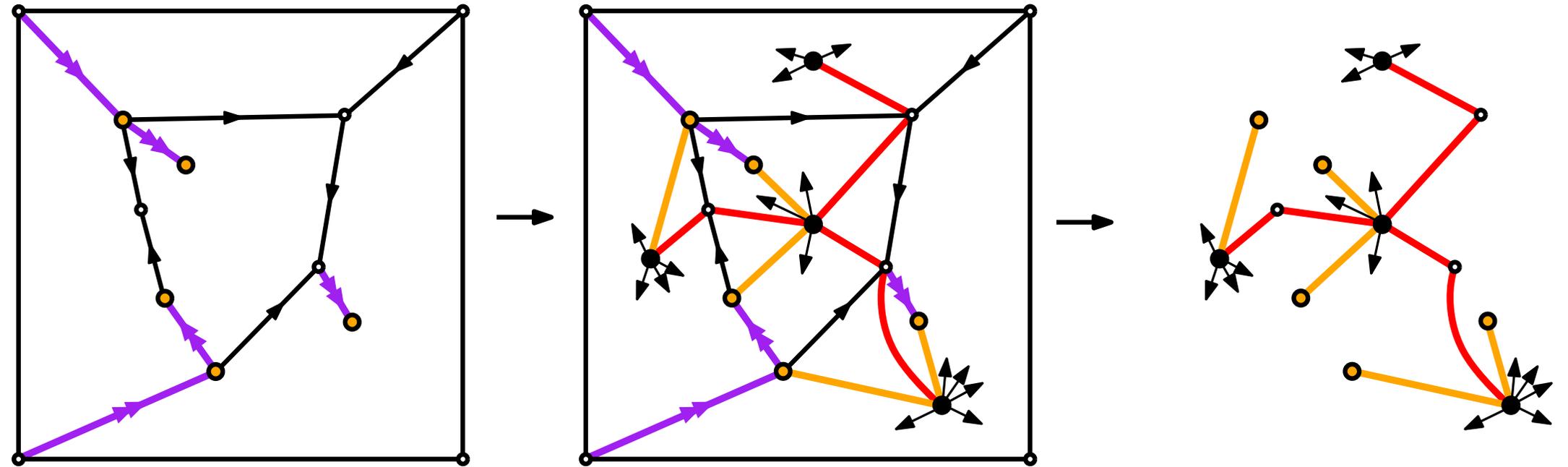
il y a $i - 2$ telles arêtes pour tout sommet noir de degré $2i$



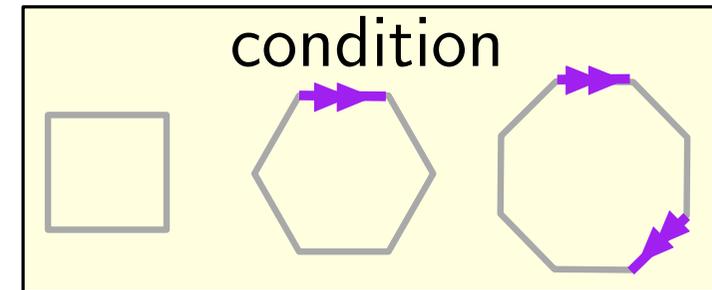
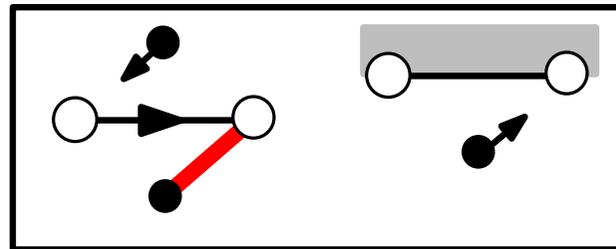
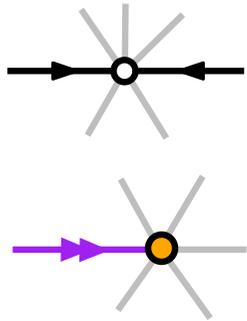
chaque face de degré $2i$
a $i - 2$ arêtes $\circ \rightarrow \circ$ en sens horaire

Extension aux cartes biparties simples

On applique la méta-bijection Φ à l'orientation canonique (dans \mathcal{O}_{-4})



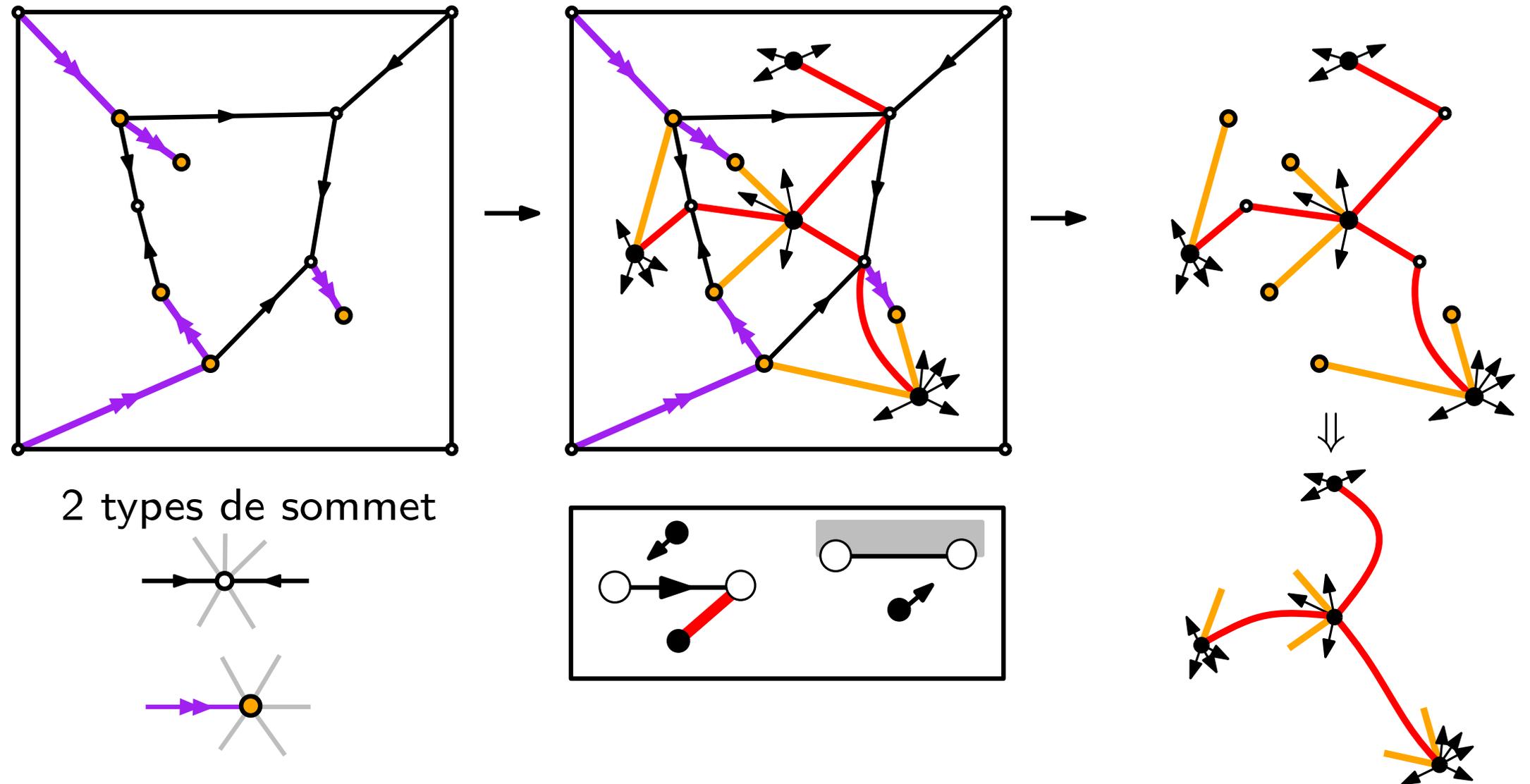
2 types de sommet



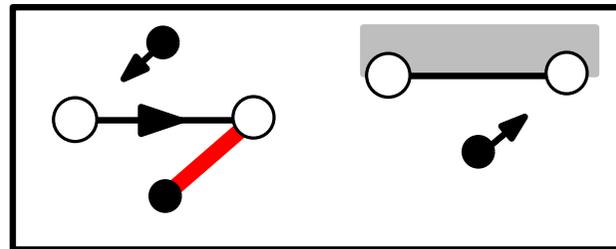
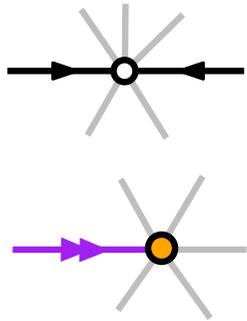
chaque \bullet de degré $2a$
porte $a-2$ pattes oranges

Extension aux cartes biparties simples

On applique la méta-bijection Φ à l'orientation canonique (dans \mathcal{O}_{-4})



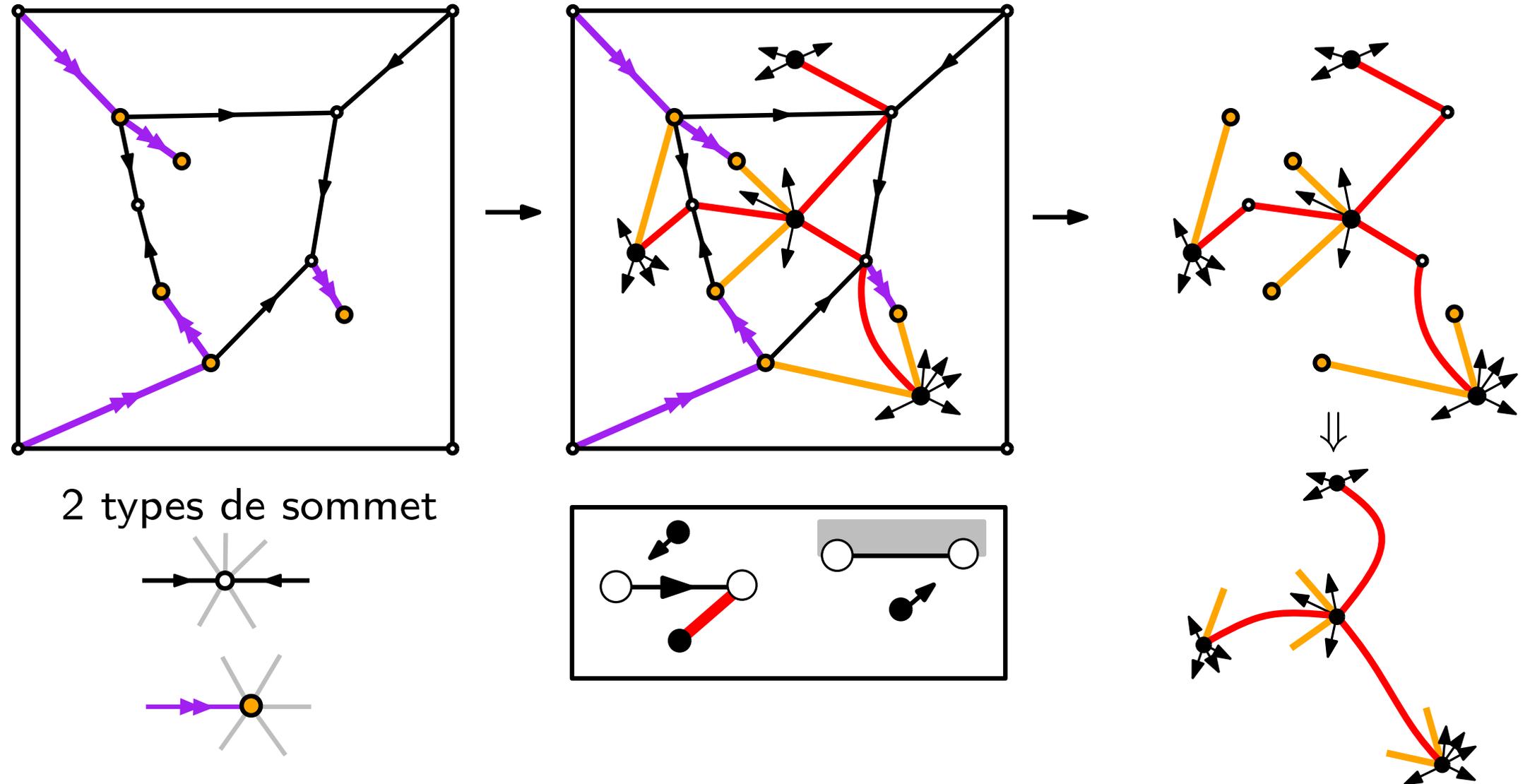
2 types de sommet



chaque \bullet de degré $2a$
porte $a-2$ pattes oranges

Extension aux cartes biparties simples

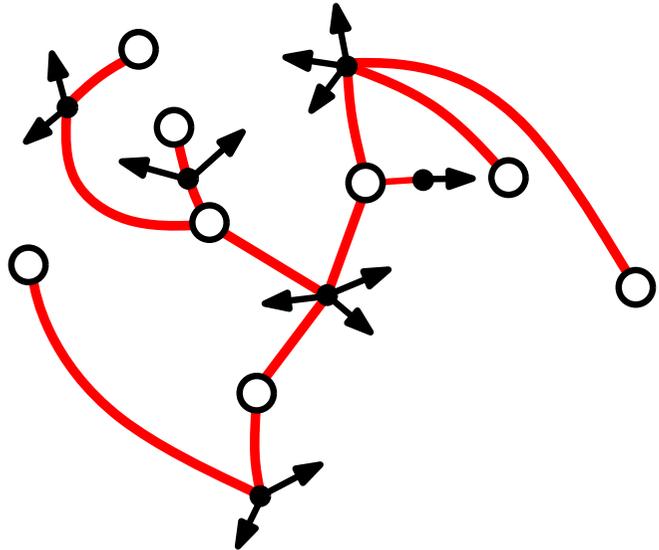
On applique la méta-bijection Φ à l'orientation canonique (dans \mathcal{O}_{-4})



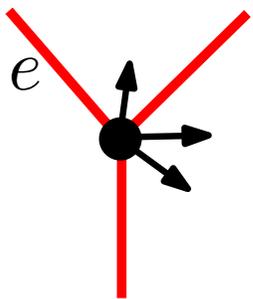
Bijection \Rightarrow formule des slicings pour cartes simple, **pour le cas $\ell_1 = 4$**
 (on prouve le cas général en considérant des cartes à deux faces marquées)

Comparaison des 2 familles de mobiles

Cas biparti



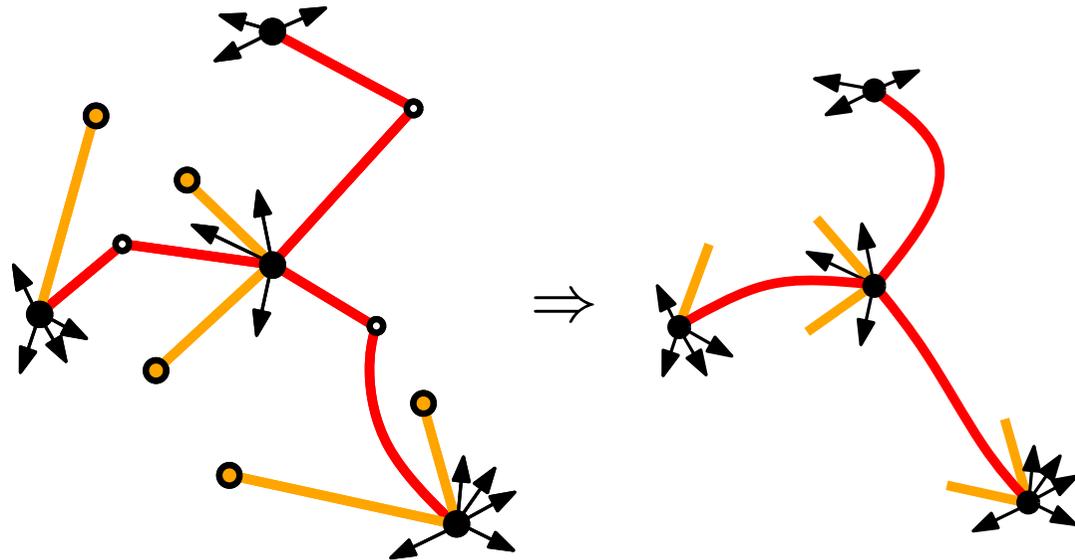
chaque \bullet de degré $2a$
porte a bourgeons



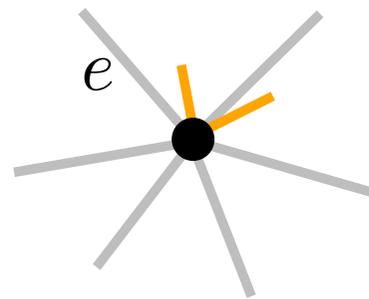
$\binom{2a-1}{a-1}$ choix pour placer
les bourgeons

$$|\mathcal{A}[2a_1, \dots, 2a_r]| = \frac{(v+r-3)!}{v!} \prod_{i=1}^r 2a_i \binom{2a_i-1}{a_i-1}$$

Cas biparti simple



chaque \bullet de degré $2a$
porte $a-2$ pattes oranges



$\binom{2a-1}{a-2}$ choix pour placer
les pattes oranges

$$|\mathcal{S}[2a_1, \dots, 2a_r]| = \frac{(e+r-3)!}{e!} \prod_{i=1}^r 2a_i \binom{2a_i-1}{a_i-2}$$

**Extension de la méta-bijection aux
cartes à bords et application aux
quadrangulations à bords**

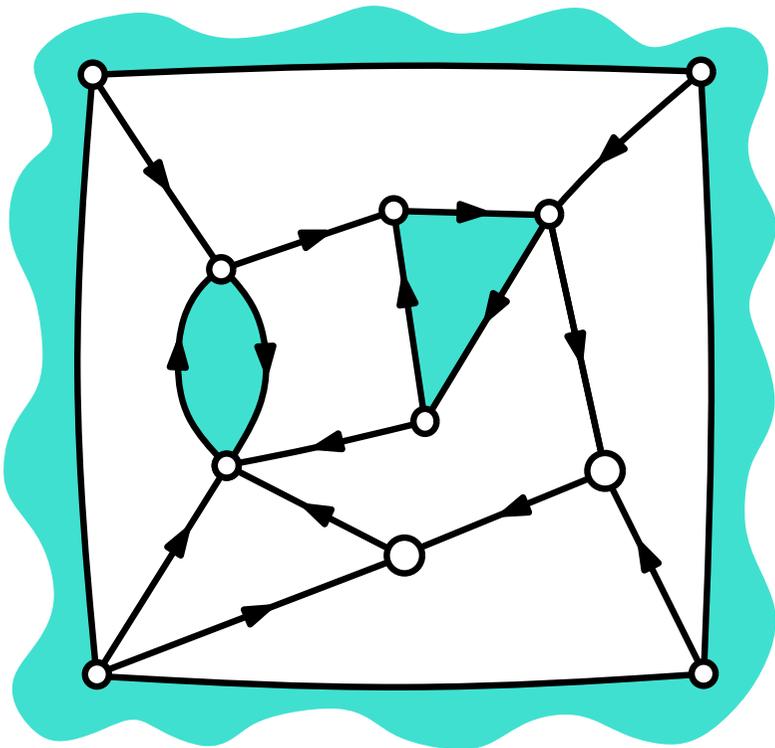
Orientations pour les cartes à bords

Pour les cartes à bords (contour externe est un bord) on considère les mêmes orientations que précédemment (famille \mathcal{O}_{-d}) :

- le d -gone externe est une **source** (n'a que des arêtes sortantes)
- tout sommet est **atteignable** par un chemin dirigé partant de la source
- **pas de cycle anti-horaire**

avec la condition supplémentaire

- tout **bord interne est un cycle horaire**



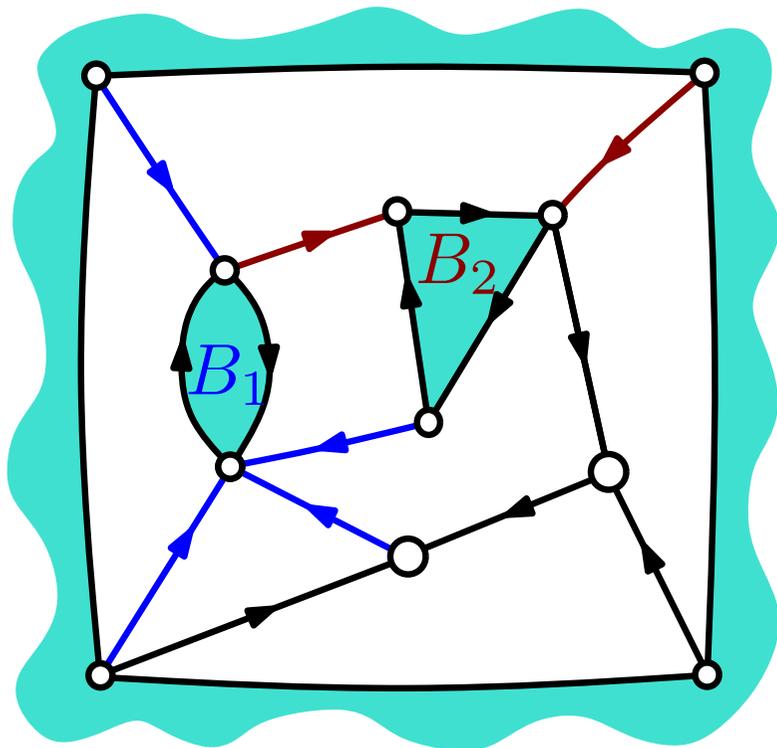
Orientations pour les cartes à bords

Pour les cartes à bords (contour externe est un bord) on considère les mêmes orientations que précédemment (famille \mathcal{O}_{-d}) :

- le d -gone externe est une **source** (n'a que des arêtes sortantes)
- tout sommet est **atteignable** par un chemin dirigé partant de la source
- **pas de cycle anti-horaire**

avec la condition supplémentaire

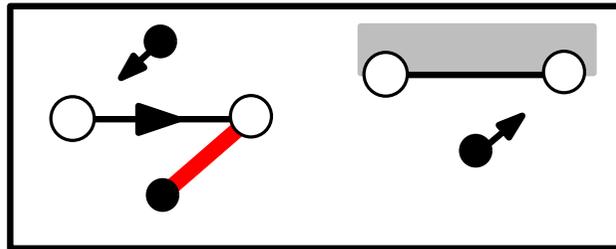
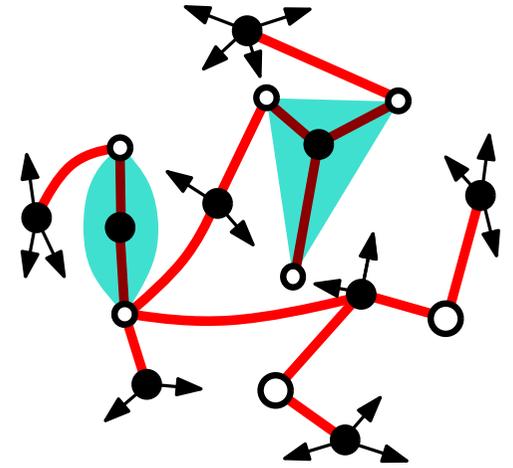
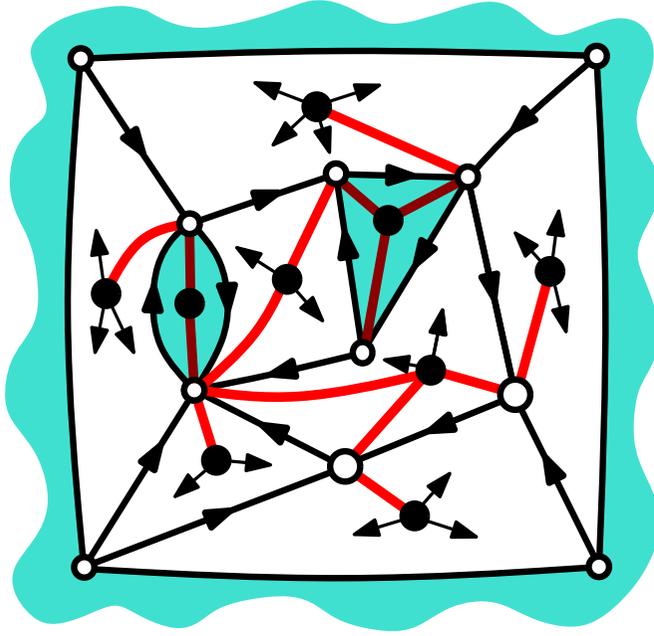
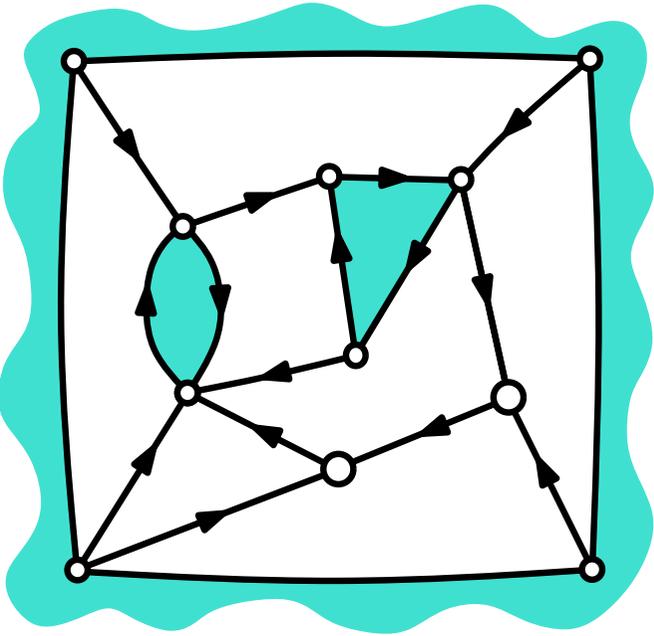
- tout **bord interne est un cycle horaire**



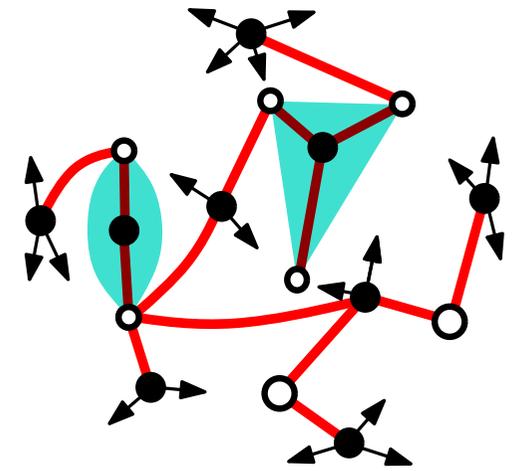
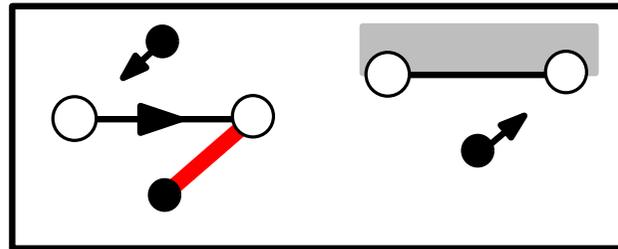
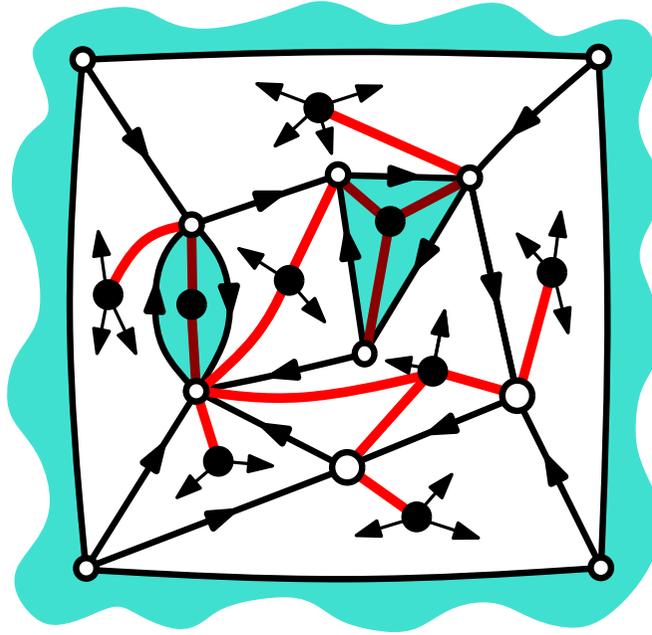
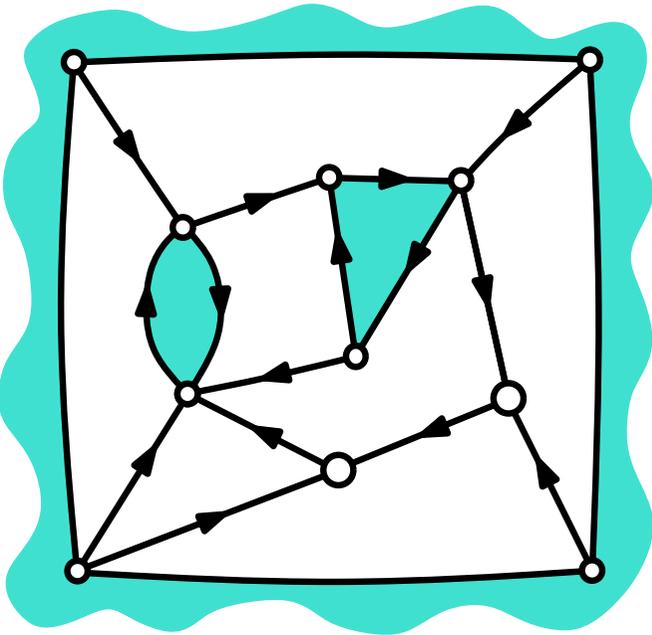
degré entrant d'un bord B :
nombre total d'arêtes vers B

B_1 a 4 entrantes
 B_2 a 2 entrantes

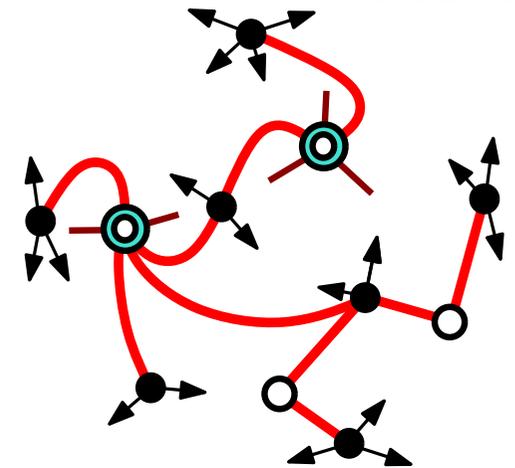
Extension de la méta-bijection à ce cadre



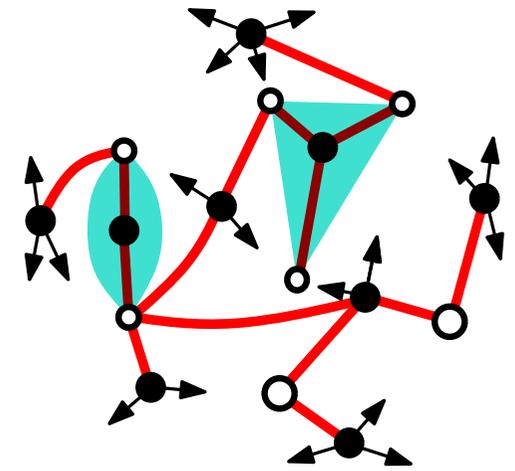
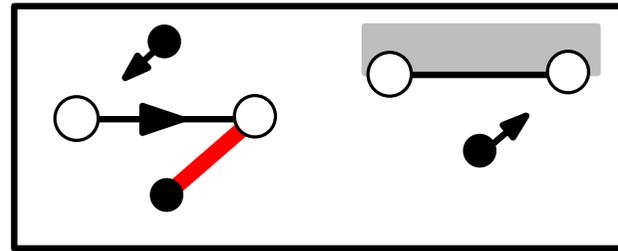
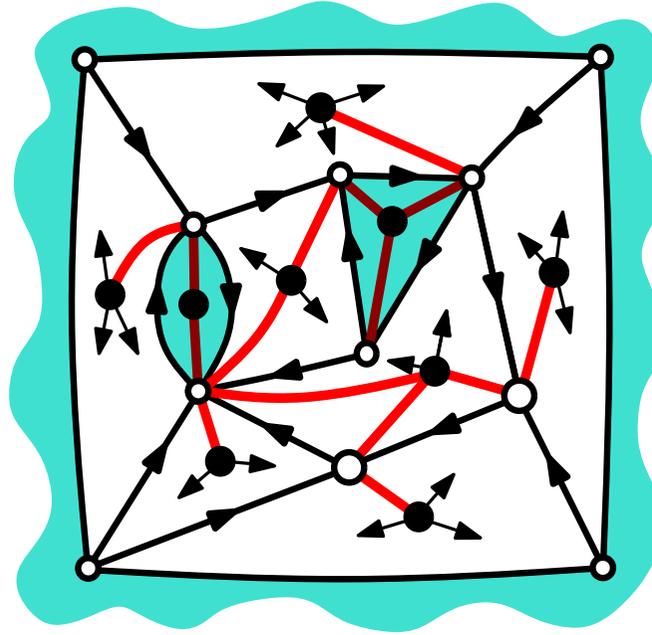
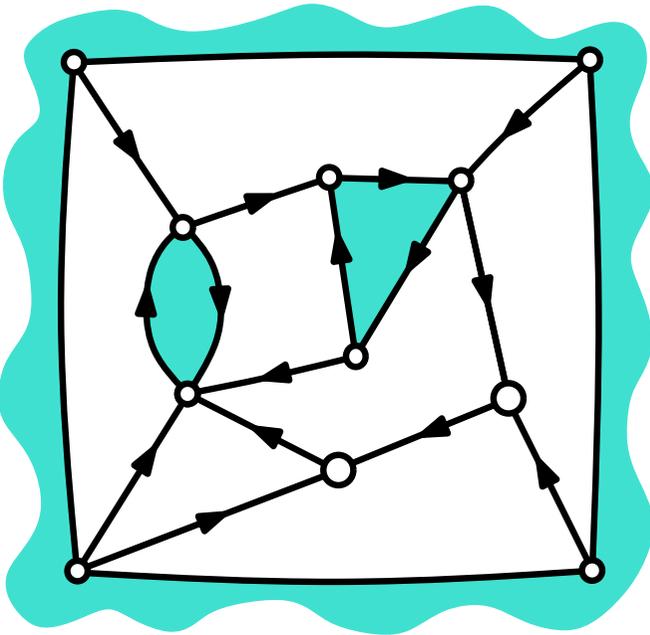
Extension de la méta-bijection à ce cadre



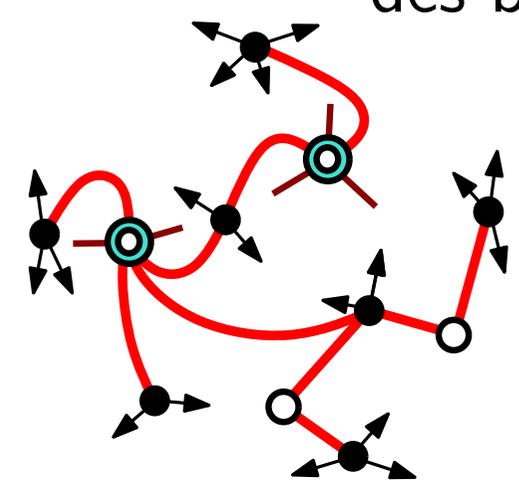
⇓ contraction
des bords



Extension de la méta-bijection à ce cadre



contraction
des bords



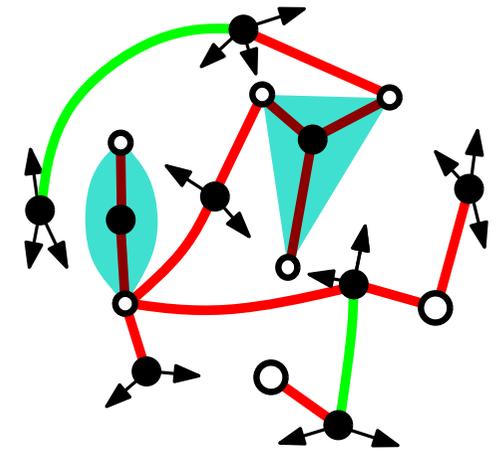
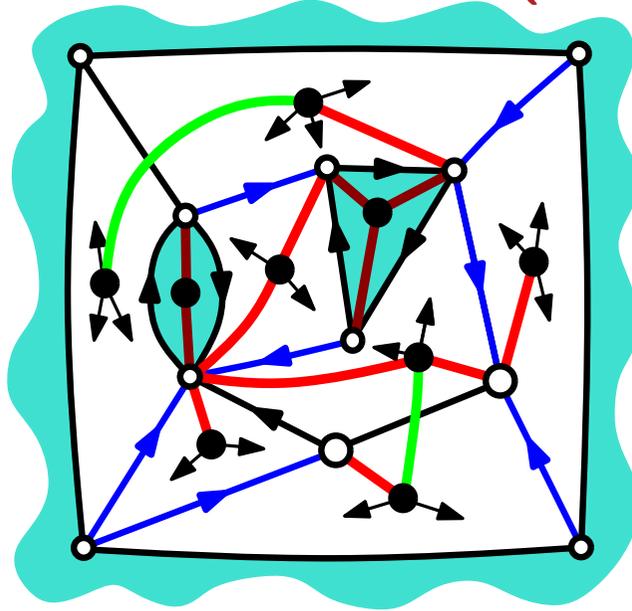
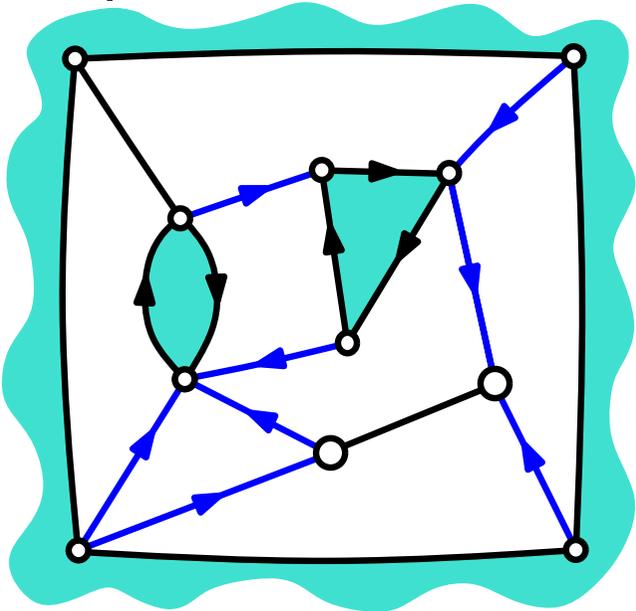
sommet \circ à k entrantes
 bord interne $\left\{ \begin{array}{l} \text{degré } r \\ b \text{ entrantes} \end{array} \right.$
 face interne degré p



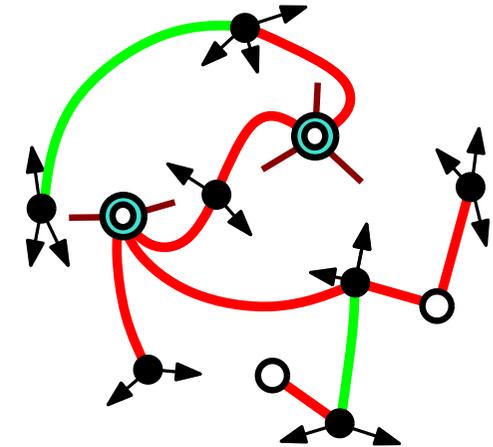
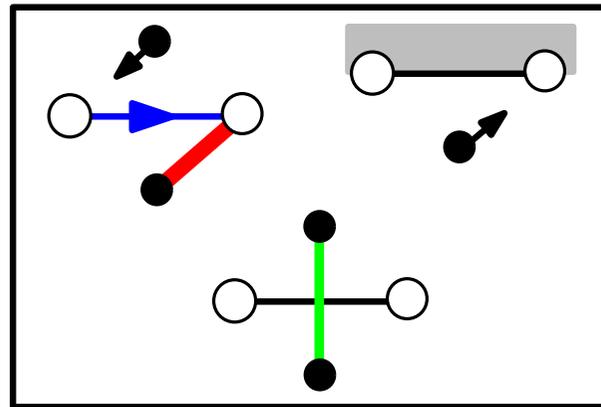
sommet \circ de degré k
 sommet \odot $\left\{ \begin{array}{l} r \text{ pattes} \\ b \text{ voisins} \end{array} \right.$
 sommet \bullet de degré p

Extension de la méta-bijection à ce cadre

On peut aussi autoriser d'avoir des **arêtes (internes) non orientées**



⇓ contraction des bords



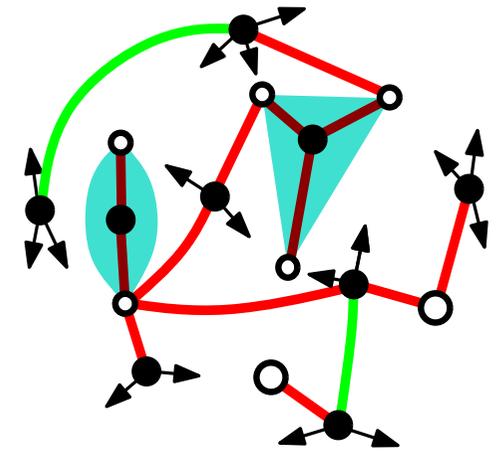
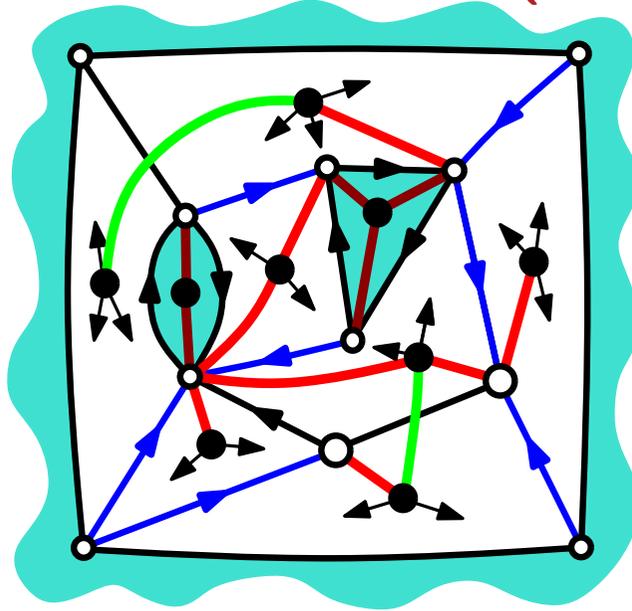
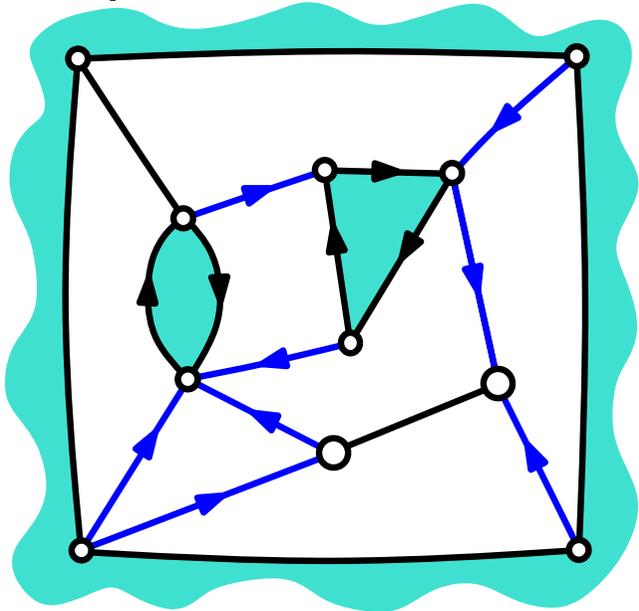
sommet \circ à k entrantes
 bord interne $\left\{ \begin{array}{l} \text{degré } r \\ b \text{ entrantes} \end{array} \right.$
 face interne degré p



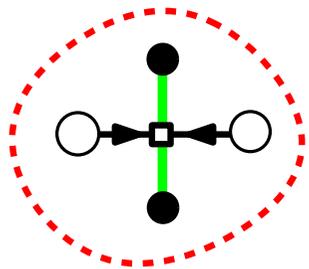
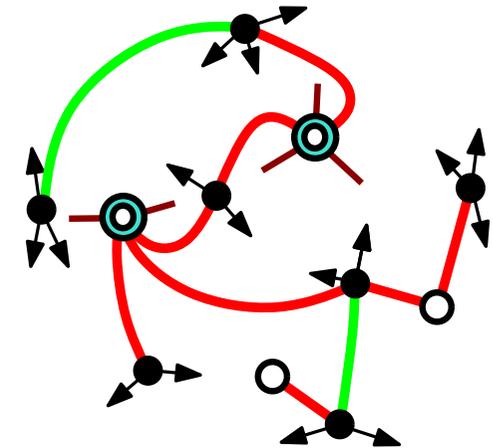
sommet \circ de degré k
 sommet \odot $\left\{ \begin{array}{l} r \text{ pattes} \\ b \text{ voisins} \end{array} \right.$
 sommet \bullet de degré p

Extension de la méta-bijection à ce cadre

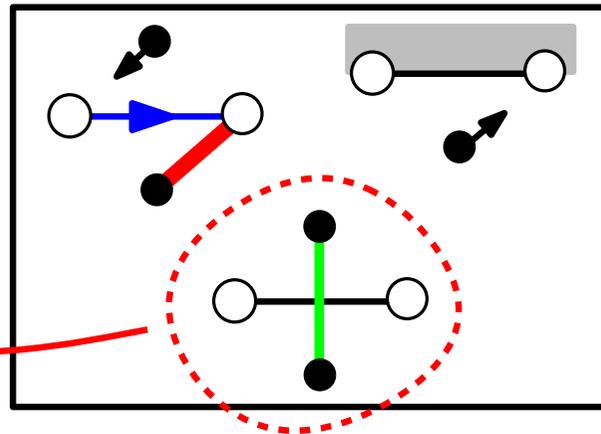
On peut aussi autoriser d'avoir des **arêtes (internes) non orientées**



⇓ contraction des bords



cf



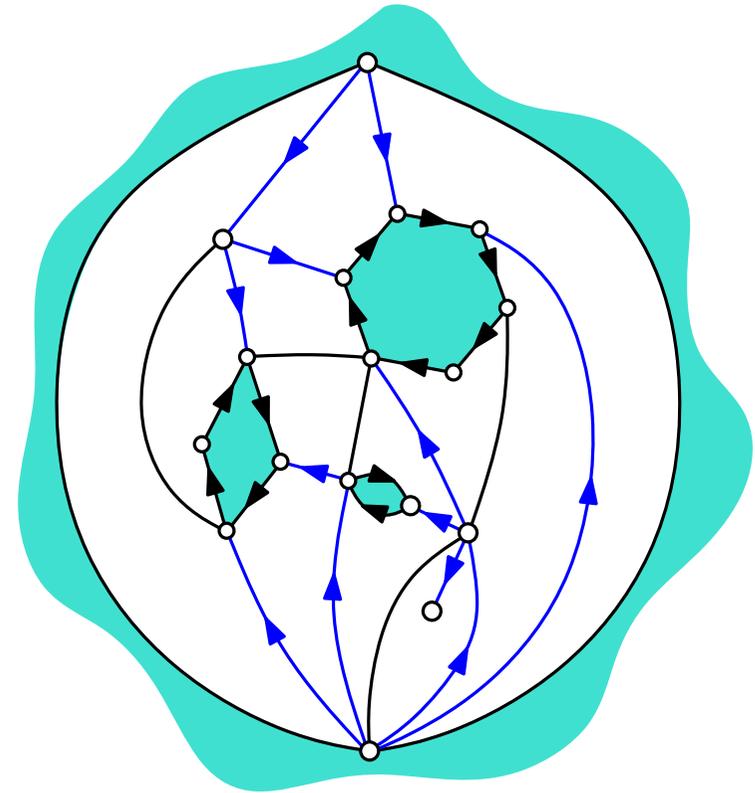
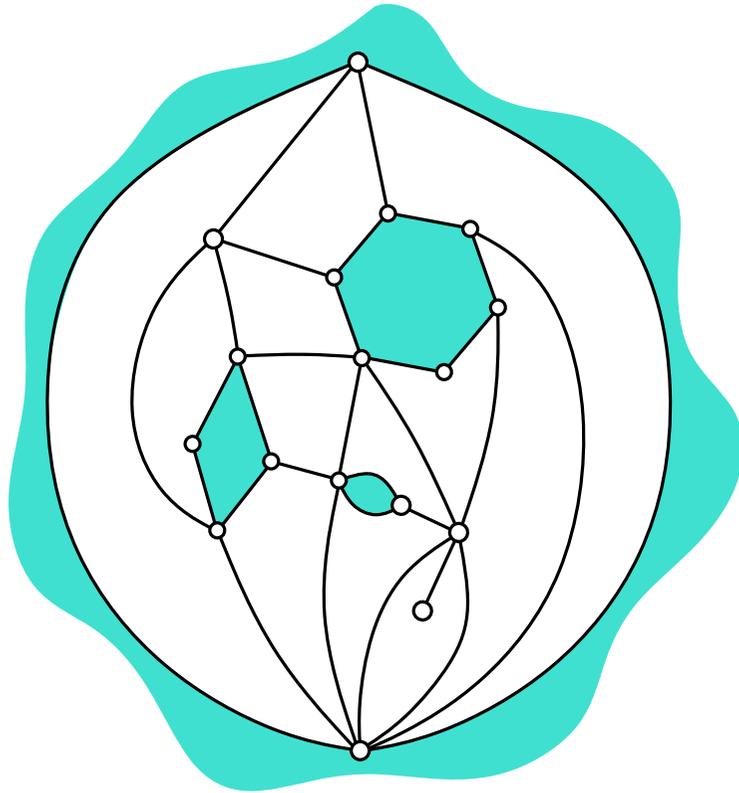
sommet \circ à k entrantes
 bord interne $\left\{ \begin{array}{l} \text{degré } r \\ b \text{ entrantes} \end{array} \right.$
 face interne degré p



sommet \circ de degré k
 sommet \odot $\left\{ \begin{array}{l} r \text{ pattes} \\ b \text{ voisins} \end{array} \right.$
 sommet \bullet de degré p

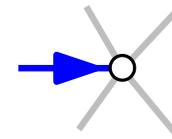
Orientations pour les quadrangulations à bords

On se restreint au cas où la face externe est un bord de taille 2

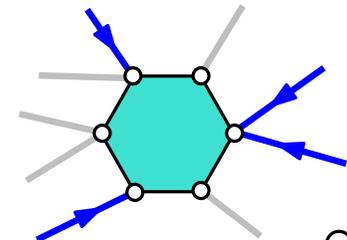


Orientation canonique : orientation dans \mathcal{O}_{-2} (& bords horaires) tel que

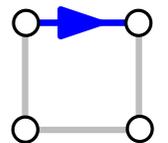
- chaque sommet interne a 1 entrante



- chaque bord interne de taille $2i$ a $i + 1$ entrantes

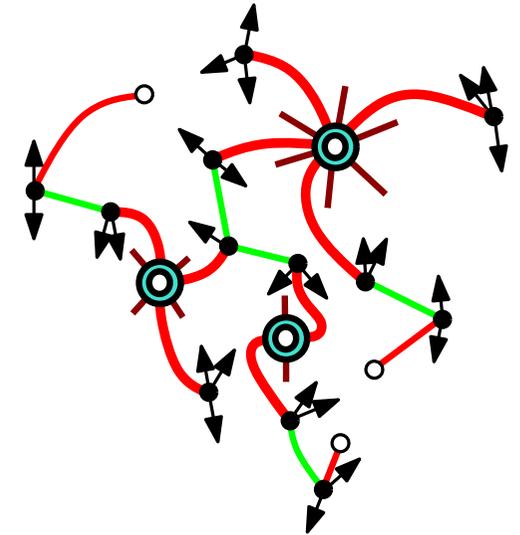
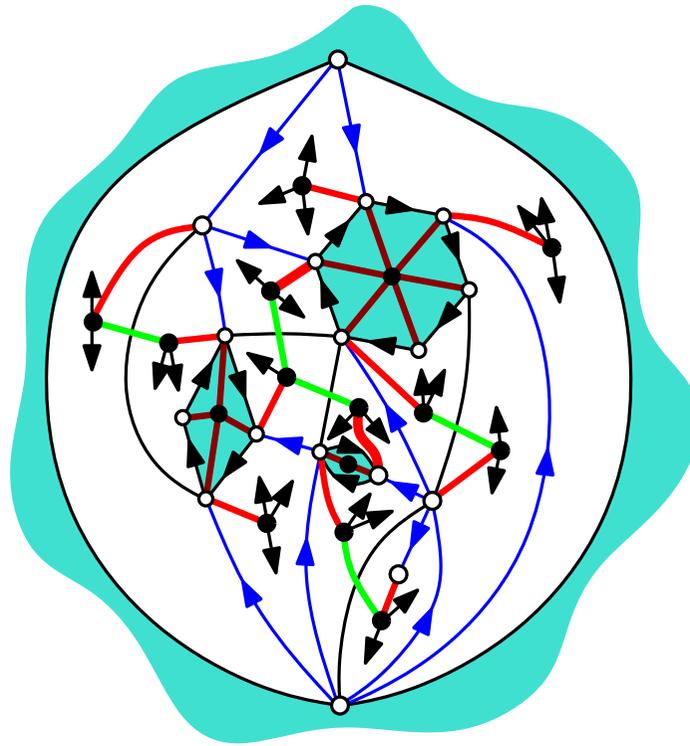
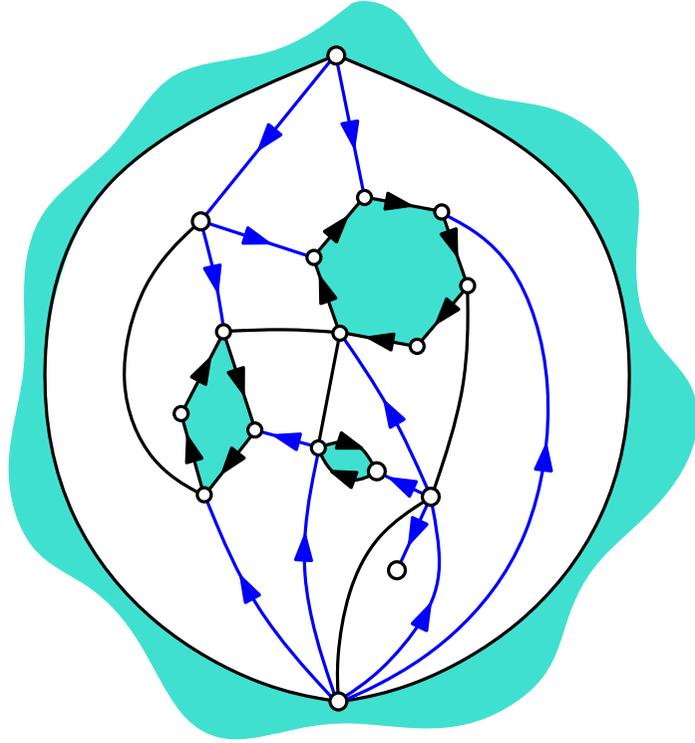


- chaque face non-bord (degré 4) a une arête en sens horaire

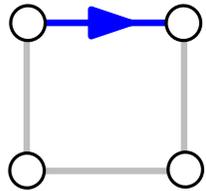


Bijection pour les quadrangulations à bords

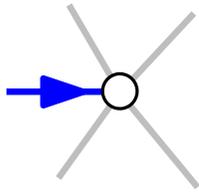
On se restreint au cas où la face externe est un bord de taille 2



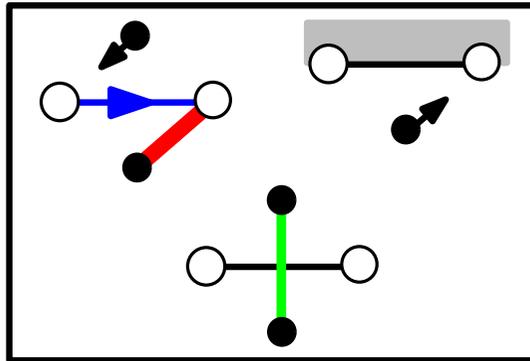
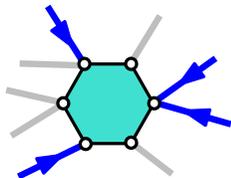
face interne



sommet interne



bord interne de degré $2i$
a $i + 1$ entrantes



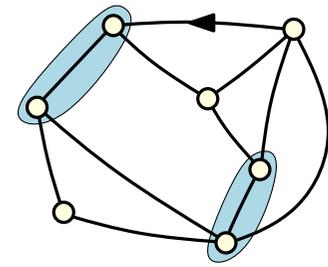
tout sommet \bullet a degré 4
et un unique voisin blanc

tout sommet \circ est feuille

tout sommet \odot à $2i$ pattes
a $i + 1$ voisins

Solution du modèle de dimères sur quadrangulations

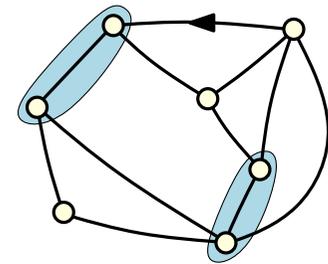
Carte avec dimères = paire (M, X) où M est une carte et X est ensemble d'arêtes induisant un couplage partiel



carte
avec
2 dimères

Solution du modèle de dimères sur quadrangulations

Carte avec dimères = paire (M, X) où M est une carte et X est ensemble d'arêtes induisant un couplage partiel



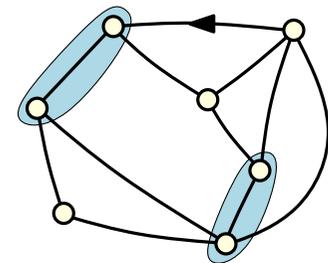
carte
avec
2 dimères

- Modèle de dimères sur quadrangulations (enracinées)

Fonction de partition (série génératrice) :
$$F(t, w) = \sum_{\text{configurations}} t^{\#\text{faces}} w^{\#\text{dimères}}$$

Solution du modèle de dimères sur quadrangulations

Carte avec dimères = paire (M, X) où M est une carte et X est ensemble d'arêtes induisant un couplage partiel

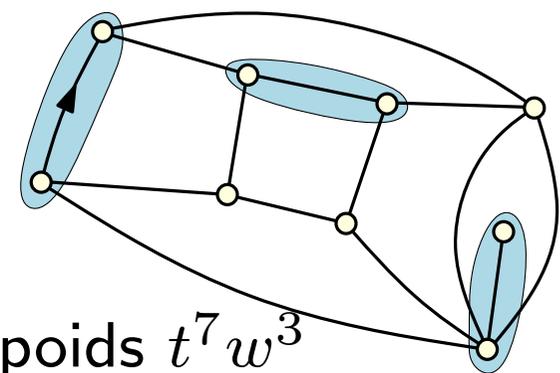


carte avec 2 dimères

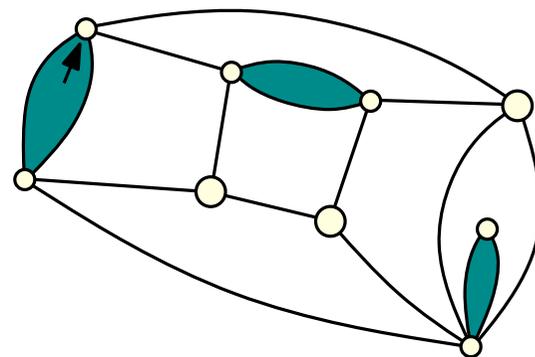
- Modèle de dimères sur quadrangulations (enracinées)

Fonction de partition (série génératrice) : $F(t, w) = \sum_{\text{configurations}} t^{\#\text{faces}} w^{\#\text{dimères}}$

dimère \leftrightarrow bord de taille 2



\Leftrightarrow



bijection

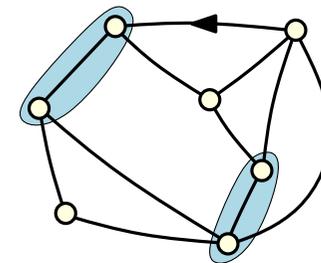


$$F(t, w) = R - 1 - t R^3 - 6wt^2 R^6$$

$$\text{où } R = 1 + 3tR^2 + 9wt^2 R^5$$

Solution du modèle de dimères sur quadrangulations

Carte avec dimères = paire (M, X) où M est une carte et X est ensemble d'arêtes induisant un couplage partiel

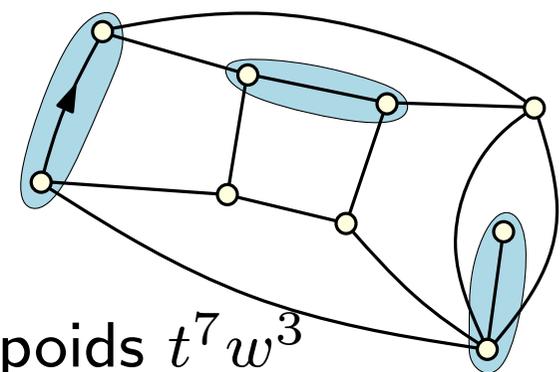


carte avec 2 dimères

- Modèle de dimères sur quadrangulations (enracinées)

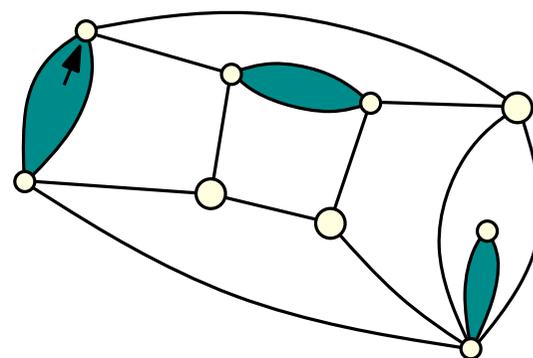
Fonction de partition (série génératrice) : $F(t, w) = \sum_{\text{configurations}} t^{\# \text{faces}} w^{\# \text{dimères}}$

dimère \leftrightarrow bord de taille 2



poids $t^7 w^3$

\Leftrightarrow



bijection



$$F(t, w) = R - 1 - t R^3 - 6wt^2 R^6$$

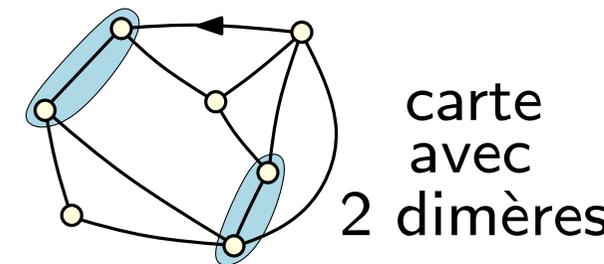
$$\text{où } R = 1 + 3tR^2 + 9wt^2 R^5$$

Asymptotique : pour $w \in \mathbb{R}$ fixé, on a $[t^n]F \sim c_w \gamma_w^n n^{-5/2}$

sauf pour le **poids critique** $w_0 = -3/125$ où $[t^n]F \sim c_0 \gamma_0^n n^{-7/3}$

Solution du modèle de dimères sur quadrangulations

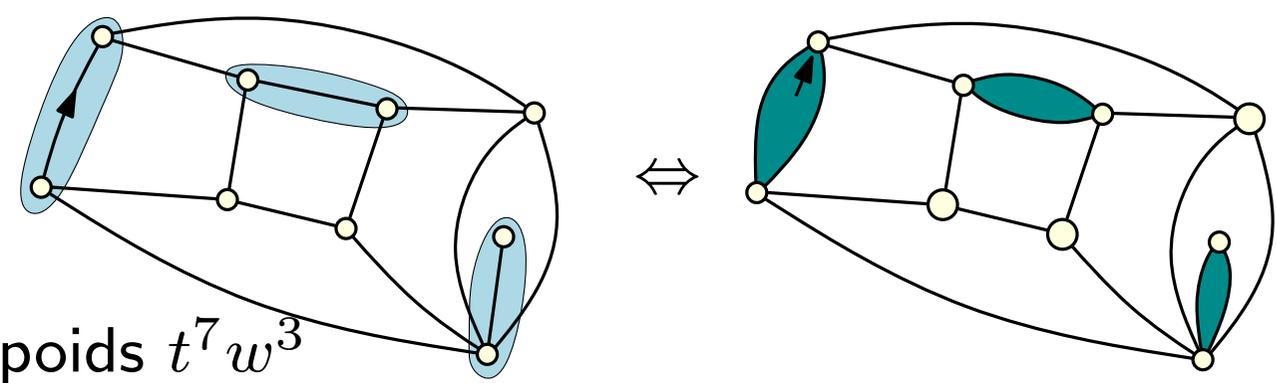
Carte avec dimères = paire (M, X) où M est une carte et X est ensemble d'arêtes induisant un couplage partiel



- Modèle de dimères sur quadrangulations (enracinées)

Fonction de partition (série génératrice) : $F(t, w) = \sum_{\text{configurations}} t^{\#\text{faces}} w^{\#\text{dimères}}$

dimère \leftrightarrow bord de taille 2



pois $t^7 w^3$

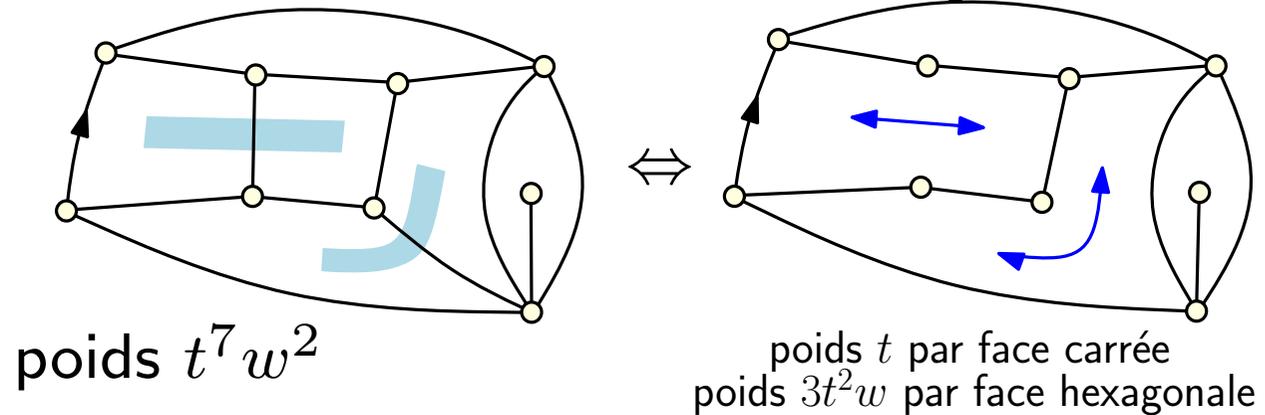
bijection
↓

$$F(t, w) = R - 1 - t R^3 - 6wt^2 R^6$$

$$\text{où } R = 1 + 3tR^2 + 9wt^2 R^5$$

Asymptotique : pour $w \in \mathbb{R}$ fixé, on a $[t^n]F \sim c_w \gamma_w^n n^{-5/2}$
 sauf pour le **pois critique** $w_0 = -3/125$ où $[t^n]F \sim c_0 \gamma_0^n n^{-7/3}$

- Solution du modèle dual dans [Bouttier, Di Francesco, Guitter'03]



pois $t^7 w^2$

pois t par face carrée
 pois $3t^2 w$ par face hexagonale

$$F(t, w) = R - 1 - t R^3 - 15wt^2 R^4$$

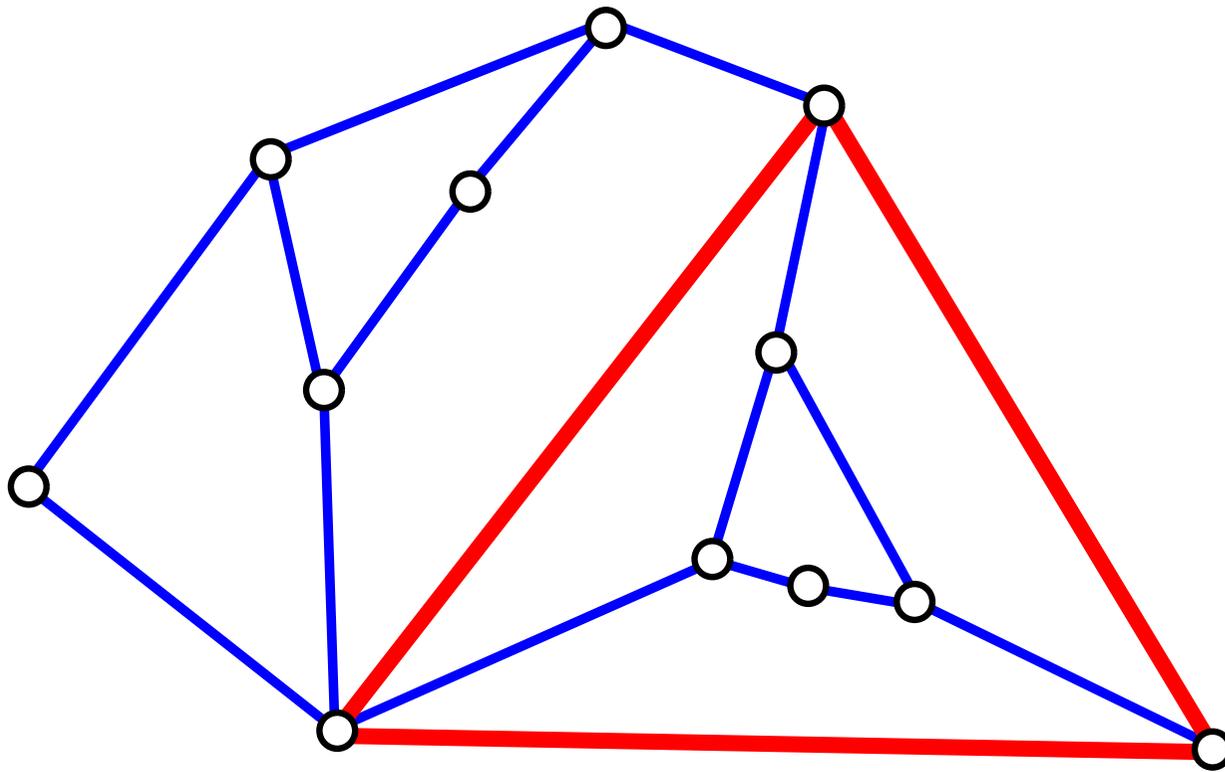
$$\text{où } R = 1 + 3tR^2 + 30wt^2 R^3$$

pois critique $w_0 = -1/10$
 où **distance typique** $\approx n^{1/6}$

**Extension à la maille supérieure
de la bijection pour cartes biparties simples**

Le paramètre de maille

La **maille** d'un graphe est la longueur d'un plus court cycle du graphe

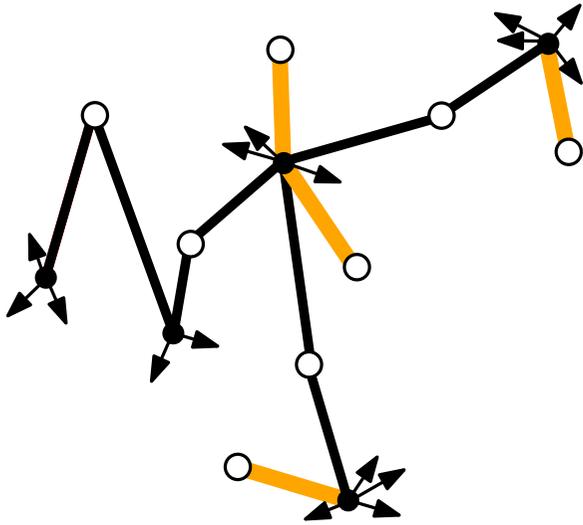


maille = 3

Rq: pour une carte, si maille = d , alors toutes les faces ont degré $\geq d$

La structure des mobiles en maille $2b$

- Cas $b = 2$ (biparti simple)



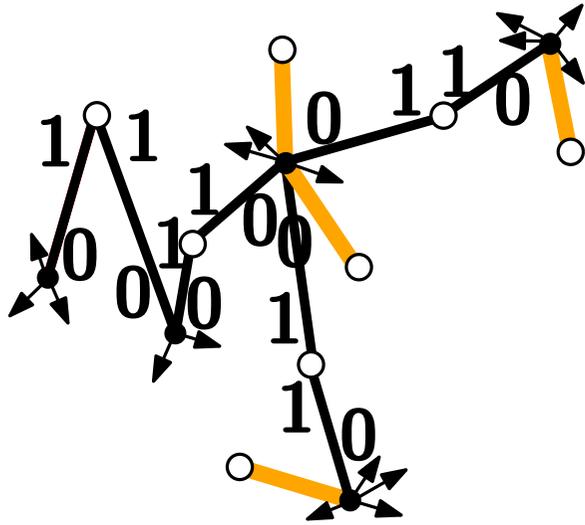
Les sommets blancs ont soit

- degré 2 (milieu d'une arête rouge)
- degré 1 (extrémité d'une patte)

Chaque sommet noir de degré $2i$
porte $i - 2$ pattes

La structure des mobiles en maille $2b$

- Cas $b = 2$ (biparti simple)

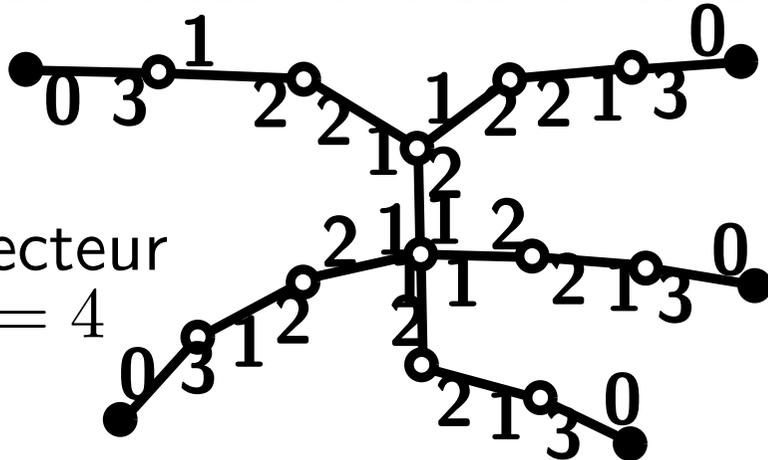


Les sommets blancs ont soit

- degré 2 (milieu d'une arête rouge)
- degré 1 (extrêmité d'une patte)

Chaque sommet noir de degré $2i$ porte $i - 2$ pattes

- Cas général $b \geq 1$ (biparti), utilise formalisme avec des **poids**
 - chaque sommet noir de **degré $2i$** porte $i - b$ **pattes**
 - les sommets noirs sont reliés par des "connecteurs"



un connecteur
pour $b = 4$

Connecteurs pour :

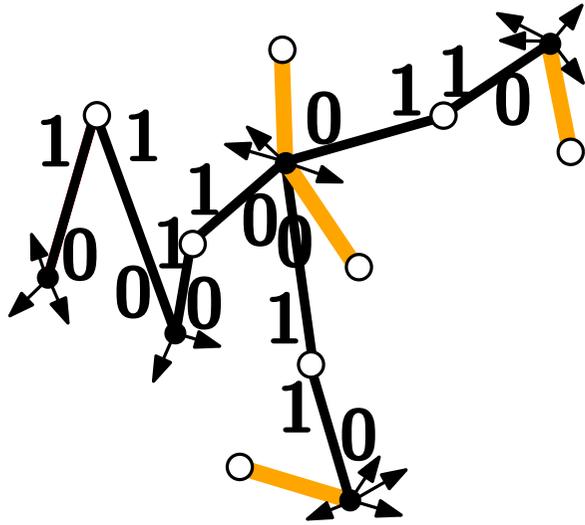
$b = 1$:

$b = 2$:

$b = 3$: arbres binaires

La structure des mobiles en maille $2b$

- Cas $b = 2$ (biparti simple)

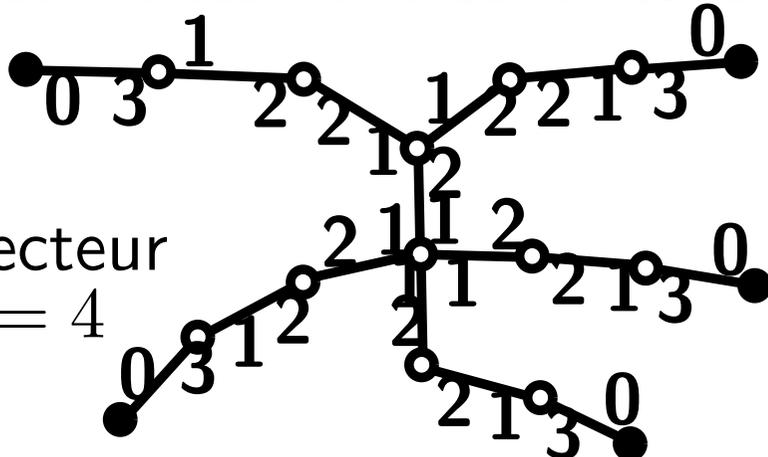


Les sommets blancs ont soit

- degré 2 (milieu d'une arête rouge)
- degré 1 (extrêmité d'une patte)

Chaque sommet noir de degré $2i$ porte $i - 2$ pattes

- Cas général $b \geq 1$ (biparti), utilise formalisme avec des **poids**
 - chaque sommet noir de **degré $2i$** porte $i - b$ **pattes**
 - les sommets noirs sont reliés par des "connecteurs"



un connecteur
pour $b = 4$

Connecteurs pour :

$b = 1$:

$b = 2$:

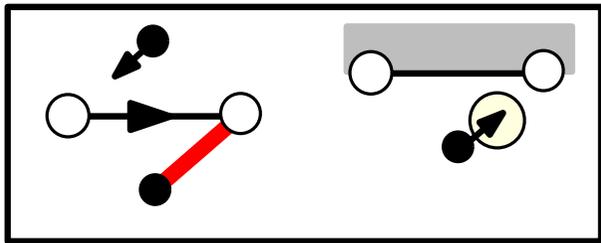
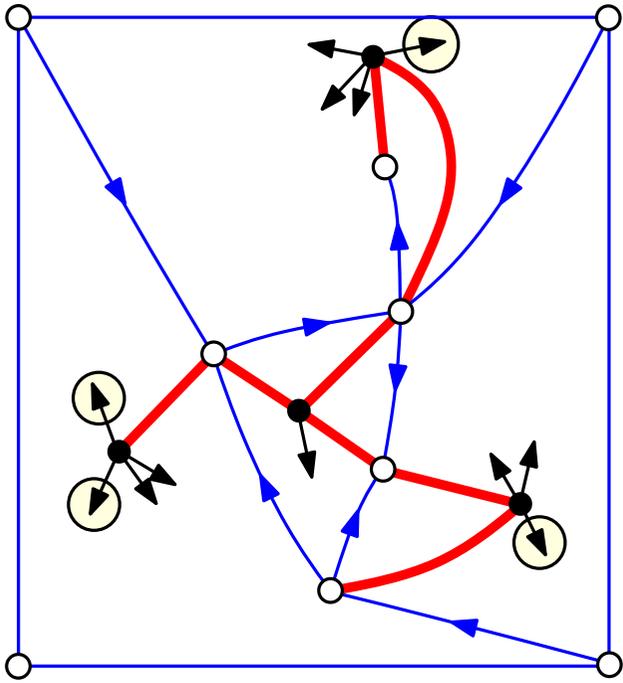
$b = 3$: **arbres binaires**

⇒ grammaire explicite pour la série génératrice

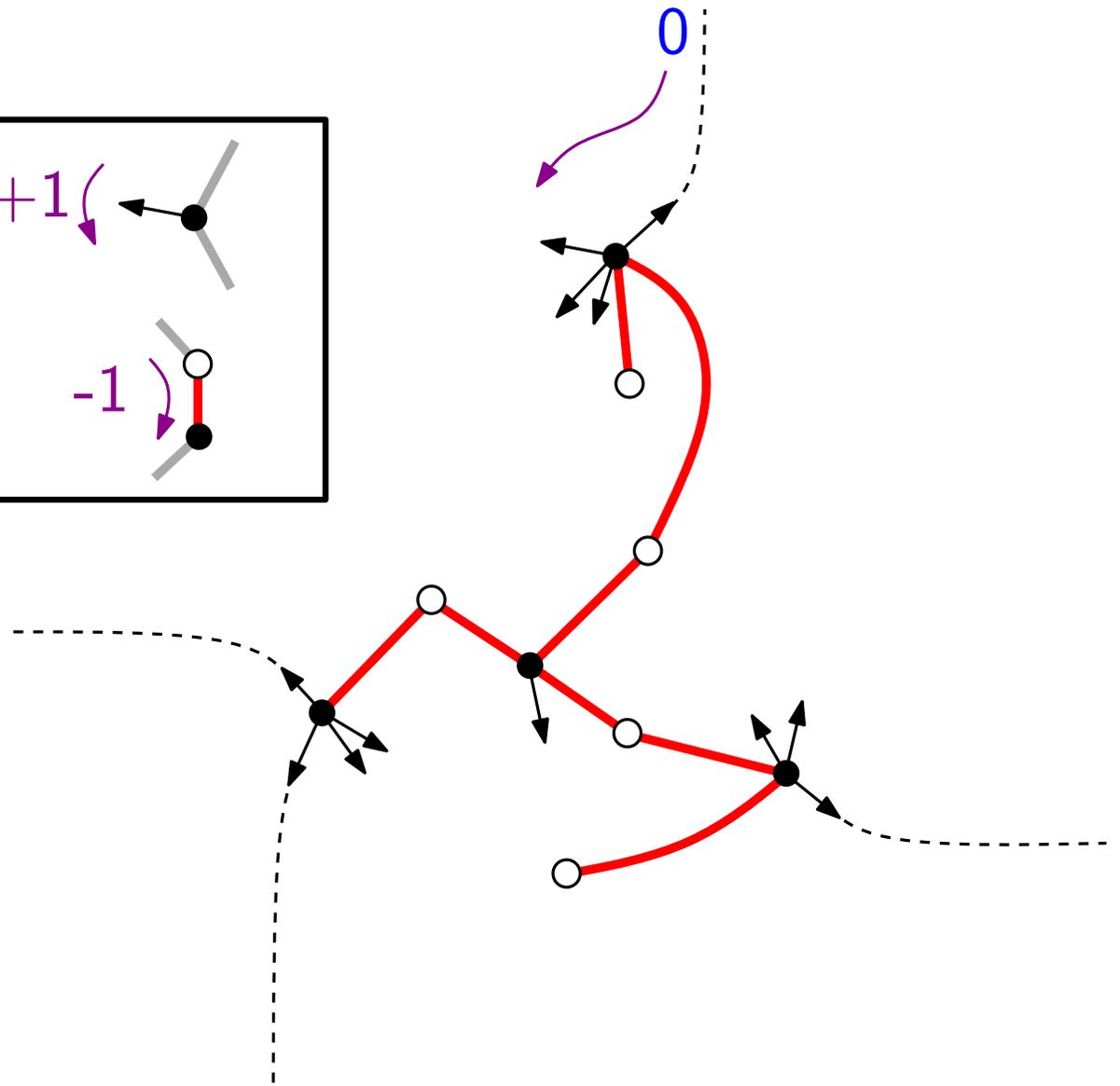
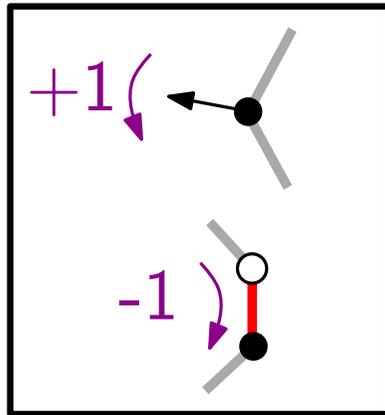
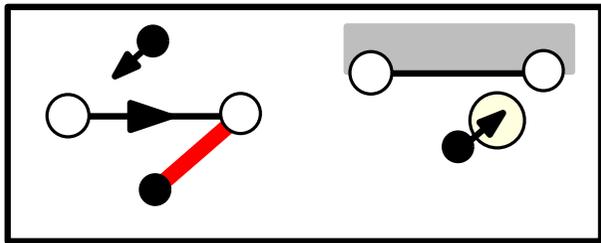
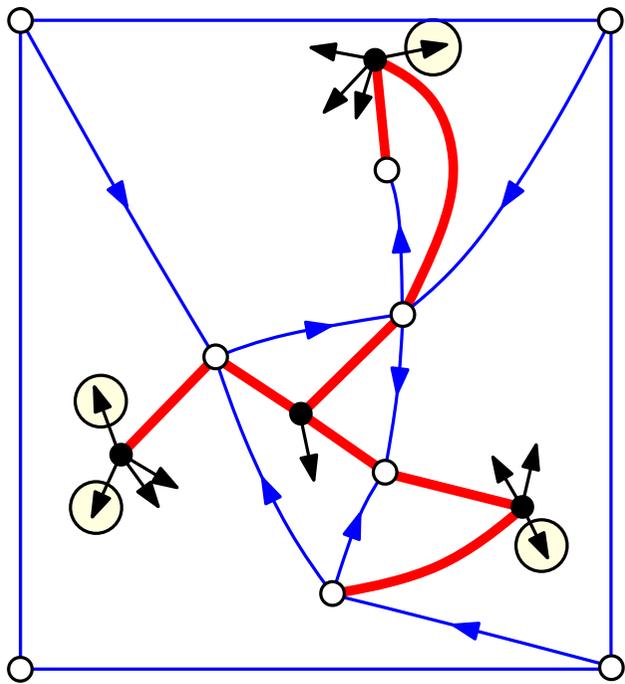
Propriétés de distances de la méta-bijection

Reformulation étiquetée de la méta-bijection

bourgeons **externes** d'un mobile : ceux associés aux arêtes externes

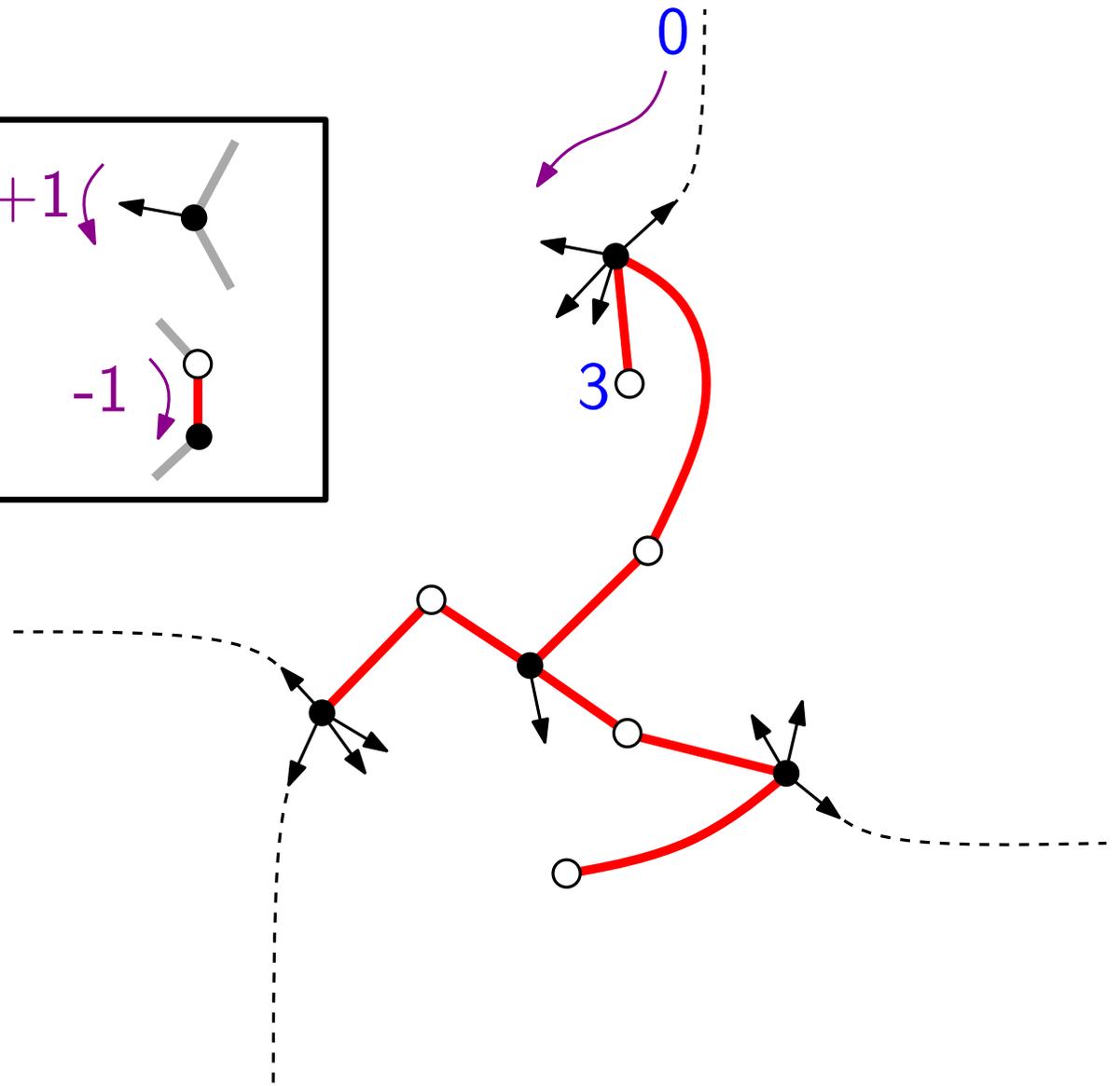
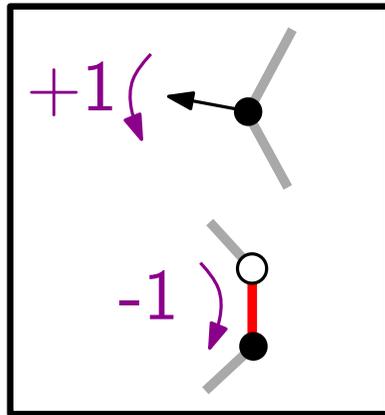
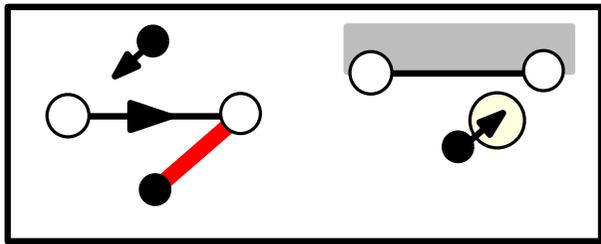
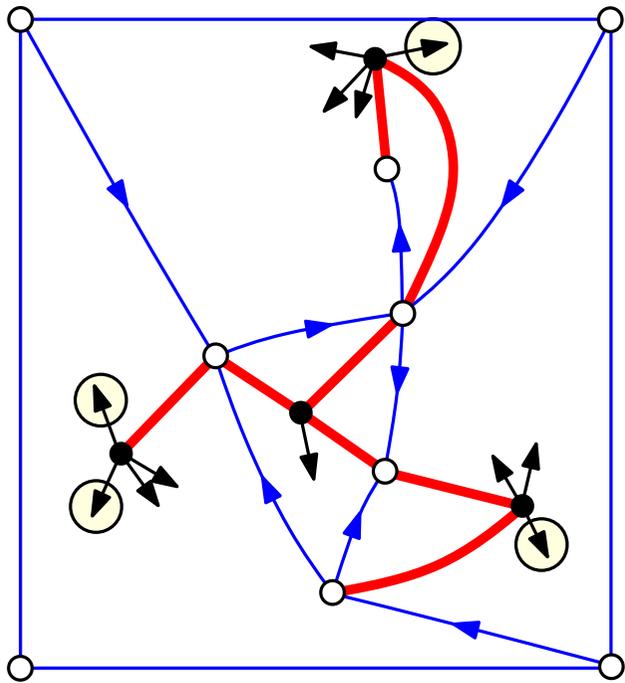


Reformulation étiquetée de la méta-bijection



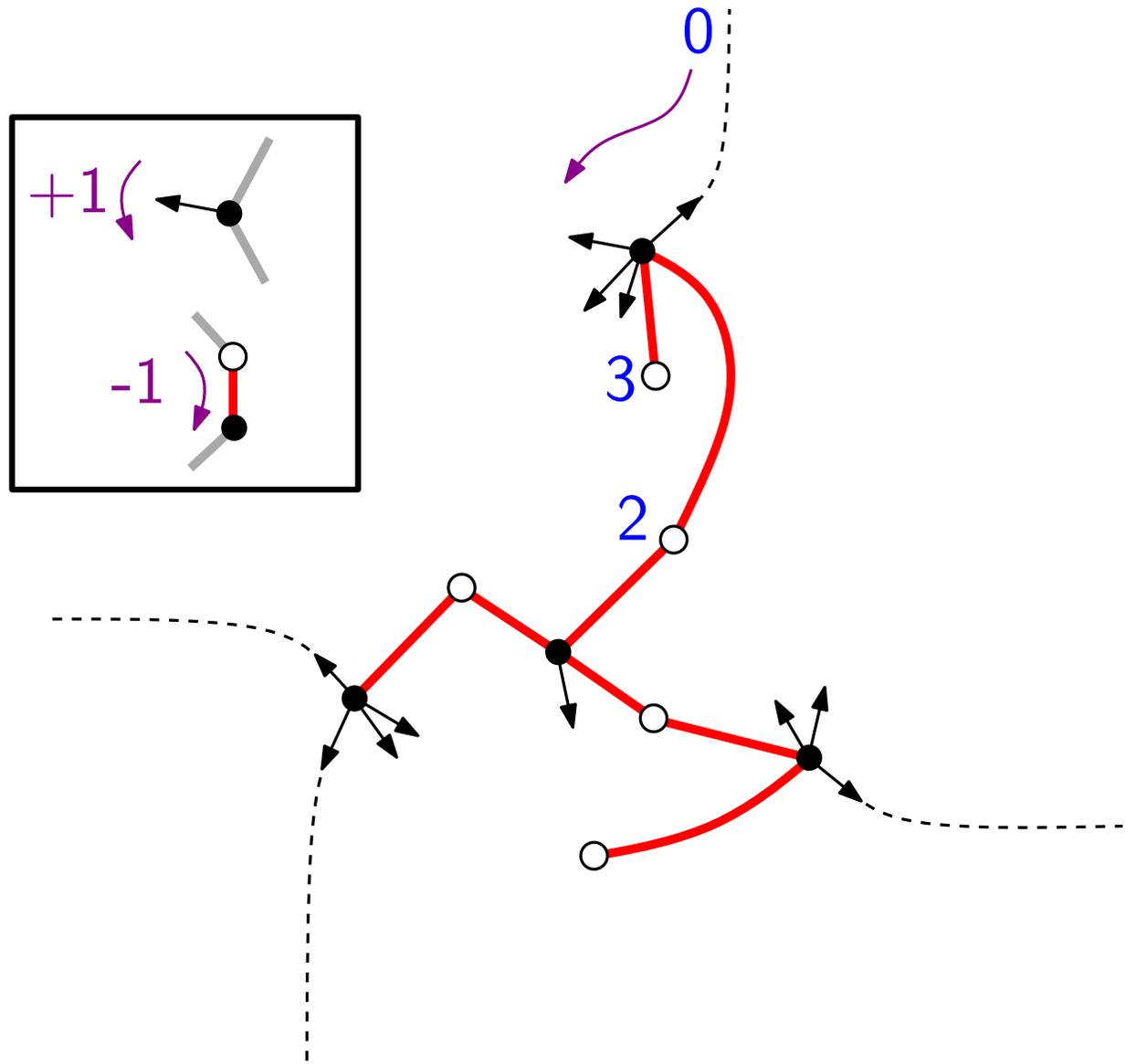
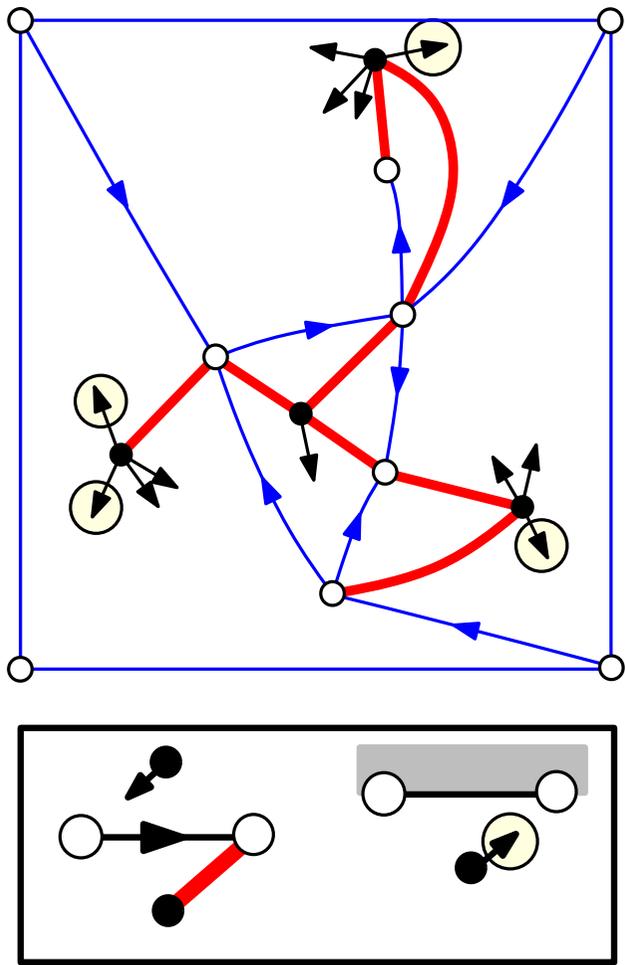
Étiquetage canonique des coins blancs

Reformulation étiquetée de la méta-bijection



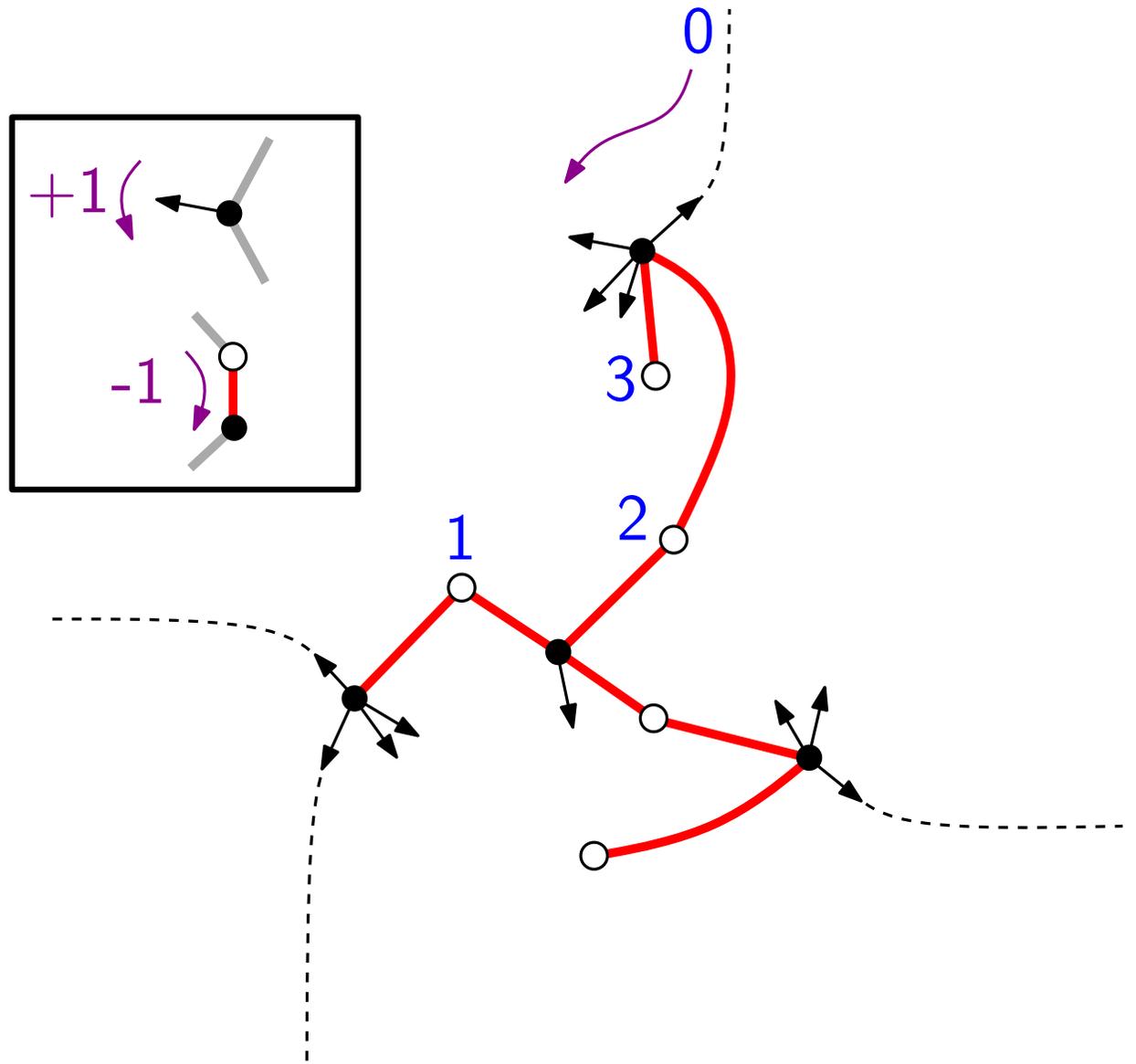
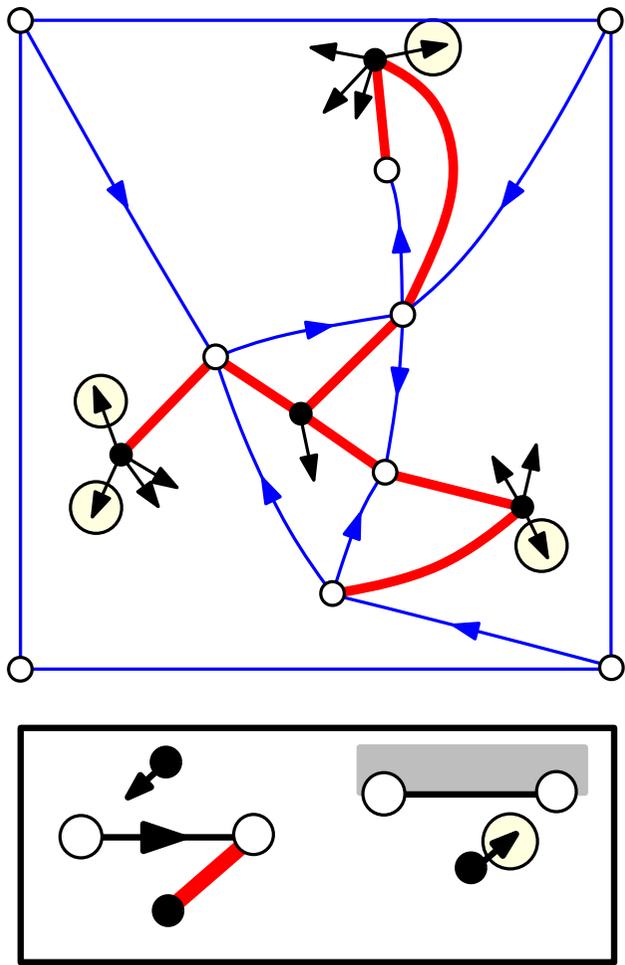
Étiquetage canonique des coins blancs

Reformulation étiquetée de la méta-bijection



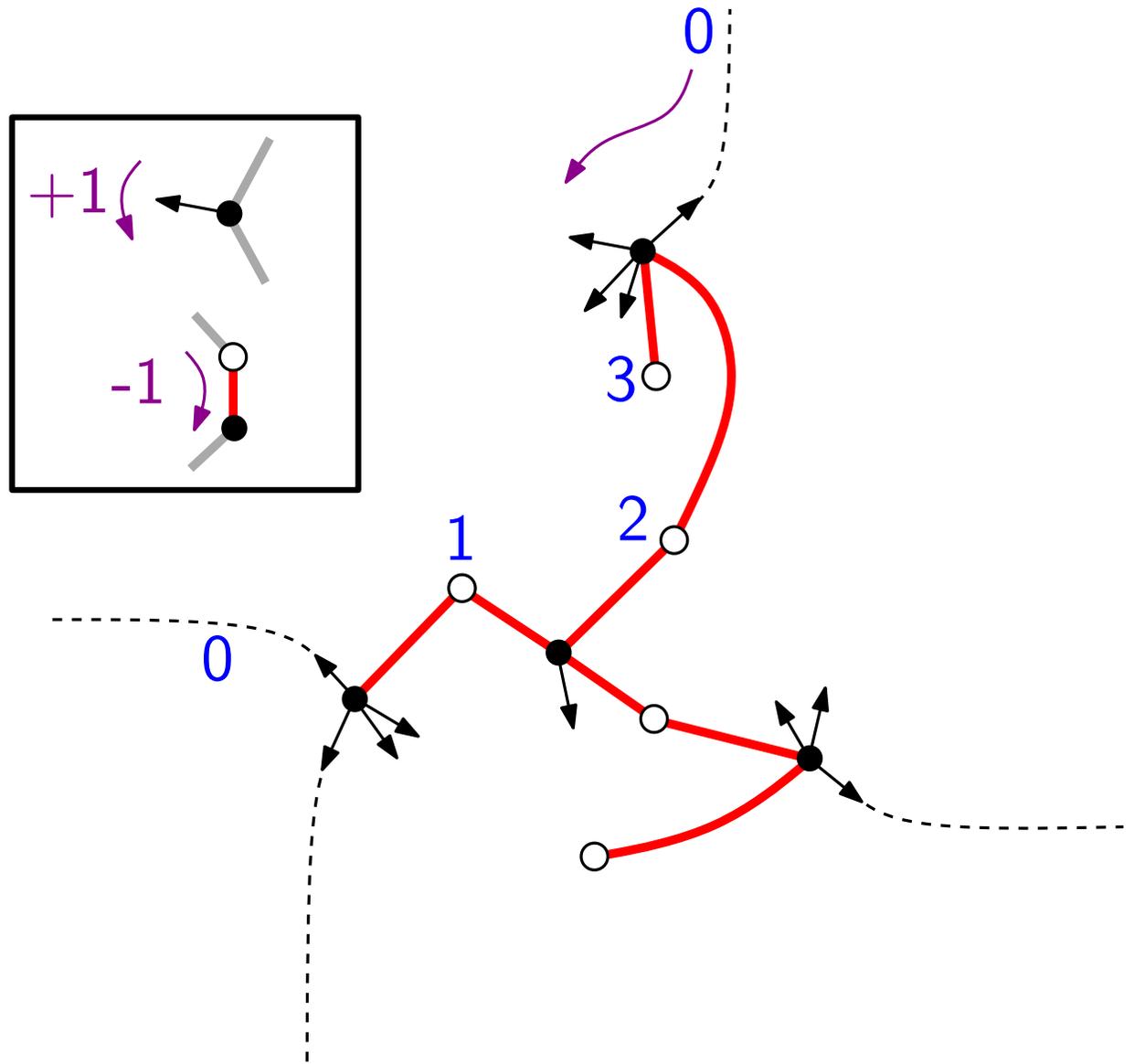
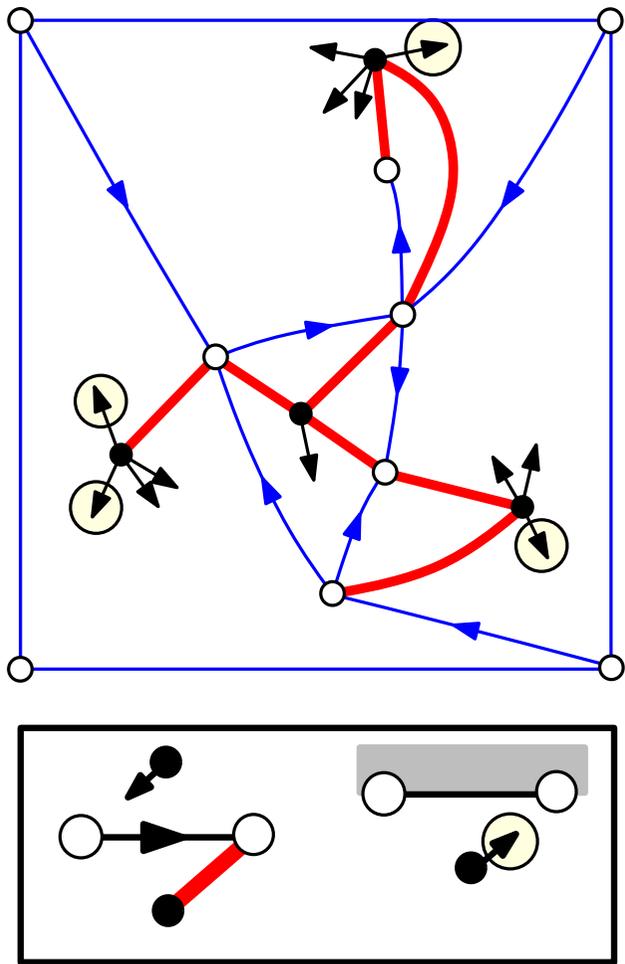
Étiquetage canonique des coins blancs

Reformulation étiquetée de la méta-bijection



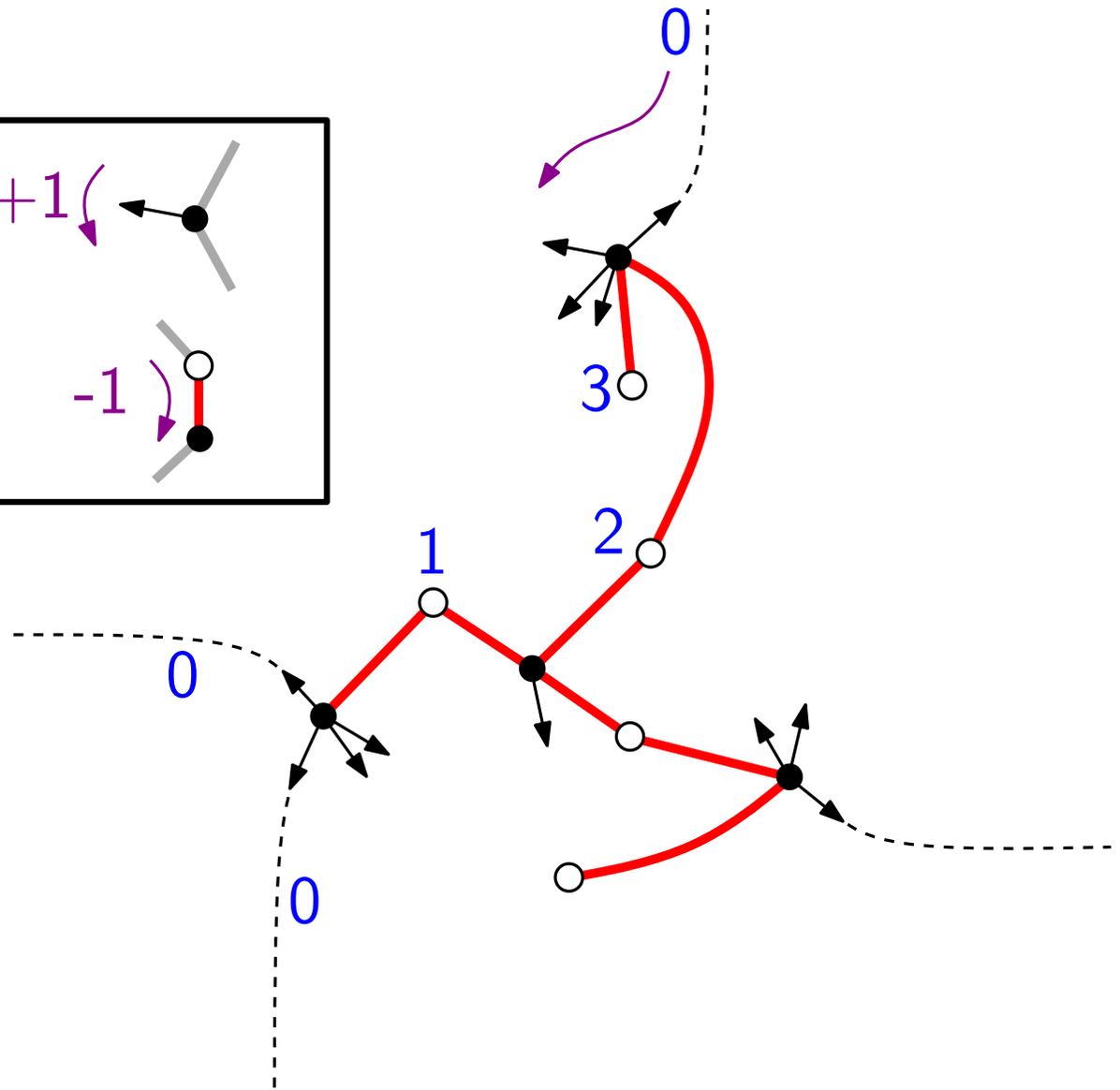
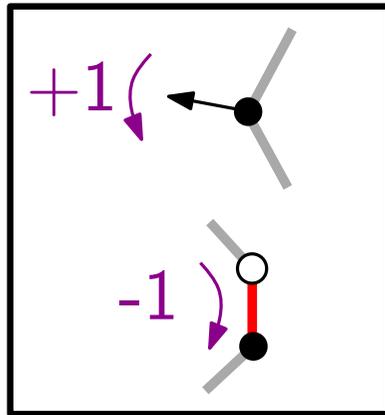
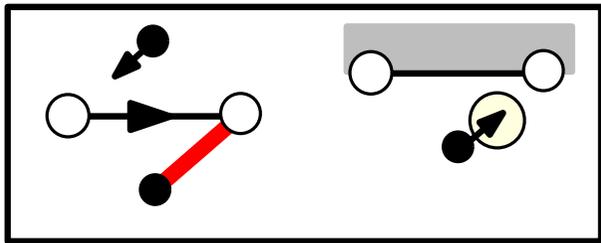
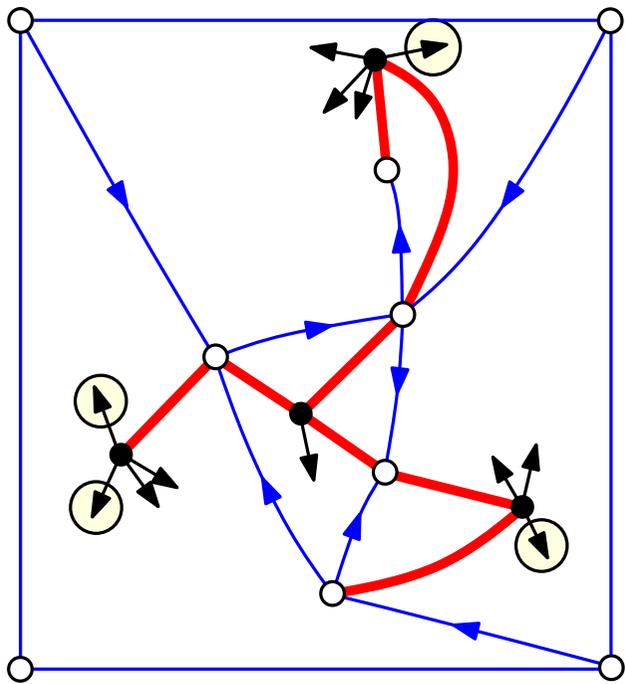
Étiquetage canonique des coins blancs

Reformulation étiquetée de la méta-bijection



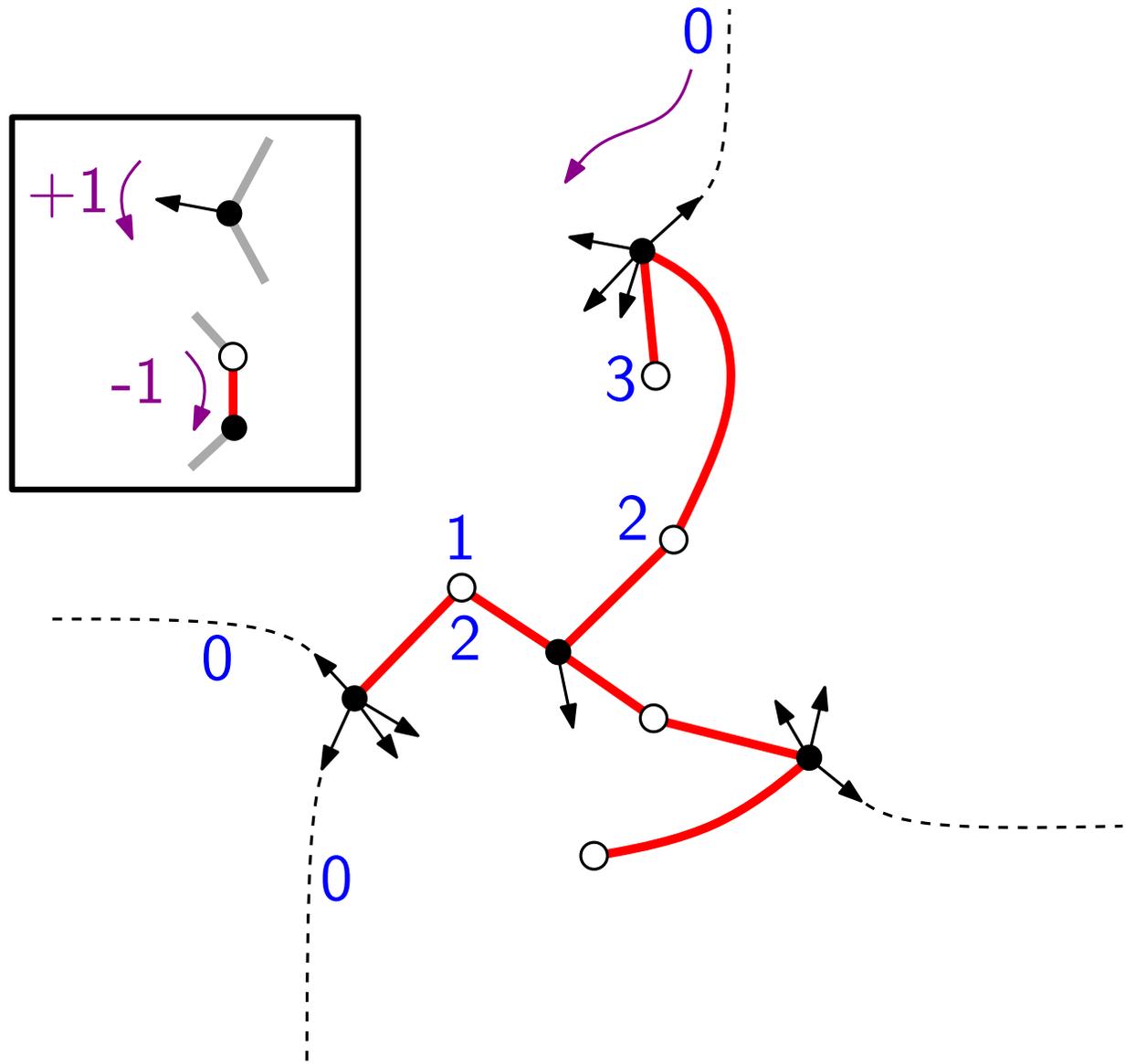
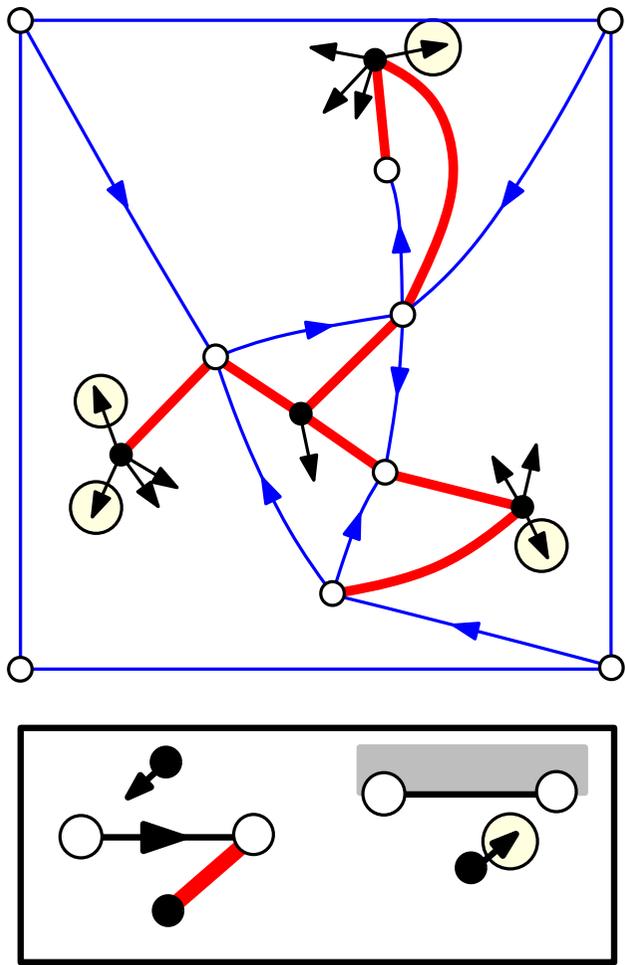
Étiquetage canonique des coins blancs

Reformulation étiquetée de la méta-bijection



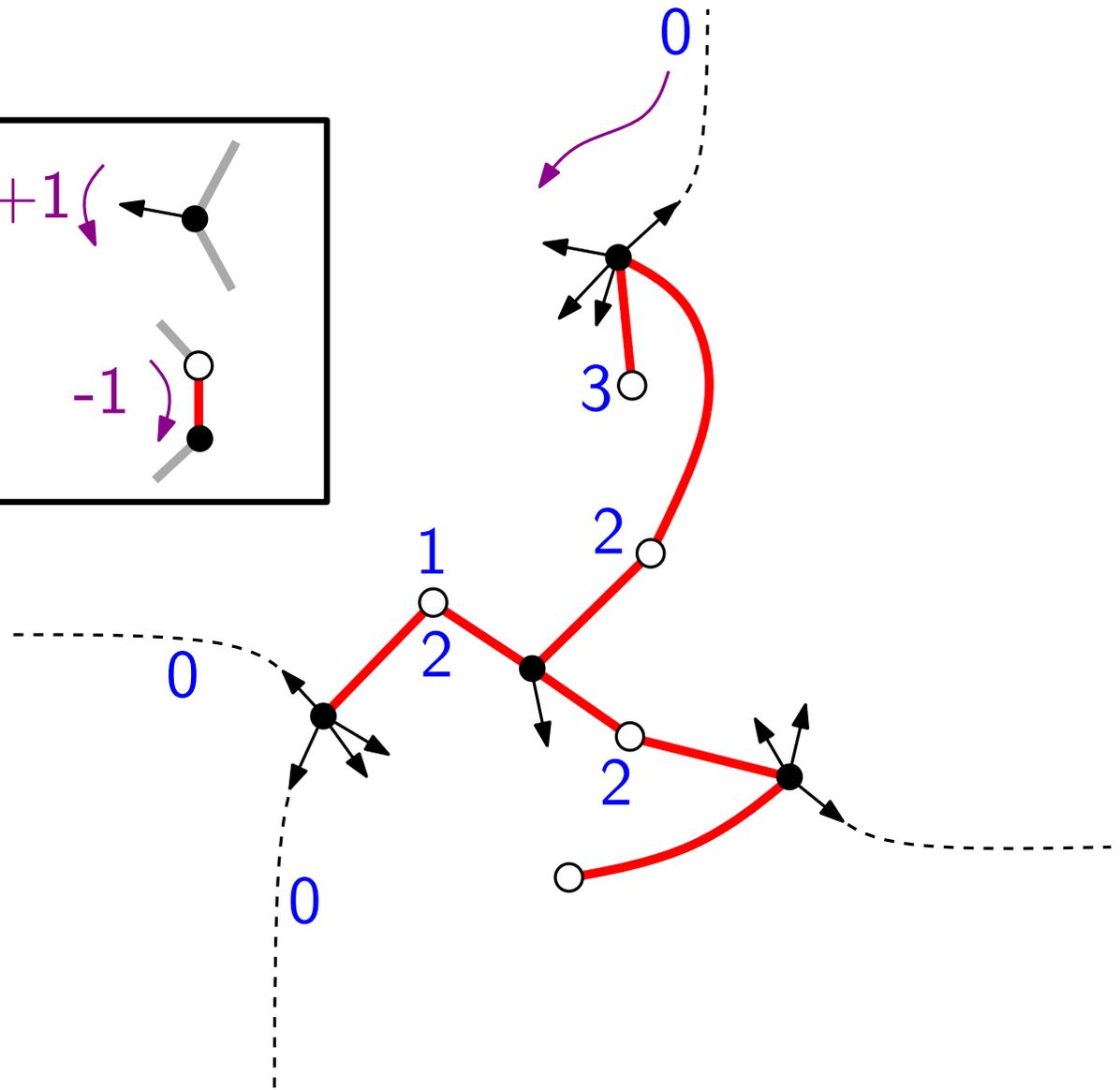
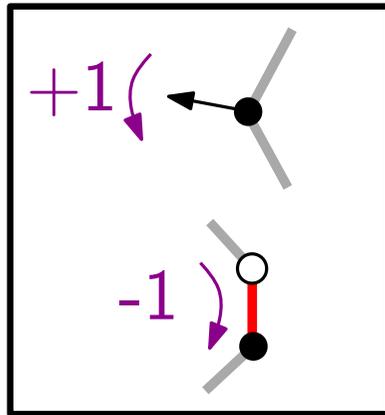
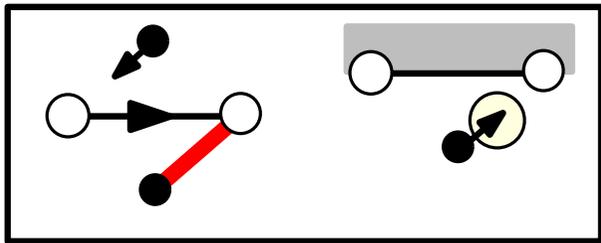
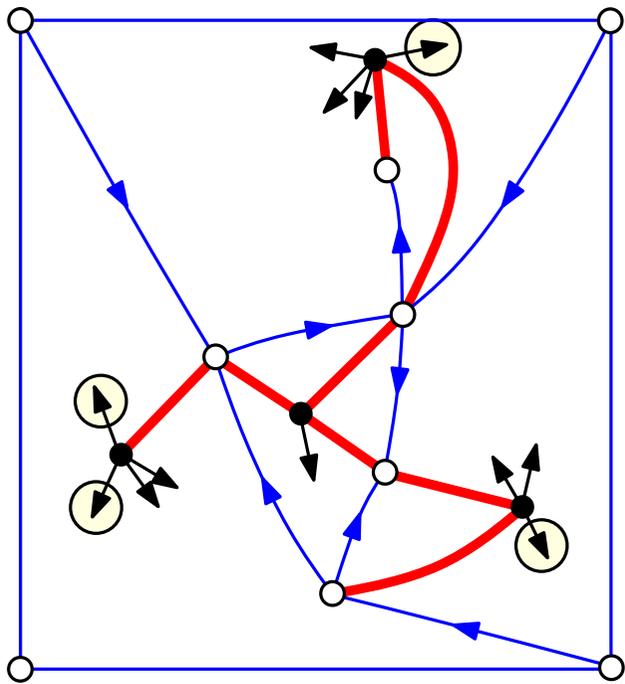
Étiquetage canonique des coins blancs

Reformulation étiquetée de la méta-bijection



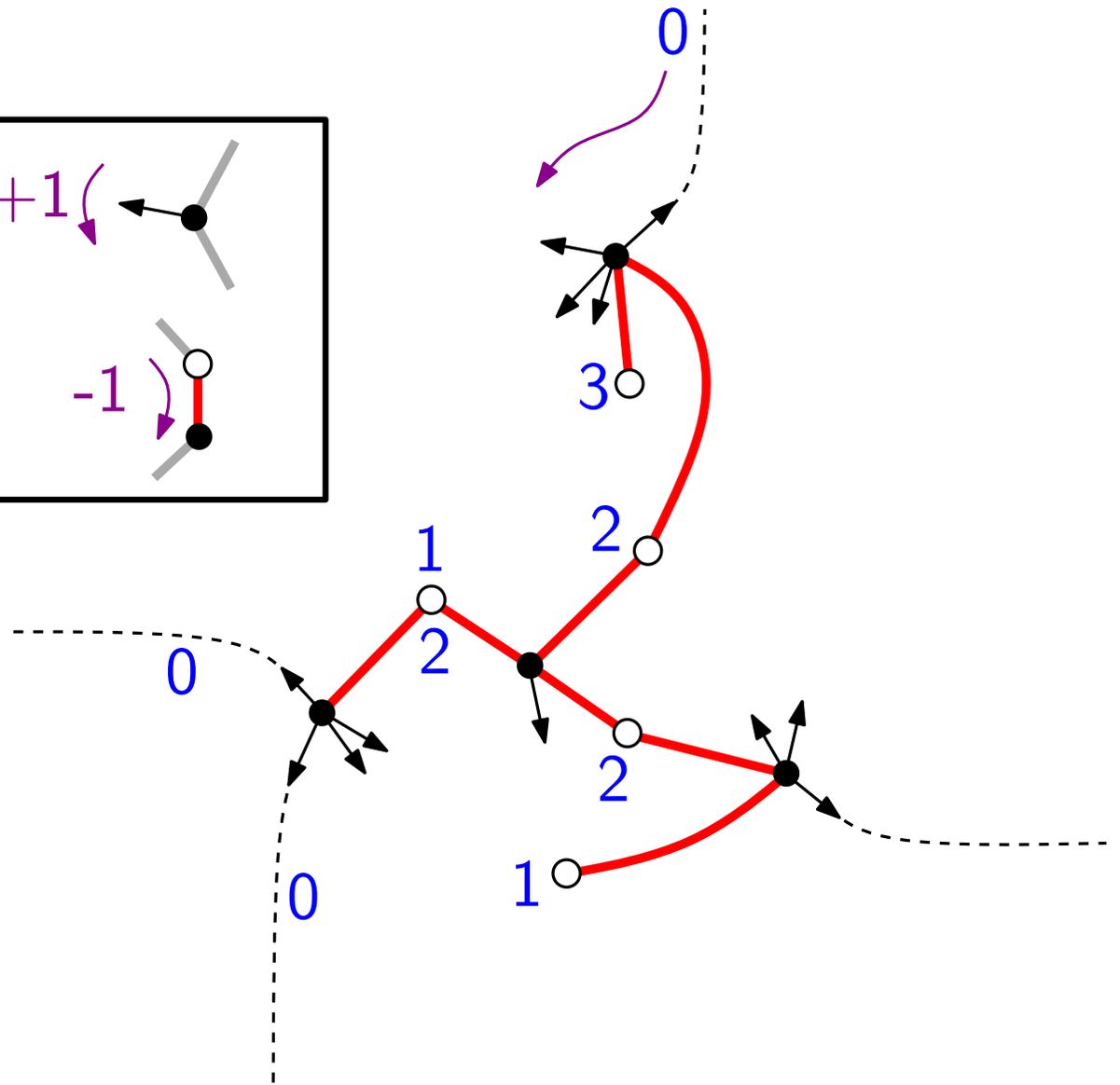
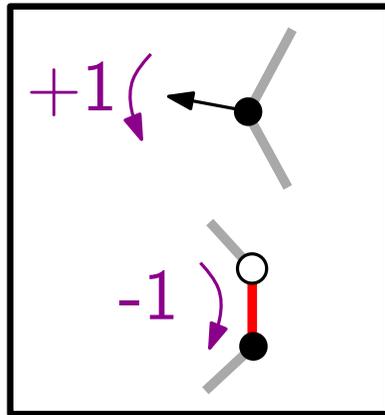
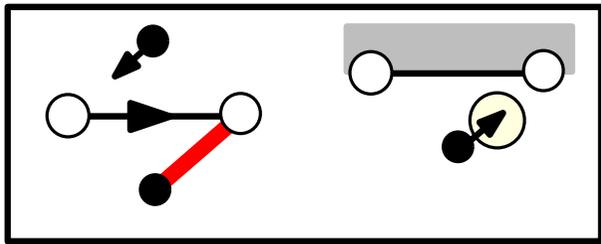
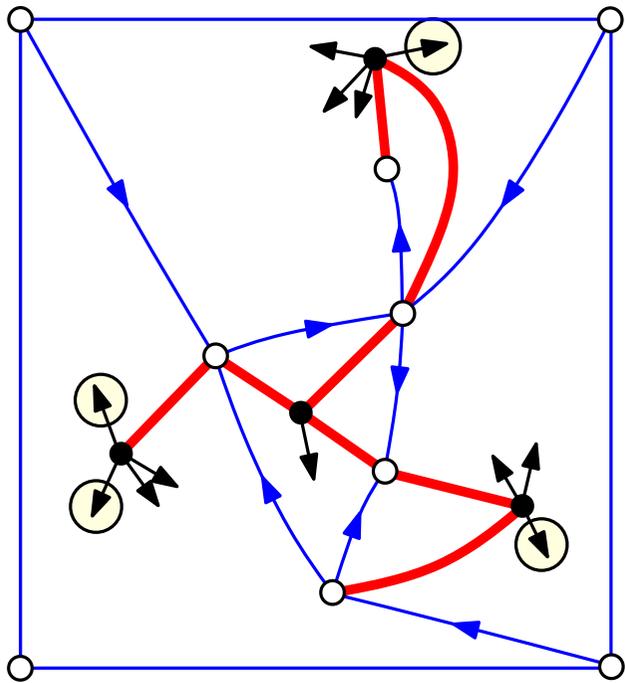
Étiquetage canonique des coins blancs

Reformulation étiquetée de la méta-bijection



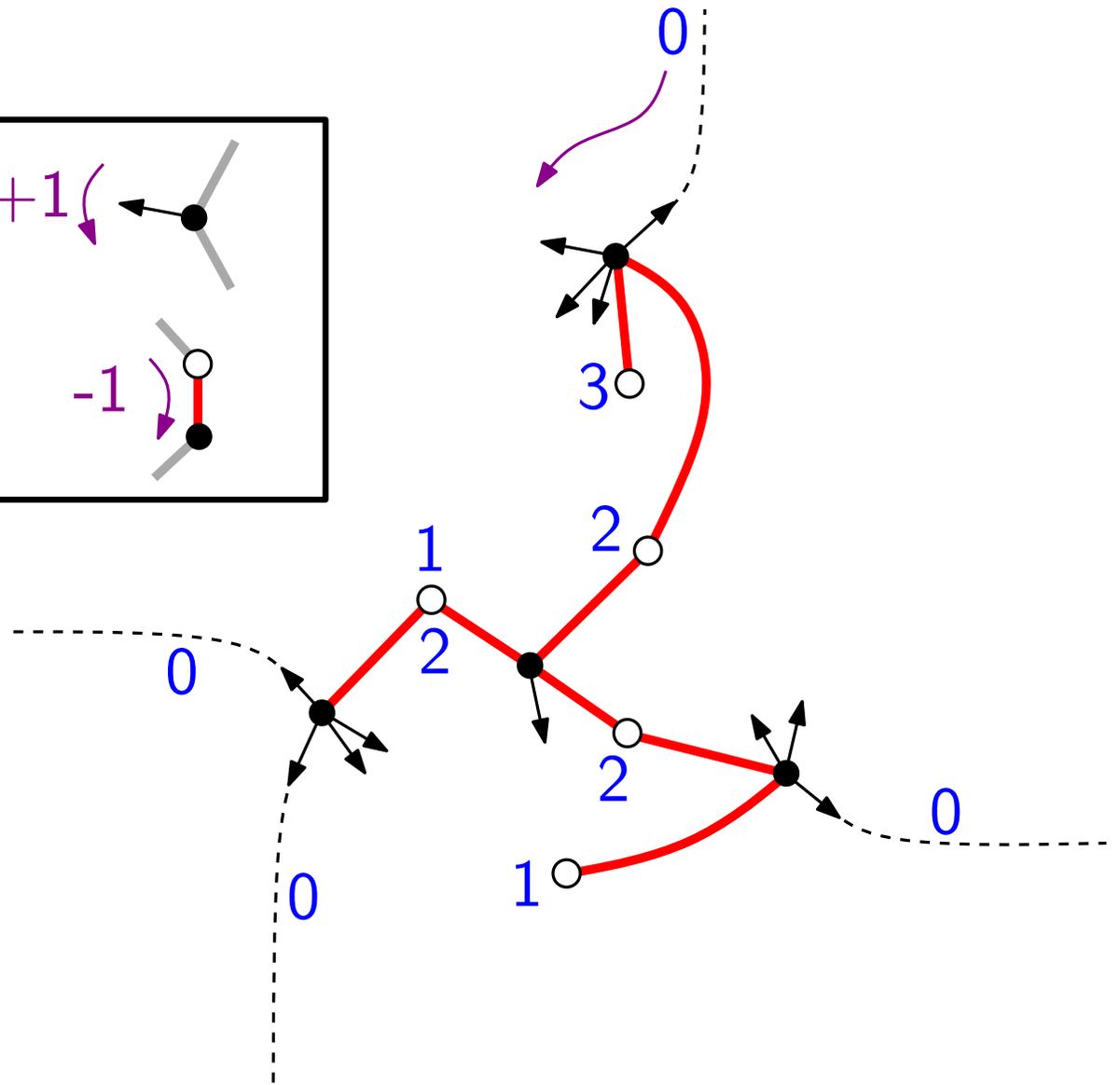
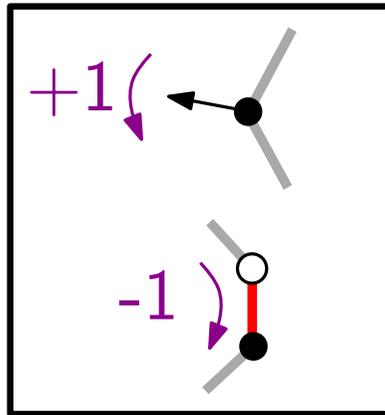
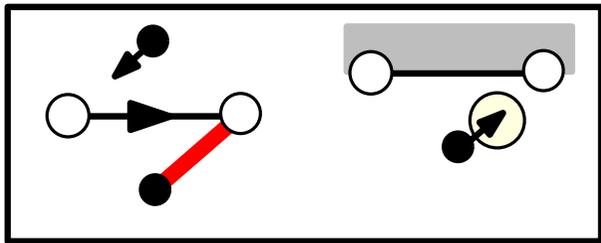
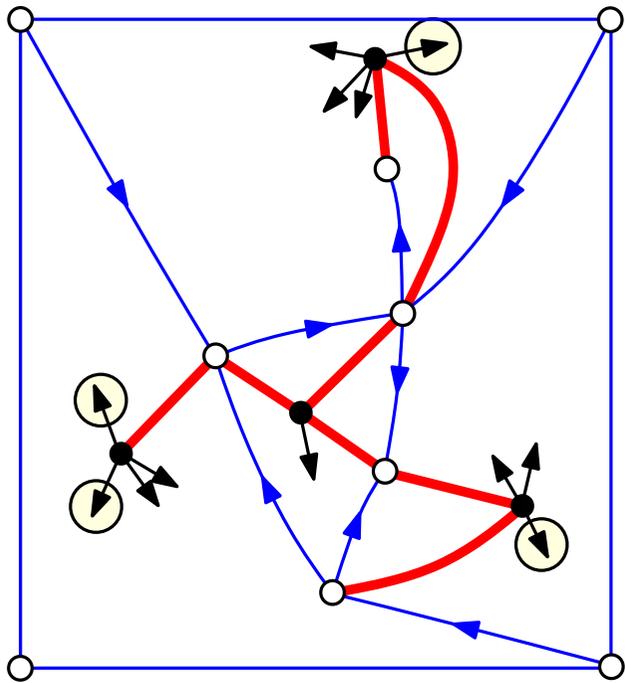
Étiquetage canonique des coins blancs

Reformulation étiquetée de la méta-bijection



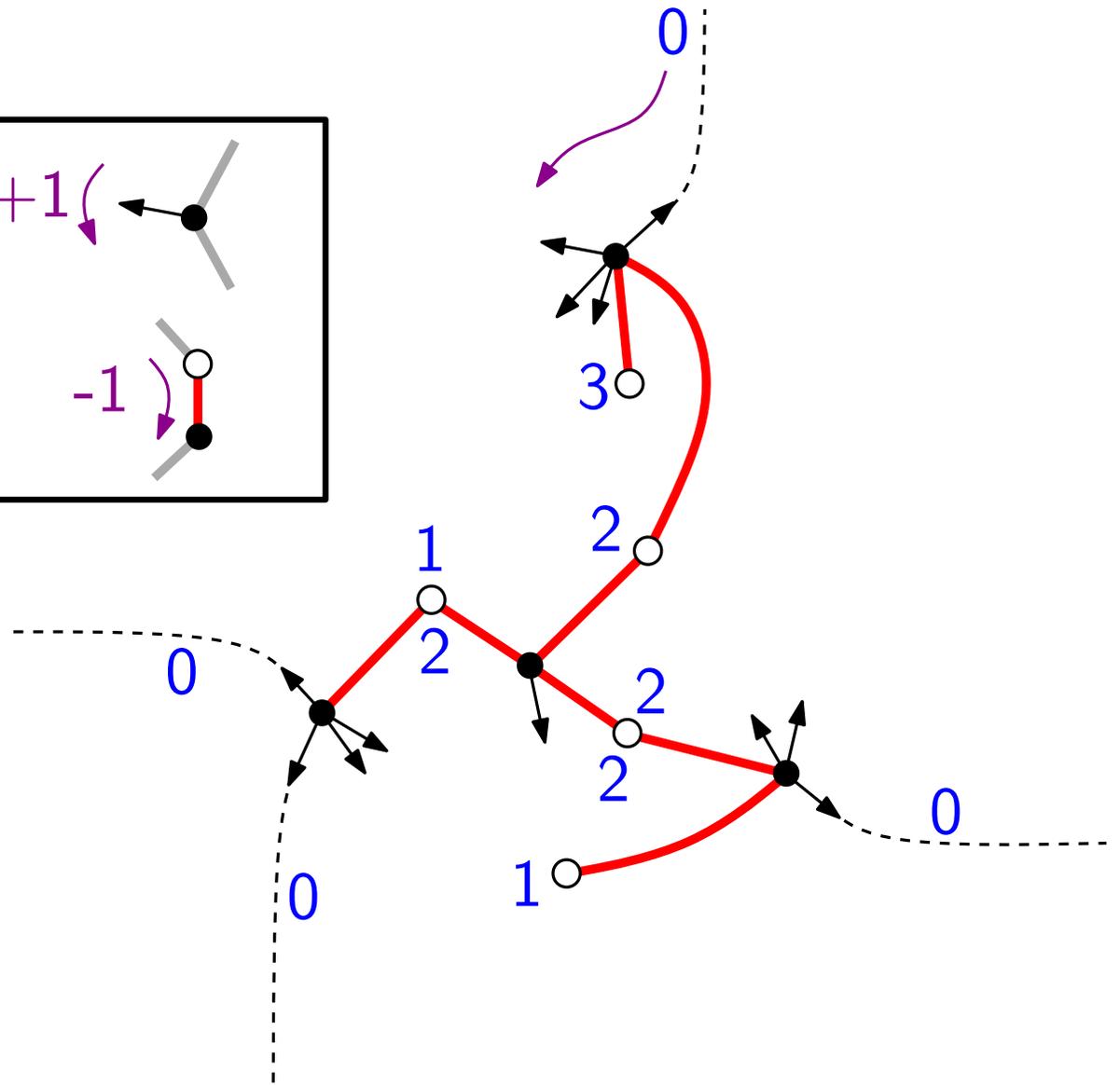
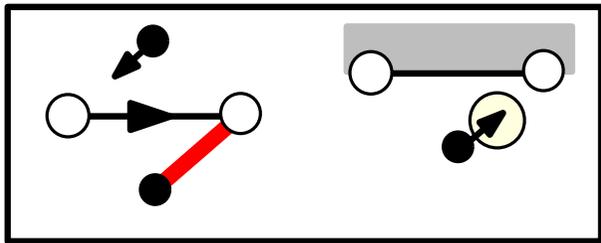
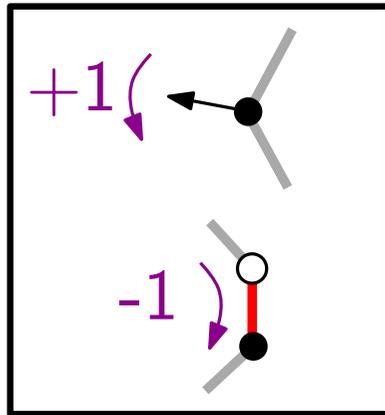
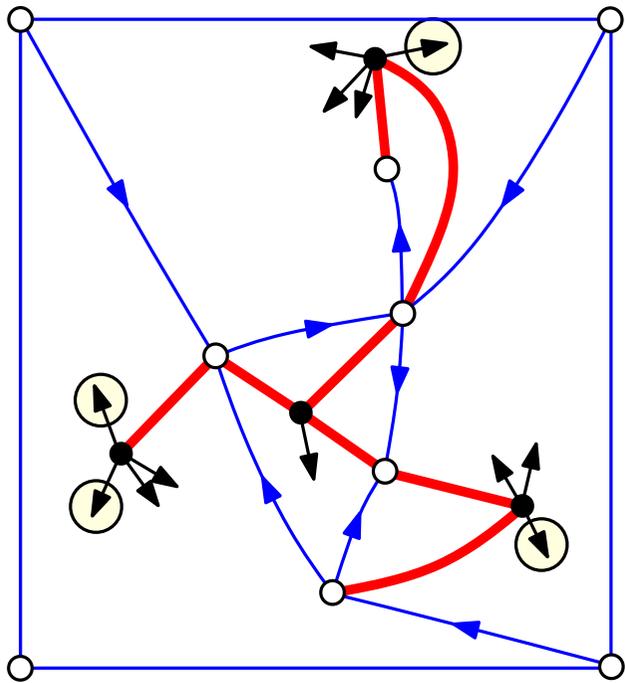
Étiquetage canonique des coins blancs

Reformulation étiquetée de la méta-bijection



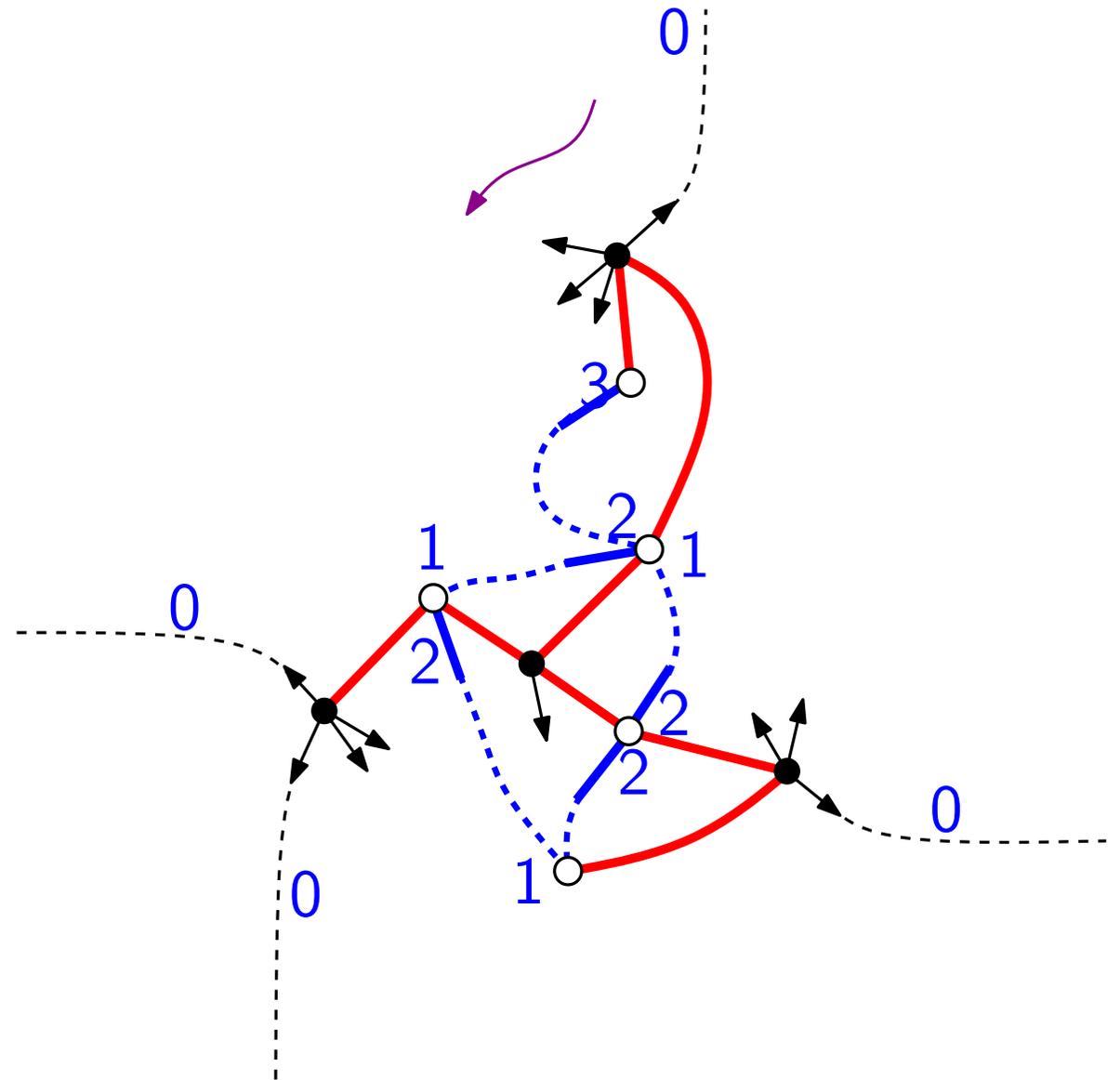
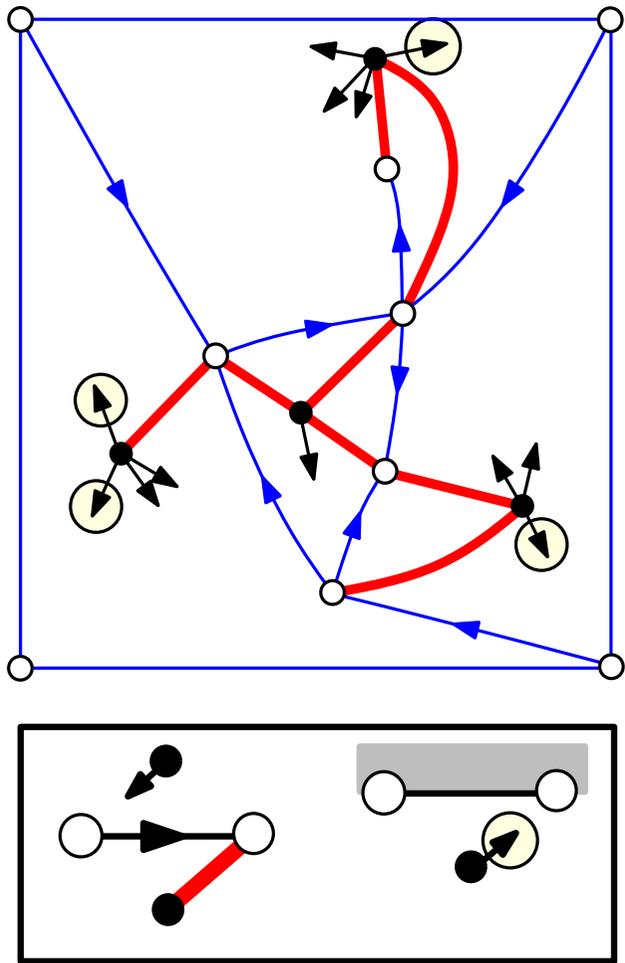
Étiquetage canonique des coins blancs

Reformulation étiquetée de la méta-bijection



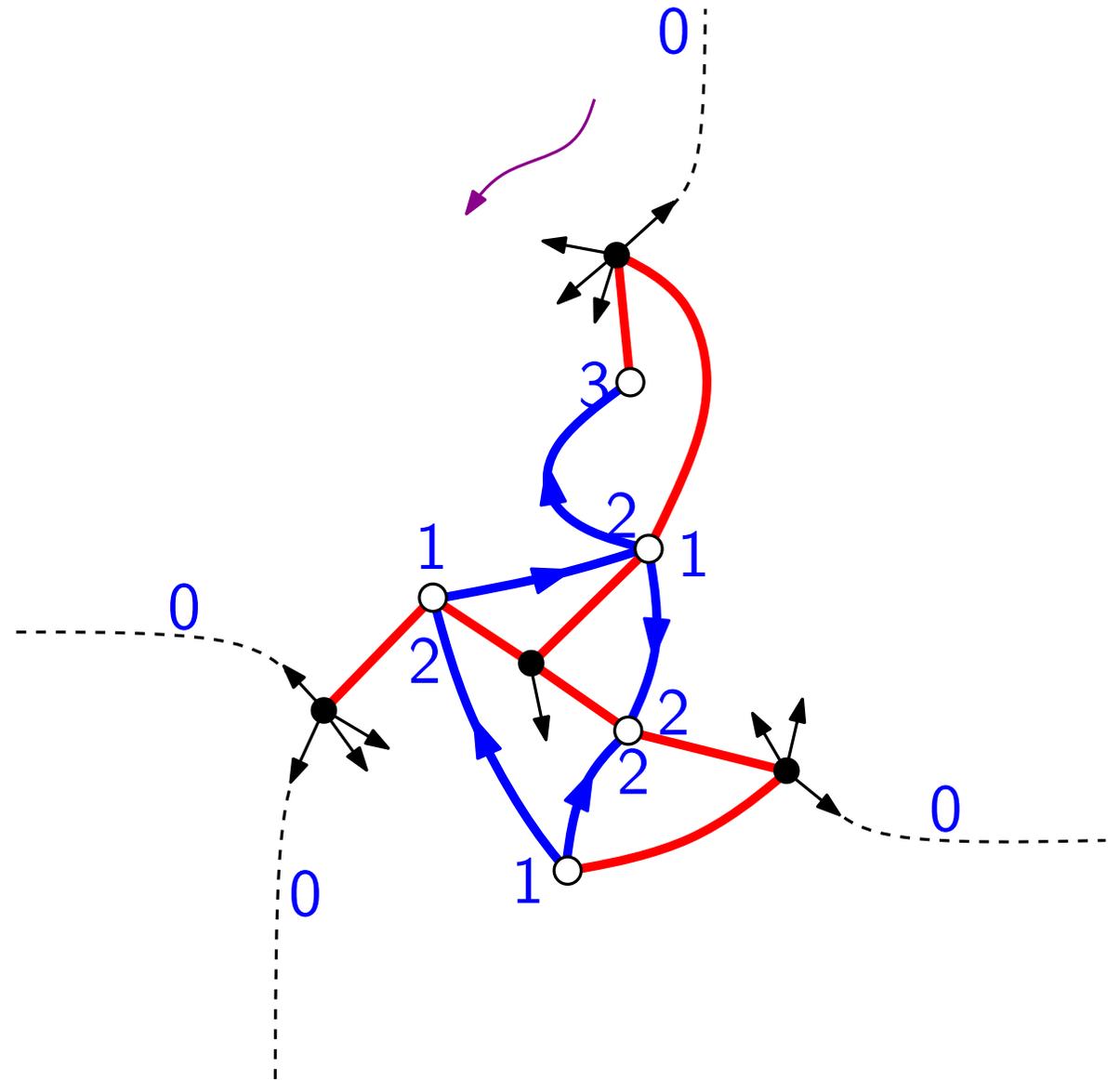
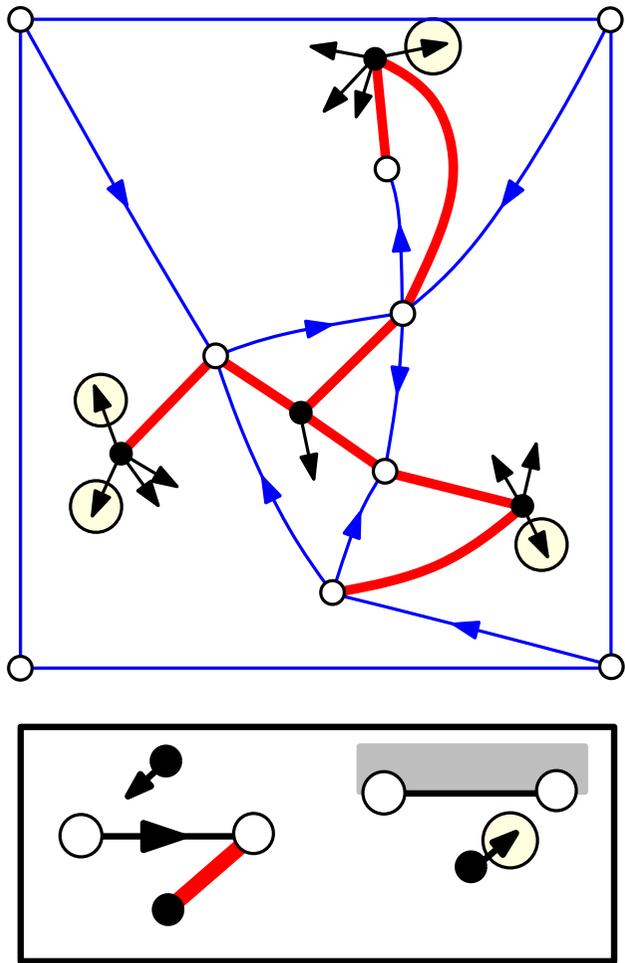
Étiquetage canonique des coins blancs

Reformulation étiquetée de la méta-bijection



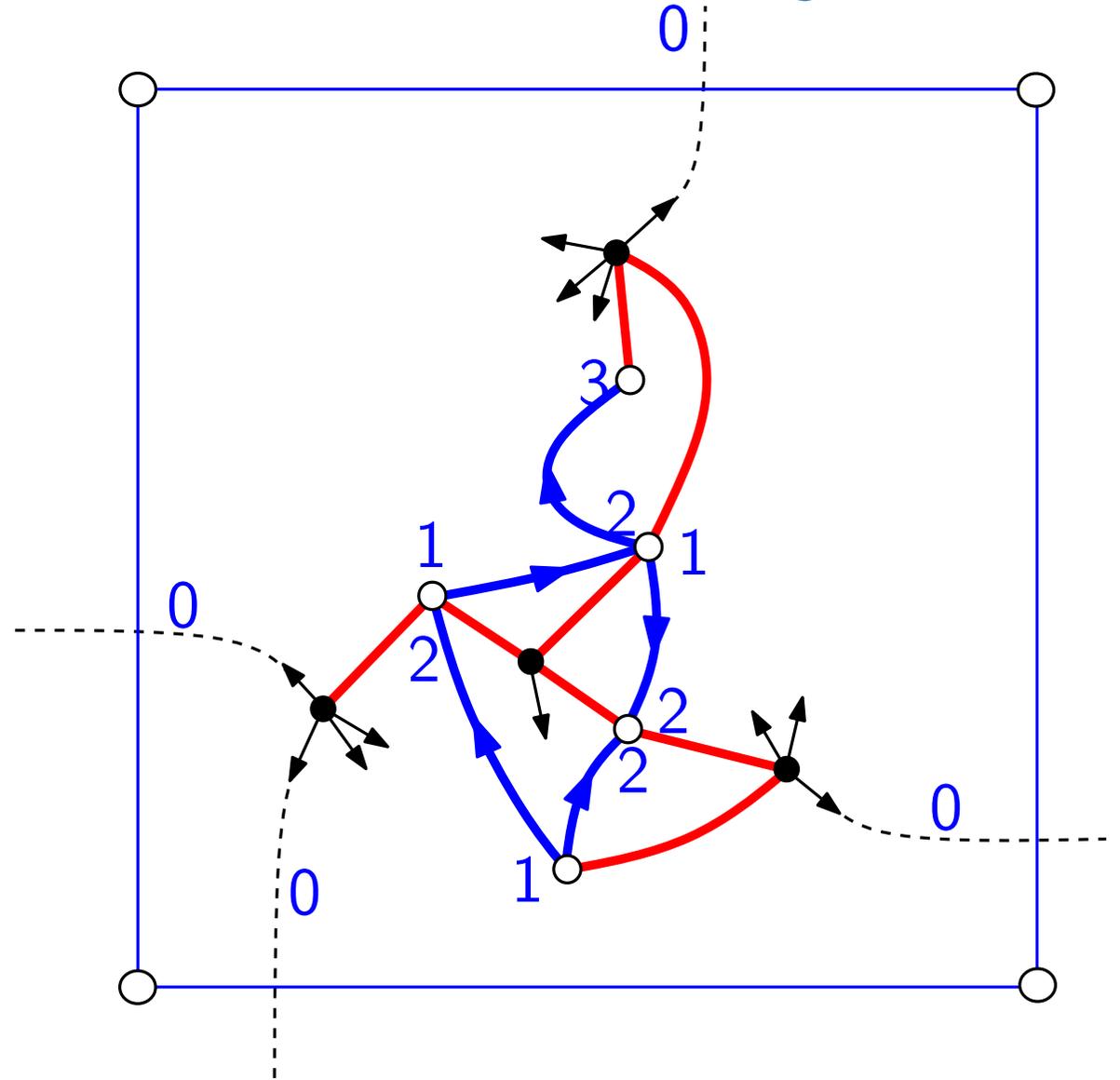
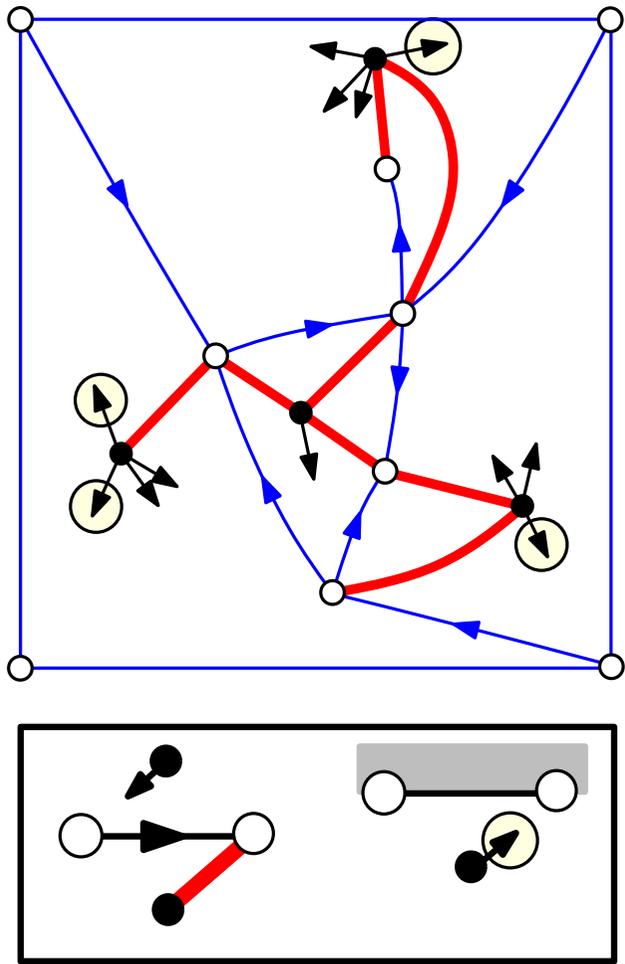
création des arêtes de la carte :
chaque coin blanc $i \geq 2$ "lance"
une arête vers le prochain coin $i-1$
(cf bijection de Schaeffer)

Reformulation étiquetée de la méta-bijection



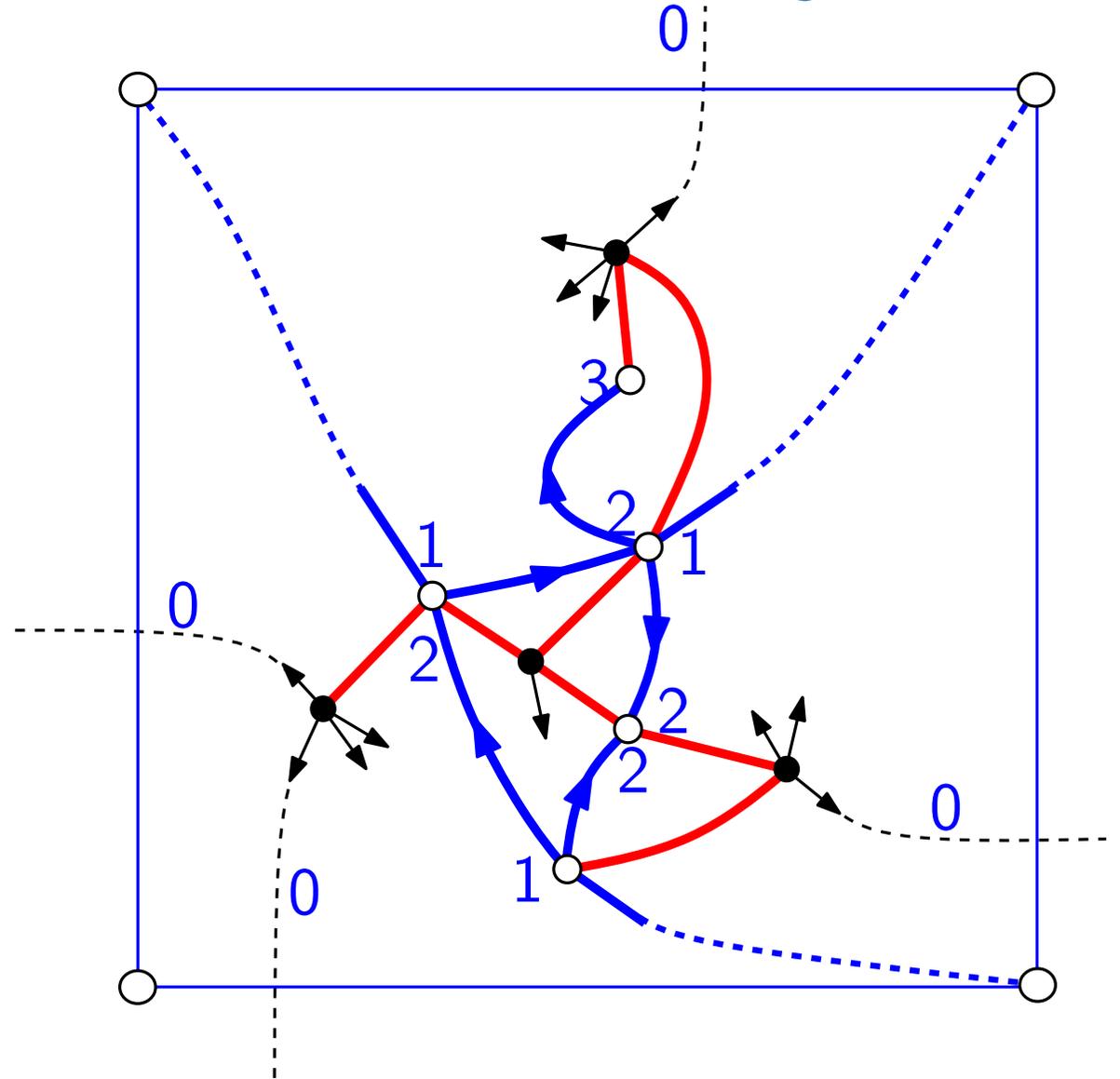
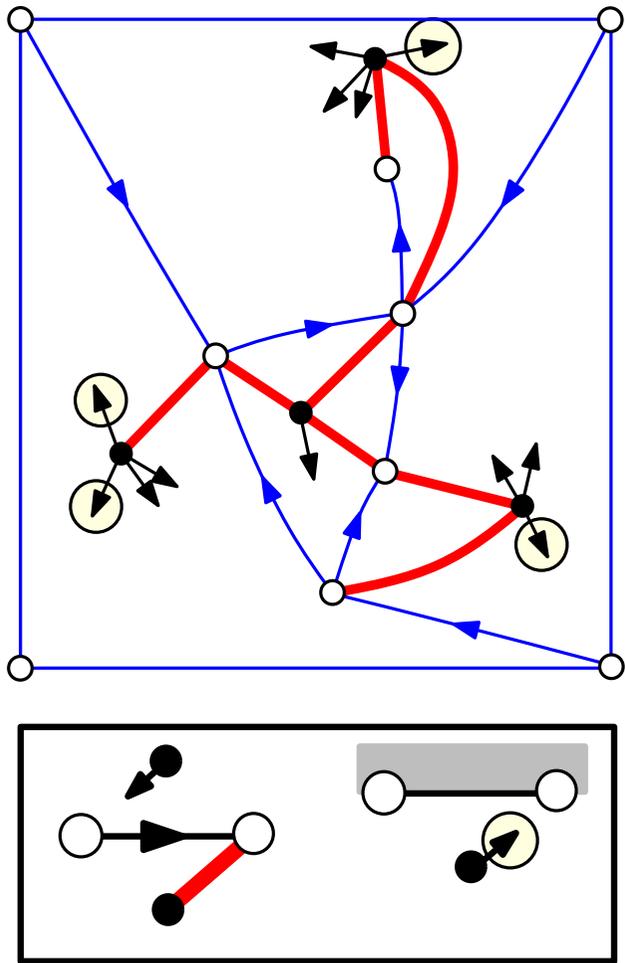
création des arêtes de la carte :
chaque coin blanc $i \geq 2$ "lance"
une arête vers le prochain coin $i-1$
(cf bijection de Schaeffer)

Reformulation étiquetée de la méta-bijection



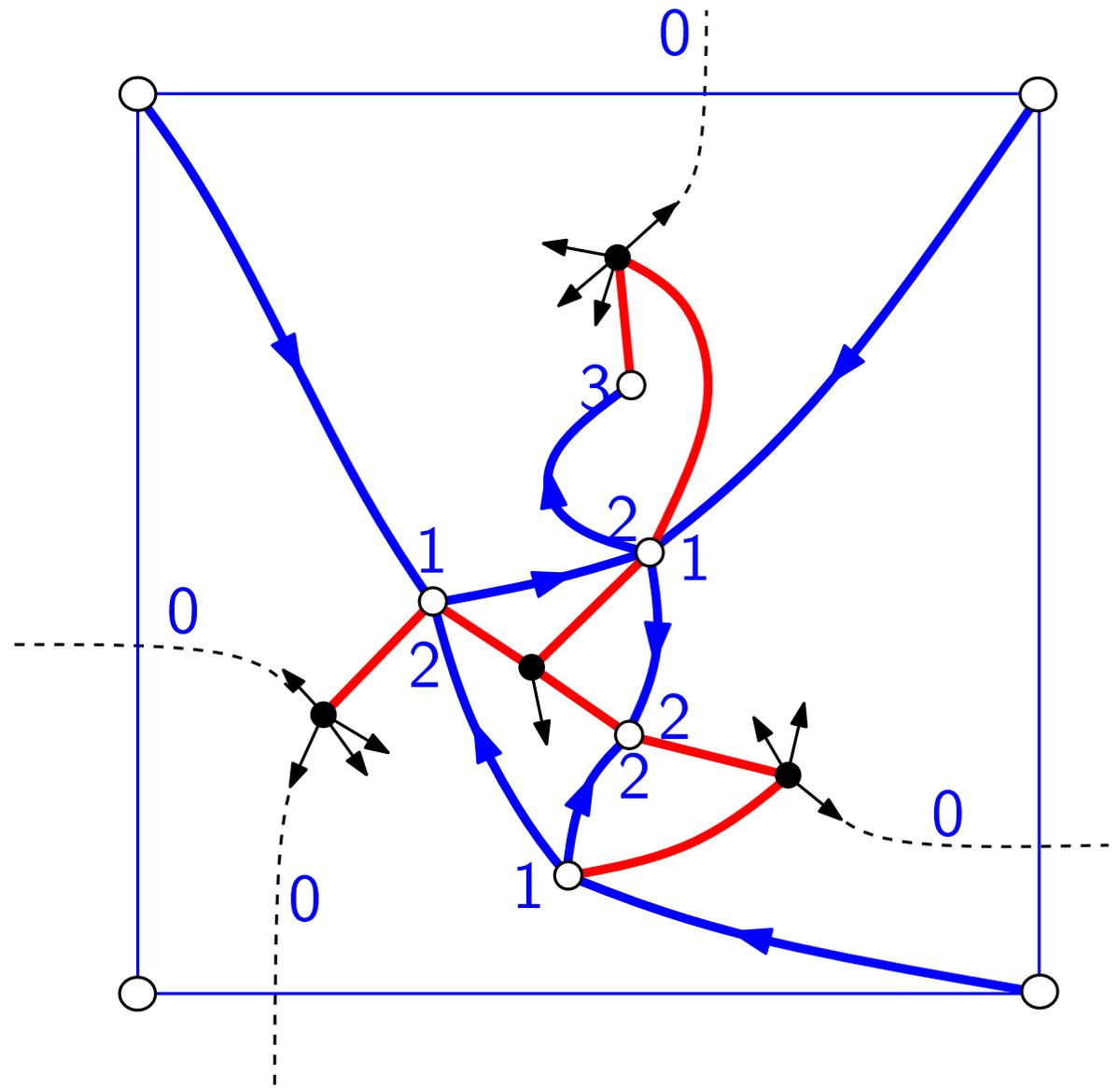
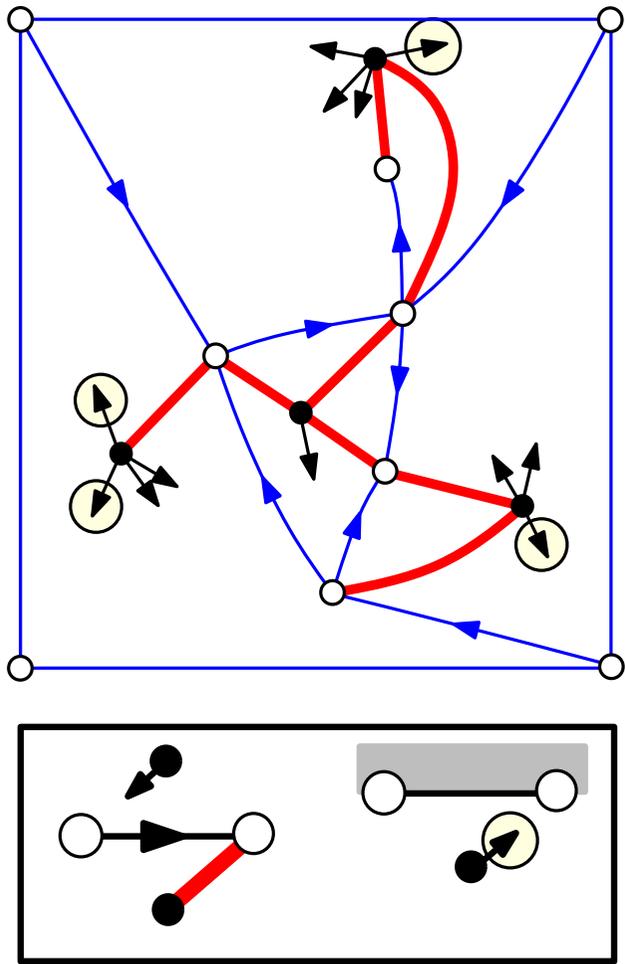
création du d -gone externe et arêtes incidentes :

Reformulation étiquetée de la méta-bijection



création du d -gone externe et arêtes incidentes :
chaque coin blanc 1 se connecte au sommet externe dans son "secteur"

Reformulation étiquetée de la méta-bijection



création du d -gone externe et arêtes incidentes :
chaque coin blanc 1 se connecte au sommet externe dans son "secteur"

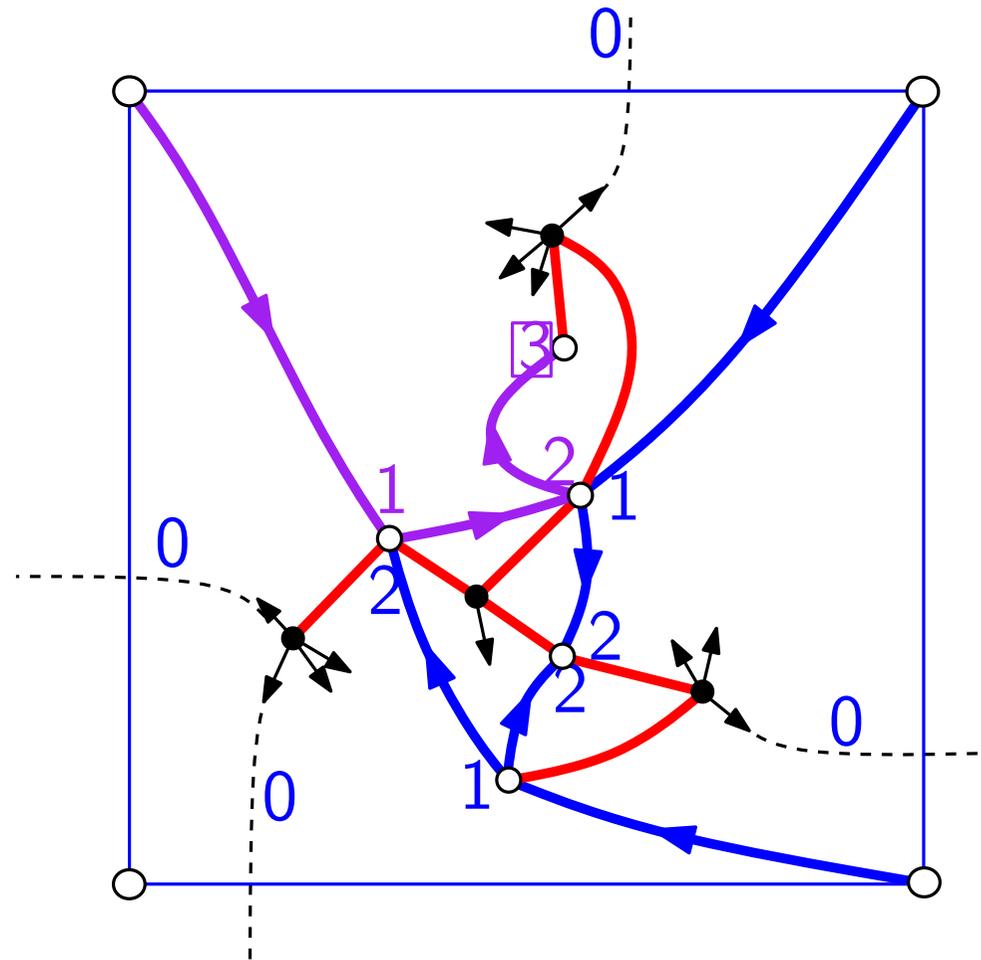
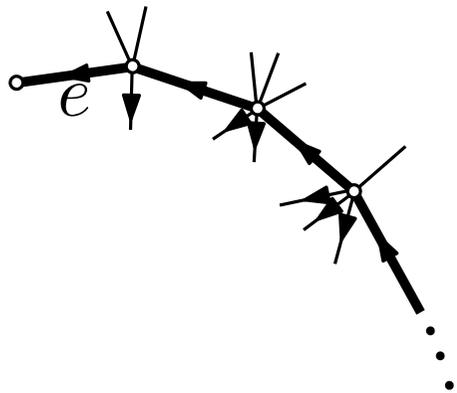
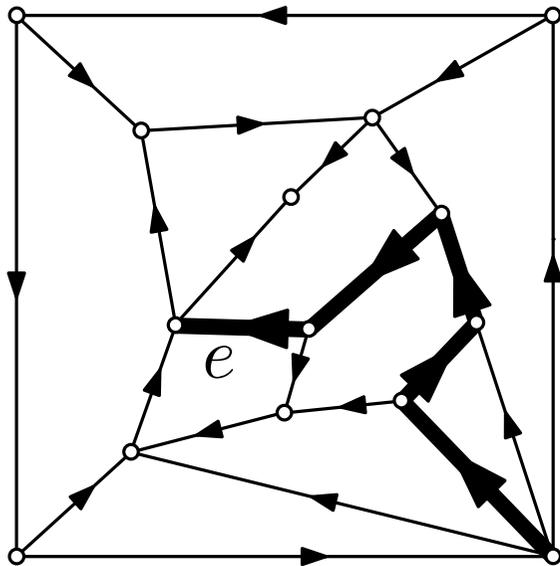
Interprétation des étiquettes

coin blanc c du mobile \longleftrightarrow

étiquette $\ell(c)$ \longleftrightarrow

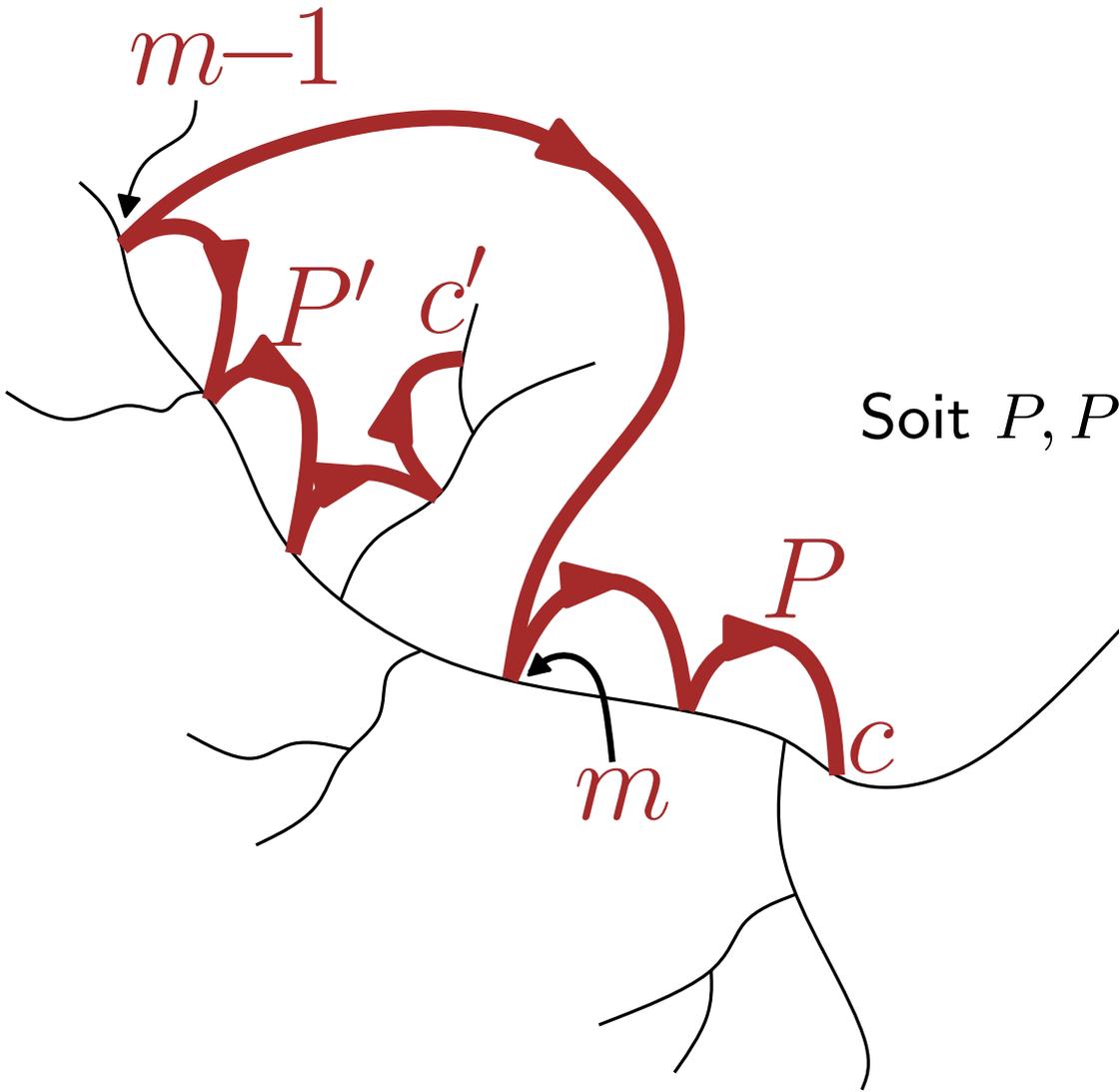
arête interne e de la carte \longleftrightarrow

longueur de $P(e)$,
où $P(e)$ est le "chemin le plus à droite"
à rebours de e vers le bord externe
(considéré dans **Bernardi'06**)



Borne pour les distances entre sommets

cf raisonnement pour la bijection de Schaeffer ([Le Gall'07])



Soit c, c' deux coins blancs

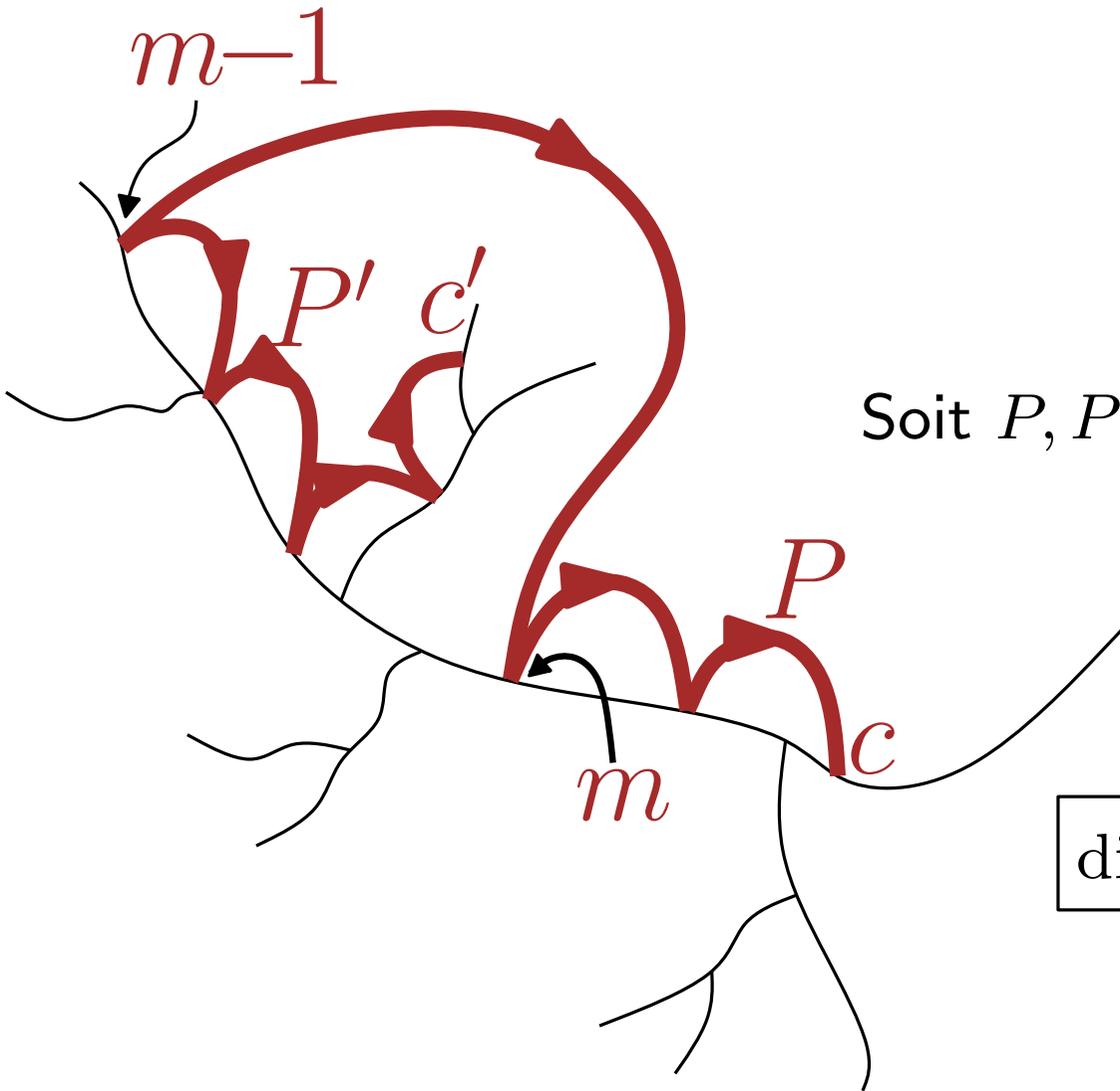
$m :=$ plus petite étiquette entre
 c et c' autour du mobile

Soit P, P' les “chemins à droite” associés à c, c'

Alors P rejoint P' en étiquette $m-1$

Borne pour les distances entre sommets

cf raisonnement pour la bijection de Schaeffer ([Le Gall'07])



Soit c, c' deux coins blancs
 $m :=$ plus petite étiquette entre
 c et c' autour du mobile

Soit P, P' les “chemins à droite” associés à c, c'

Alors P rejoint P' en étiquette $m-1$

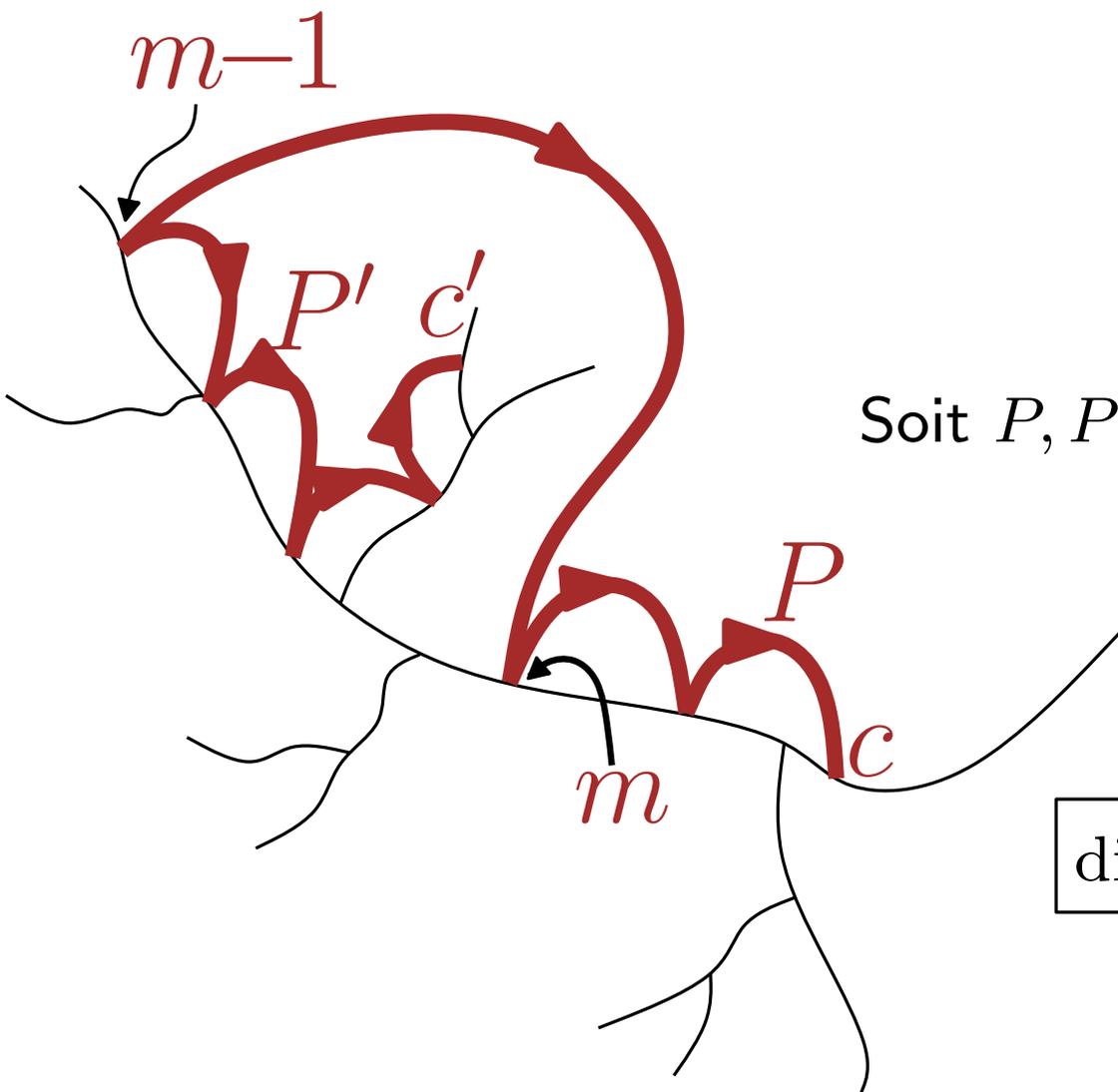
↓

$$\text{dist}(v(c), v(c')) \leq \ell(c) + \ell(c') - 2m + 2$$

(cas où $m \geq 2$)

Borne pour les distances entre sommets

cf raisonnement pour la bijection de Schaeffer ([Le Gall'07])



Soit c, c' deux coins blancs
 $m :=$ plus petite étiquette entre
 c et c' autour du mobile

Soit P, P' les “chemins à droite” associés à c, c'

Alors P rejoint P' en étiquette $m-1$

↓

$$\text{dist}(v(c), v(c')) \leq \ell(c) + \ell(c') - 2m + 2$$

(cas où $m \geq 2$)

cas général :

$$\text{dist}(v(c), v(c')) \leq \ell(c) + \ell(c') - 2m + 2 + d/2$$

où d est le degré de la face externe

Limite d'échelle de cartes aléatoires

[Le Gall'13, Miermont'13] :

Soit Q_n la quadrangulation aléatoire (uniforme) à n faces

Si on divise les distances par $(8n/9)^{1/4}$, alors Q_n (vu comme espace métrique aléatoire) converge vers un certain espace métrique aléatoire appelé la **“Carte Brownienne”**

Limite d'échelle de cartes aléatoires

[Le Gall'13, Miermont'13] :

Soit Q_n la quadrangulation aléatoire (uniforme) à n faces

Si on divise les distances par $(8n/9)^{1/4}$, alors Q_n (vu comme espace métrique aléatoire) converge vers un certain espace métrique aléatoire appelé la **“Carte Brownienne”**

[Addario-Berry&Albenque'13]

On a aussi convergence pour la triangulation simple et la quadrangulation simple aléatoire uniforme

Lemme crucial : Le chemin le plus à droite est “quasi-géodésique”

Limite d'échelle de cartes aléatoires

[Le Gall'13, Miermont'13] :

Soit Q_n la quadrangulation aléatoire (uniforme) à n faces

Si on divise les distances par $(8n/9)^{1/4}$, alors Q_n (vu comme espace métrique aléatoire) converge vers un certain espace métrique aléatoire appelé la **“Carte Brownienne”**

[Addario-Berry&Albenque'13]

On a aussi convergence pour la triangulation simple et la quadrangulation simple aléatoire uniforme

Lemme crucial : Le chemin le plus à droite est “quasi-géodésique”

Conditions suffisantes de convergence dans [Le Gall'13]

(conviennent pour des constructions bijectives “à la Schaeffer”)

Limite d'échelle de cartes aléatoires

[Le Gall'13, Miermont'13] :

Soit Q_n la quadrangulation aléatoire (uniforme) à n faces

Si on divise les distances par $(8n/9)^{1/4}$, alors Q_n (vu comme espace métrique aléatoire) converge vers un certain espace métrique aléatoire appelé la **“Carte Brownienne”**

[Addario-Berry&Albenque'13]

On a aussi convergence pour la triangulation simple et la quadrangulation simple aléatoire uniforme

Lemme crucial : Le chemin le plus à droite est “quasi-géodésique”

Conditions suffisantes de convergence dans [Le Gall'13]

(conviennent pour des constructions bijectives “à la Schaeffer”)

Conjecture : Soit $b \geq 1$ et Ω un ensemble fini d'entiers pairs, et soit $M_{b,\Omega}[n]$ la carte aléatoire bipartie de maille au moins $2b$, à n faces, et dont les degrés des faces sont dans Ω .

Alors, après renormalisation par $c_\Delta n^{1/4}$ pour un certain $c_\Delta > 0$,
 $M_{b,\Omega}[n]$ converge vers la Carte Brownienne