

Mathématiques discrètes

DUT 1 Informatique 2019-2020

Fiche de TD 1

Ensembles — 1^{re} approche

Exercice 1. ■ Des exemples

Donner des exemples d'ensembles finis et des exemples d'ensembles infinis. Dans la mesure du possible, on donnera leur cardinal (nombre d'éléments) et on les décrira de plusieurs façons.

Exercice 2. ■ Des questions

1. Décrire deux ensembles auxquels vous appartenez.
2. Existe-t-il un ensemble qui contient Jules César et vous ? Et Jules César, une fleur et vous ?
3. Une licorne peut-elle être dans un ensemble ?
4. Est-ce que 0, une pomme de terre, une université, un airbus A380 et la fonction g peuvent être dans un même ensemble ?
5. Pouvez-vous être considéré comme un ensemble ? De quoi ?
6. Êtes-vous la même chose que l'ensemble qui ne contient que vous ?
7. Puis-je considérer l'ensemble des entiers naturels comme un élément et le mettre dans le même ensemble que vous ?
8. Pouvez-vous être deux fois dans un même ensemble ?
9. Quelle est la propriété principale de l'ensemble vide ?
10. L'ensemble vide peut-il être un élément d'un autre ensemble ?
11. Au fond, que puis-je considérer comme un élément ? Et que puis-je fabriquer comme ensemble ? Est-ce que tous les ensembles sont intéressants ?
12. Un même élément peut-il appartenir à deux ensembles différents ?
13. Un ensemble peut-il être l'un de ses propres éléments ?
14. Existe-t-il un ensemble qui contient tous les ensembles ?

Exercice 3. ■ Des définitions

Pour chacune des descriptions suivantes d'ensembles, donner en notation par extension un ensemble qui la vérifie. Dire également si les descriptions suivantes définissent un ensemble de manière unique.

1. Un ensemble qui ne contient aucun élément.
2. Un ensemble qui contient trois éléments.
3. Un ensemble qui contient l'ensemble vide.
4. Un ensemble qui contient uniquement l'ensemble vide.
5. Un ensemble qui contient uniquement : l'ensemble vide et l'ensemble qui contient l'ensemble vide.

Exercice 4. ■ Des notations

1. Décrire en utilisant, dans la mesure du possible, la notation par extension, par compréhension, par formule et par intervalle les ensembles suivants. Pour chacun d'eux, préciser s'il est fini ou infini et, si possible, son cardinal.
 - (a) L'ensemble A des nombres entiers positifs inférieurs à 10.
 - (b) L'ensemble B des nombres entiers strictement inférieurs à 10.
 - (c) L'ensemble C des nombres entiers supérieurs à 10.
 - (d) L'ensemble D des réels strictement inférieurs à 10.
 - (e) L'ensemble E des nombres entiers pairs.
 - (f) L'ensemble F des points du plan cartésien.
 - (g) L'ensemble G des points du plan cartésien situés sur la droite de pente 1 passant par l'origine.
 - (h) L'ensemble H des points du plan cartésien situés sur la droite de pente k passant par l'origine, où k est un nombre réel quelconque.
 - (i) L'ensemble I des nombres divisibles par 2 (utiliser le symbole de divisibilité : $a|b$ signifie que l'entier a divise l'entier b).
 - (j) L'ensemble $J := \llbracket -27, 1973 \rrbracket$.
2. Dans les exemples précédents, y a-t-il plusieurs ensembles identiques ?
3. Quelle différence y a-t-il entre l'ensemble F et l'ensemble $\{\{x, y\} : x, y \in \mathbb{R}\}$?
4. Parmi les définitions suivantes, déterminer celles qui définissent bien des ensembles :
 - (a) $\{\}, \{1\}, \{1, 1\}, \{1, 2\}, (1, 2), \{(1, 2)\}, (\{1\}, \{2\}), \{1, \{1\}\}$;
 - (b) $J := \{w : w \text{ est un mot de la langue française}\}$;
 - (c) $K := \{w : w \text{ n'est pas un mot de la langue française}\}$;
 - (d) $L := \{E : E \text{ est un ensemble fini}\}$;
 - (e) $M := \min([0, 1])$.