

Mathématiques discrètes

DUT 1 Informatique 2018-2019

Fiche de TD 2

Logique — 1^{re} approche

Exercice 1. ■ Formuler des formules

Pour chacune des expressions suivantes, dire s'il s'agit d'une formule logique. Quand cela n'est pas le cas, en donner la raison.

- | | | |
|-----------------------------|-----------------------------|---|
| 1. $\neg P$; | 6. $P \rightarrow \neg Q$; | 11. $\neg\neg P \vee P \wedge Q \rightarrow Q$; |
| 2. $\wedge Q$; | 7. $P \leftrightarrow Q$; | 12. $() \wedge \vee PQ$; |
| 3. $\neg\neg P$; | 8. $((P \wedge (Q)))$; | 13. $(\neg R) \leftrightarrow (((\neg P) \rightarrow Q) \rightarrow P)$; |
| 4. $(\neg P)\neg Q$; | 9. $(Q) \vee \neg P$; | 14. $P \wedge Q \vee R$; |
| 5. $\neg P \rightarrow Q$; | 10. $P \vee RP$; | 15. R . |

Exercice 2. ■ Évaluations

Évaluer pas à pas les formules

- | | |
|--|---|
| 1. $(P \vee Q) \rightarrow P$; | 3. $Q \wedge (Q \rightarrow (P \vee (\neg P)))$; |
| 2. $(\neg(P \rightarrow P)) \rightarrow (P \rightarrow Q)$; | 4. $(\neg\neg P) \leftrightarrow (P \wedge Q)$; |

sous les affectations $\{P \mapsto 1, Q \mapsto 1\}$ et $\{P \mapsto 0, Q \mapsto 1\}$.

Exercice 3. ■ Tables de vérité

Dresser les tables de vérité des formules suivantes et lister leurs propriétés (satisfiable, falsifiable, valide, contradictoire).

- | | |
|--|--|
| 1. $(P \rightarrow (P \rightarrow P)) \rightarrow P$; | 3. $(R \wedge (Q \wedge P)) \leftrightarrow R$; |
| 2. $(R \vee (Q \wedge P)) \rightarrow R$; | 4. $(\neg P) \rightarrow (Q \vee P)$. |

Exercice 4. □ Du code

Dans le pseudo-code ci-contre, p , q et r sont des booléens.

Présenter, de manière adéquate, ce qu'affichent ces instructions en tenant en compte toutes les valeurs possibles que peuvent prendre les variables p , q et r .

```
if (p or q) or ((not p) and r) :  
    print("a")  
else :  
    print("b")  
if p :  
    if not q :  
        print("c")  
    else :  
        print("d")  
else :  
    print("e")
```

Exercice 5. ■ Phrases en formules

Soient P , Q et R des formules atomiques. Exprimer les phrases suivantes par des formules.

1. « Si P alors Q . »
2. « Si P alors Q sinon R . »
3. « P si Q . »
4. « P seulement si Q . »
5. « P est une condition nécessaire pour que Q soit vraie. »
6. « P est une condition suffisante pour que Q soit vraie. »
7. « P si et seulement si Q . »

Exercice 6. ■ Un ou Un

Dans chacune des phrases suivantes, le mot « un » possède un sens ambigu en français mais un sens mathématique bien précis. En effet, dans certains cas, « un » signifie « pour tout » et dans d'autres, « il existe ». Lever cette ambiguïté pour chacune des phrases suivantes.

1. « Horace suit **un** cours. »
2. « **Un** Malgache a été champion olympique de tir à l'arc. »
3. « **Un** entier naturel est pair ou impair. »
4. « **Un** enseignant-chercheur a toujours **un** nouveau sujet à étudier. »
5. « Dans **un** triangle isocèle, **une** médiane est également hauteur. »
6. « Dans **un** triangle équilatéral, **une** médiane est également hauteur. »
7. « **Un** être humain a besoin d'avoir **un** idéal. »
8. « **Un** entier est premier si **un** entier le divisant est **un** ou est lui-même. »

Exercice 7. □ Souris et chats

On suppose un univers partitionné en quatre parties :

- | | | | |
|-----------------|--------------------|--------------------|-----------------------|
| 1. chat heureux | 2. chat malheureux | 3. souris heureuse | 4. souris malheureuse |
|-----------------|--------------------|--------------------|-----------------------|

On choisit secrètement une espèce (chat ou souris) et une *attitude* (heureux ou malheureux). On dit qu'un animal est *bon* s'il a soit l'espèce choisie, soit l'attitude choisie, mais pas les deux. Sachant qu'un chat malheureux est bon, déterminez si les trois autres animaux sont bons.

Exercice 8. ■ Avec des si

Déterminer, pour chacune des phrases suivantes, si elle est vraie ou fausse :

1. « Si $0 \neq 1$ alors $1 \neq 2$. »
2. « Si $0 \neq 1$ alors $1 = 2$. »
3. « Si $0 = 1$ alors $1 = 2$. »
4. « Si $0 = 1$ alors $1 \neq 2$. »
5. « Si $0 \leq 1$ alors $2 \leq 1$. »
6. « $1 = 1$ ou $3 \leq 2$. »
7. « $1 = 3$ si et seulement si $3 \leq 2$. »
8. « $2 \leq 3$ si et seulement si $3 \geq 1$. »

Exercice 9. □ Encore avec des si

Soient u_1 , u_2 , v_1 et v_2 des nombres entiers positifs et $u := u_1 \times u_2$ et $v := v_1 \times v_2$. Pour chacune des phrases suivantes, dire si elles sont vraies ou fausses. Exhiber un contre-exemple pour chaque phrase fausse.

1. « Si $u = v$ alors $(u_1 = v_1 \text{ et } u_2 = v_2)$. »
2. « Si $u = v$ alors $(u_1 \neq v_1 \text{ ou } u_2 = v_2)$. »
3. « Si $u \neq v$ alors $(u_1 \neq v_1 \text{ et } u_2 \neq v_2)$. »
4. « Si $u \neq v$ alors $(u_1 \neq v_1 \text{ ou } u_2 \neq v_2)$. »
5. « $v_1 \neq u_1$ ou $v_2 = u_2$ ou $u \neq v$. »
6. « Si $u \neq v$ alors $(u_1 = v_1 \text{ et } u_2 \neq v_2)$. »
7. « Si $v_1 = u_1$ alors $(v_2 = u_2 \text{ ou } u \neq v)$. »
8. « Si $(v_2 \neq u_2 \text{ et } u = v)$ alors $v_1 \neq u_1$. »

Exercice 10. ■ Réciproque et contraposée

1. Écrire la réciproque et la contraposée de chacune des formules sous forme d'implications suivantes.

- | | |
|--------------------------------|---|
| (a) $P \rightarrow (\neg Q)$; | (c) $(P \rightarrow R) \rightarrow (R \rightarrow Q)$; |
| (b) $(\neg P) \rightarrow Q$; | (d) $(P \vee R) \rightarrow (P \wedge Q)$. |

2. Démontrer qu'une formule en forme d'implication est toujours équivalente à sa contraposée.
3. Démontrer qu'en général, une formule en forme d'implication n'est pas équivalente à sa réciproque.

Exercice 11. ■ Interprétations de formules

Soient P et Q deux symboles de relation d'arité deux. Soient les formules avec quantificateurs suivantes :

1. $\forall x \forall y (P(x, y) \wedge Q(x, y))$;
2. $(\exists x P(x, x)) \vee (\forall x \neg P(x, x))$.

Donner pour chacune d'elles, dans la mesure du possible, une interprétation qui la rend vraie et une autre qui la rend fausse.

Exercice 12. □ Langage fleuri

On considère un langage avec des symboles de relation unaires tels que *humain*, *raison*, *poisson*, *enfant*, etc. et des symboles de relation binaires tels que *gentil*, *ami*, *ennemi*, *aime*, etc. Les variables sont supposées représenter des êtres vivants (humains, poissons, plantes, etc.). Traduire chacune des phrases suivantes en formules avec quantificateurs.

1. « Tous les êtres humains sont doués de raison. »
2. « Seuls les êtres humains sont doués de raison. »
3. « Aucune fleur n'est douée de raison. »
4. « Tous les poissons, sauf les requins, sont gentils avec les enfants. »
5. « Tout le monde aime quelqu'un et personne n'aime tout le monde. »
6. « Toute personne a au moins un ami et un ennemi. »
7. « N'importe qui peut apprendre la logique, s'il travaille assez. »

Exercice 13. ■ Loups colorés

Dans notre univers, il existe des loups qui peuvent être verts, bleus ou rouges (remarquez que rien ne garantit qu'il y ait au moins un loup de chaque couleur). Et ces loups peuvent être malades ou en bonne santé. Chaque loup possède exactement une couleur parmi les trois données et un état parmi les deux présentés. De plus, les lois physiques de notre univers imposent qu'un loup vert est forcément malade et qu'un loup en bonne santé est toujours rouge. On considère de plus les phrases suivantes.

- (a) « Si un loup est vert alors il est malade. » bleu. »
 (b) « Si un loup est malade alors il est vert. » (f) « Si un loup est bleu, alors soit il est rouge,
 (c) « Un loup en bonne santé n'est pas vert. » soit il n'est pas rouge. »
 (d) « Si un loup est rouge et vert alors il est ma- (g) « Un loup bleu est malade. »
 lade et en bonne santé. » (h) « Un loup est rouge ou malade. »
 (e) « Si un loup n'est ni rouge ni vert alors il est (i) « Un loup est soit vert soit en bonne santé. »

1. Pour chacune des phrases énoncées, dire si elle est intuitivement vraie ou fausse et le justifier.
2. Modéliser la situation générale par un diagramme de Venn et vérifier les intuitions de la questions précédente.
3. Définir un ensemble de symboles de relation qui permettent d'exprimer ces phrases en formules logiques.
4. Traduire ces phrases en formules avec quantificateurs, en utilisant les symboles de relation précédents.

Exercice 14. □ En mer

Voici un texte emprunté à Lewis Carroll :

Aucune des choses que quelqu'un rencontre en mer et qu'il ne remarque pas n'est une sirène. Les choses qui sont rencontrées en mer et qu'on inscrit sur le livre de bord sont toujours dignes d'intérêt. Personnellement, je n'ai jamais rien rencontré, au cours de mes voyages en mer, qui soit digne d'intérêt. Les choses que quelqu'un rencontre en mer et qu'il remarque sont toujours inscrites sur le livre de bord.

1. Exprimer par des formules avec quantificateurs chacune des phrases de ce texte. Définir pour cela en premier lieu un langage et son interprétation.
2. Expliquer ce que l'on peut dire sur les choses rencontrées en mer. Formaliser la réponse.
3. Expliquer ce que l'on peut dire du livre de bord du narrateur.