

Une promenade autour des termes, des opérades et des clones

Samuele Giraud

LIGM, Université Gustave Eiffel

Département d'informatique de l'UQAM

2 décembre 2021

Plan

1. Contexte général

2. Quelques résultats et projets

2.1 Évitement de motifs dans les termes

2.2 Systèmes de réécriture de termes

3. Conclusion et quelques autres projets

1. Contexte général

Quelques objets combinatoires

– Mots –

Soit $A := \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ un alphabet et A^* la collection combinatoire des **mots** sur A où la taille d'un mot est sa longueur.

$$A^*(0) = \{\epsilon\}, \quad A^*(1) = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}, \quad A^*(2) = \{\mathbf{aa}, \mathbf{ab}, \mathbf{ba}, \mathbf{bb}\}.$$

– Permutations –

Soit \mathfrak{S} la collection combinatoire des **permutations** où la taille d'une permutation est sa longueur en tant que mot.

$$\mathfrak{S}(0) = \{\epsilon\}, \quad \mathfrak{S}(1) = \{1\}, \quad \mathfrak{S}(2) = \{12, 21\}, \quad \mathfrak{S}(3) = \{123, 132, 213, 231, 312, 321\}.$$

– Arbres binaires –

Soit \mathfrak{B} la collection combinatoire des **arbres binaires** où la taille d'un arbre binaire est son nombre de nœuds internes.

$$\mathfrak{B}(0) = \left\{ \square \right\}, \quad \mathfrak{B}(1) = \left\{ \begin{array}{c} \circ \\ \swarrow \quad \searrow \\ \square \quad \square \end{array} \right\}, \quad \mathfrak{B}(2) = \left\{ \begin{array}{c} \circ \\ \swarrow \quad \searrow \\ \begin{array}{c} \circ \\ \swarrow \quad \searrow \\ \square \quad \square \end{array} \quad \begin{array}{c} \circ \\ \swarrow \quad \searrow \\ \square \quad \square \end{array} \end{array} \right\}, \quad \mathfrak{B}(3) = \left\{ \begin{array}{c} \circ \\ \swarrow \quad \searrow \\ \begin{array}{c} \circ \\ \swarrow \quad \searrow \\ \begin{array}{c} \circ \\ \swarrow \quad \searrow \\ \square \quad \square \end{array} \quad \square \end{array} \quad \begin{array}{c} \circ \\ \swarrow \quad \searrow \\ \begin{array}{c} \circ \\ \swarrow \quad \searrow \\ \square \quad \square \end{array} \quad \begin{array}{c} \circ \\ \swarrow \quad \searrow \\ \square \quad \square \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{c} \circ \\ \swarrow \quad \searrow \\ \begin{array}{c} \circ \\ \swarrow \quad \searrow \\ \square \quad \square \end{array} \quad \begin{array}{c} \circ \\ \swarrow \quad \searrow \\ \square \quad \square \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{c} \circ \\ \swarrow \quad \searrow \\ \begin{array}{c} \circ \\ \swarrow \quad \searrow \\ \square \quad \square \end{array} \quad \begin{array}{c} \circ \\ \swarrow \quad \searrow \\ \square \quad \square \end{array} \end{array} \right\}.$$

Collections combinatoires

Une **collection combinatoire (CC)** est un ensemble C muni d'une application

$$| - | : C \rightarrow \mathbb{N}$$

telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $C(n) := \{x \in C : |x| = n\}$ est fini.

Pour tout $x \in C$, on note $|x|$ la **taille** de x .

– Questions habituelles –

1. **Dénombrer** les éléments de $C(n)$.
2. **Engendrer exhaustivement** les éléments de $C(n)$.
3. **Engendrer aléatoirement** un élément de $C(n)$.
4. **Établir des transformations** entre C et une CC C' .

– Exemples –

1. $\#\mathcal{B}(n) = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$;
2. Codes de Gray sur les arbres binaires [Proskurowski, Ruskey, 1985];
3. Algorithme de Rémy [Rémy, 1985];
4. Insertion de $\sigma \in \mathfrak{S}(n)$ dans un arbre binaire de recherche.

Séries génératrices

La **série génératrice** [de Moivre, 1730] [Euler, ~1750] d'une collection combinatoire C est

$$\mathcal{G}_C(z) := \sum_{n \in \mathbb{N}} \#C(n)z^n = \#C(0) + \#C(1)z + \#C(2)z^2 + \#C(3)z^3 + \dots$$

– Exemples –

- $\mathcal{G}_{A^*}(z) = 1 + 2z + 4z^2 + 8z^3 + 16z^4 + 32z^5 + \dots = \frac{1}{1-2z}$ (suite **A000079** – puissances de 2).
- $\mathcal{G}_{\mathbb{S}}(z) = 1 + z + 2z^2 + 6z^3 + 24z^4 + 120z^5 + \dots = \int_0^\infty \frac{\exp(-x)}{1-xz} dx$ (suite **A000142** – nombres factoriels).
- $\mathcal{G}_{\mathbb{B}}(z) = 1 + z + 2z^2 + 5z^3 + 14z^4 + 42z^5 + \dots = \frac{1 - \sqrt{1-4z}}{2z}$ (suite **A000108** – nombres de Catalan).

De nombreuses opérations sur les collections combinatoires se traduisent en des opérations naturelles sur les séries génératrices.

Un autre formalisme très expressif a été développé par l'école Québécoise de combinatoire sous le nom d'**espèce de structure** [Joyal, 1981], [F. Bergeron, Labelle, Leroux, 1998].

Objets, opérations et structures

– Idée I –

Munir C d'**opérations** pour en faire une structure algébrique.

L'étude algébrique de C munie de ses opérations aide à la découverte de propriétés combinatoires.

En particulier

1. familles génératrices minimales de C

↪ mise en évidence des **pièces de base** pour constituer les objets ;

2. morphismes impliquant C

↪ **algorithmes de transformation** et mise en évidence de **symétries**.

Dans notre contexte, les structures les plus courantes sont

■ les treillis ;

■ les bigèbres de Hopf ;

■ les pros ;

■ les monoïdes ;

■ les opérades ;

■ les clones.

Séries formelles

– Idée II –

Travailler avec des **séries d'objets** de C .

Toute opération \star définie sur C s'étend en une opération $\bar{\star}$ sur les séries formelles d'objets de C . Elles permettent d'obtenir des **expressions** pour \mathbf{f}_C , la somme formelle de tous les éléments de C

– Exemple –

Il est connu que $\mathcal{G}_{\mathfrak{B}}(z)$ vérifie $\mathcal{G}_{\mathfrak{B}}(z) = 1 + z\mathcal{G}_{\mathfrak{B}}(z)^2$.

Pour l'expliquer, cherchons une expression pour la série

$$\mathbf{f}_{\mathfrak{B}} = \underbrace{\downarrow}_{1z^0} + \underbrace{\begin{array}{c} \circ \\ \downarrow \downarrow \end{array}}_{1z^1} + \underbrace{\begin{array}{c} \circ \quad \circ \\ \downarrow \downarrow \quad \downarrow \downarrow \end{array}}_{2z^2} + \underbrace{\begin{array}{c} \circ \quad \circ \quad \circ \\ \downarrow \downarrow \quad \downarrow \downarrow \quad \downarrow \downarrow \end{array} + \begin{array}{c} \circ \quad \circ \\ \downarrow \downarrow \quad \downarrow \downarrow \end{array} + \begin{array}{c} \circ \quad \circ \quad \circ \\ \downarrow \downarrow \quad \downarrow \downarrow \quad \downarrow \downarrow \end{array} + \begin{array}{c} \circ \quad \circ \quad \circ \\ \downarrow \downarrow \quad \downarrow \downarrow \quad \downarrow \downarrow \end{array} + \begin{array}{c} \circ \quad \circ \quad \circ \\ \downarrow \downarrow \quad \downarrow \downarrow \quad \downarrow \downarrow \end{array}}_{5z^3} + \dots$$

La collection combinatoire \mathfrak{B} est munie d'une opération \star telle que $t_1 \star t_2$ est l'arbre binaire ayant t_1 (resp. t_2) comme sous-arbre gauche (resp. droit). On en déduit l'expression de $\mathbf{f}_{\mathfrak{B}}$ suivante

$$\mathbf{f}_{\mathfrak{B}} = \downarrow + \mathbf{f}_{\mathfrak{B}} \bar{\star} \mathbf{f}_{\mathfrak{B}}.$$

Par spécialisation, on en déduit l'expression précédente pour $\mathcal{G}_{\mathfrak{B}}(z)$.

Structure d'opérade

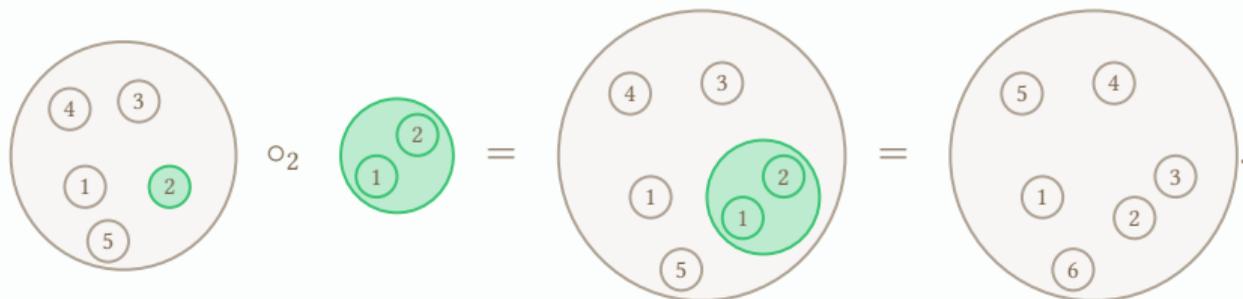
Les opérades sont des structures très prometteuses pour munir des collections combinatoires d'opérations.

Une **opérade** [May, 1972] [Boardman, Vogt, 1973] \mathcal{O} est une collection combinatoire \mathcal{O} munie d'une opération

$$\circ_i : \mathcal{O}(n) \times \mathcal{O}(m) \rightarrow \mathcal{O}(n + m - 1), \quad n, m \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

vérifiant des relations de cohérence.

Intuition : pour tout $x, y \in \mathcal{O}$, $x \circ_i y$ peut être vu comme l'insertion de y dans le i^{e} secteur de substitution de x :



Quelques opérades

– Opérade sur les mots –

Soit $A := \{0, \dots, \ell - 1\}$ un alphabet avec $\ell \geq 1$. Soit sur A^* l'opérade dans laquelle $u \circ_i v$ est obtenu en remplaçant la lettre u_i de u par une copie de v où toute lettre $a \in A$ est transformée en $u_i + a \pmod{\ell}$ [G., 2015].

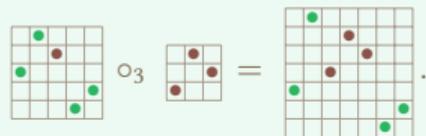
$$\ell := 3,$$

$$100210 \circ_5 1022 = 100221000.$$

– Opérade sur les permutations –

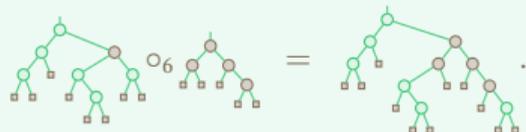
Soit sur \mathfrak{S} l'opérade dans laquelle $\sigma \circ_i \nu$ est la permutation dont la matrice est obtenue en remplaçant le i^{e} point de la matrice de σ par une copie de la matrice de ν [Aguiar, Livernet, 2007].

$$35412 \circ_3 132 = 3746512,$$



– Opérade sur les arbres binaires –

Soit sur \mathfrak{B} l'opérade dans laquelle $t \circ_i s$ est obtenu en remplaçant le i^{e} nœud u (pour l'ordre infixé) de t par une copie de s et en greffant le sous-arbre gauche (resp. droit) de u sur la première (resp. dernière) feuille de la copie [Brouder, Frabetti, 2003].



Génération des arbres binaires équilibrés

Un arbre binaire est **équilibré** [Adelson-Velsky, Landis, 1962] si pour chacun de ses nœuds, la différence absolue de hauteur de ses sous-arbres est d'au plus 1.

Ces arbres sont dénombrés par 1, 1, 2, 1, 4, 6, 4, 17, 32, 44, 60, 70, ... (suite **A006265**).

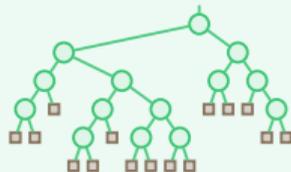
La grammaire ayant les quatre règles

$$\begin{array}{c} \square \\ | \\ 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \circ \\ / \quad \backslash \\ \square \quad \square \\ | \quad | \\ 1 \quad 1 \end{array} + \begin{array}{c} \circ \\ / \quad \backslash \\ \square \quad \square \\ | \quad | \\ 1 \quad 2 \end{array} + \begin{array}{c} \circ \\ / \quad \backslash \\ \square \quad \square \\ | \quad | \\ 2 \quad 1 \end{array}, \quad \begin{array}{c} \square \\ | \\ 2 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \square \\ | \\ 1 \end{array}$$

et basée sur des **opérandes colorées** [G., 2012], [G., 2019] a comme langage ces arbres.

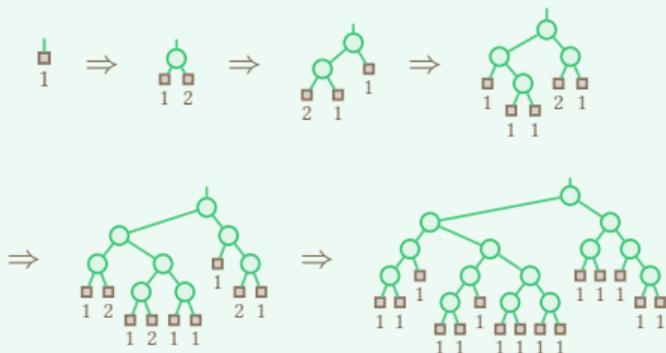
Nous pouvons en extraire la série génératrice $F(z, 0)$ où $F(z, q) = z + F(z^2 + 2zq, z)$.

– Exemple –



est un arbre binaire équilibré de taille 14.

– Exemple –



Structure de clone

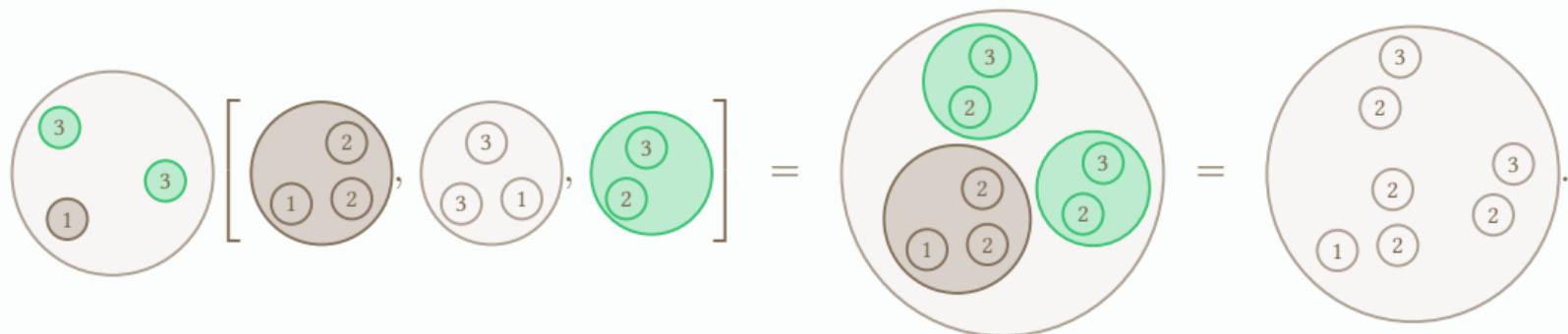
Les clones sont des structures généralisant les opérades dans lesquelles les éléments peuvent avoir des secteurs de substitution égaux.

Un **clone** [Cohn, 1965] \mathcal{C} est une collection combinatoire \mathcal{C} munie d'une opération

$$-[-, \dots, -] : \mathcal{C}(n) \times \mathcal{C}(m)^n \rightarrow \mathcal{C}(m), \quad n, m \in \mathbb{N},$$

vérifiant des relations de cohérence.

Intuition : pour tout $x \in \mathcal{C}(n)$ et $y_1, \dots, y_n \in \mathcal{C}(m)$, $x[y_1, \dots, y_m]$ peut être vu comme l'insertion simultanée de tous les y_i dans les i^{es} secteurs de substitution de x :



Termes 1 / 2

Une **signature** est un ensemble $\mathcal{G} := \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{G}(n)$ dans lequel chaque $\mathbf{a} \in \mathcal{G}(n)$ est une **constante** d'arité n .

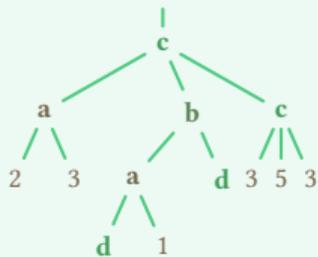
Un \mathcal{G} -**terme** est

- soit une **variable** x de l'ensemble $\mathbb{X} := \{x_1, x_2, \dots\}$;
- soit un couple $(\mathbf{a}, (t_1, \dots, t_n))$ où $\mathbf{a} \in \mathcal{G}(n)$ et chaque t_i est un \mathcal{G} -terme.

L'ensemble des \mathcal{G} -termes est noté $\mathcal{T}(\mathcal{G})$.

Chaque variable x_n est notée simplement par n .

- Exemple -



Ceci est la représentation en arbre du \mathcal{G} -terme

$$(c, ((a, (2, 3)), (b, ((a, ((d, ()), 1)), (d, ())), (c, (3, 5, 3))))$$

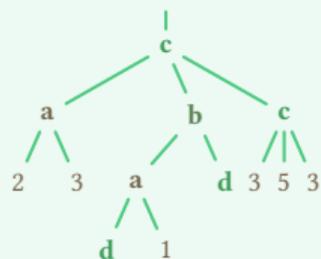
où $\mathcal{G} := \mathcal{G}(0) \sqcup \mathcal{G}(2) \sqcup \mathcal{G}(3)$ avec $\mathcal{G}(0) := \{\mathbf{d}\}$, $\mathcal{G}(2) := \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ et $\mathcal{G}(3) := \{\mathbf{c}\}$.

Termes 2 / 2

La **frontière** d'un \mathcal{G} -terme t est la suite de ses variables dans leur ordre d'apparition.

L'**arité de base** de t est la plus grande de ses variables, son **arité** est la longueur de sa frontière et son **degré** est son nombre de nœuds internes.

– Exemple –



Ceci est un terme sur $\mathcal{G} := \mathcal{G}(0) \sqcup \mathcal{G}(2) \sqcup \mathcal{G}(3)$ où $\mathcal{G}(0) := \{\mathbf{d}\}$, $\mathcal{G}(2) := \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ et $\mathcal{G}(3) := \{\mathbf{c}\}$.

Sa frontière est $(2, 3, 1, 3, 5, 3)$.

Son arité de base est 5, son arité est 6 et son degré est 7.

Un terme t est

- **plan** si sa frontière est $(1, \dots, n)$.
- **clos** si son arité est 0.

L'ensemble des \mathcal{G} -termes plans est noté $\mathcal{T}_P(\mathcal{G})$;

L'ensemble des \mathcal{G} -termes clos est noté $\mathcal{T}_C(\mathcal{G})$.

Opérades libres

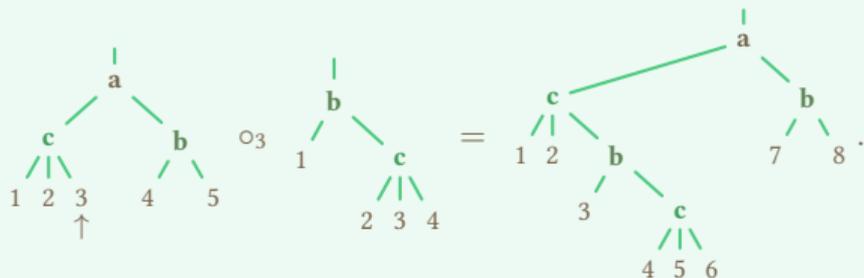
Soit \mathcal{G} une signature.

L'**opérade libre** sur \mathcal{G} est l'opérade $\mathcal{T}_P(\mathcal{G})$ telle que

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{T}_P(\mathcal{G})(n)$ est l'ensemble des \mathcal{G} -termes plans d'arité n ;
- le \mathcal{G} -terme $\mathbf{t} \circ_i \mathbf{s}$ est obtenu en remplaçant la variable i de \mathbf{t} par une copie de \mathbf{s} , puis en renumérotant par $(1, 2, \dots)$ la frontière;
- $\mathbf{1}$ est le \mathcal{G} -terme $\begin{array}{c} | \\ 1 \end{array}$.

– Exemple –

En posant $\mathcal{G} := \mathcal{G}(2) \sqcup \mathcal{G}(3)$ où $\mathcal{G}(2) := \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ et $\mathcal{G}(3) := \{\mathbf{c}\}$, nous avons dans l'opérade libre $\mathcal{T}_P(\mathcal{G})$,



Clones libres

Soit \mathcal{G} une signature.

Le **clone libre** sur \mathcal{G} est le clone $\mathcal{F}(\mathcal{G})$ tel que

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{F}(\mathcal{G})(n)$ est l'ensemble des \mathcal{G} -termes dont les variables sont inférieures à n ;
- le \mathcal{G} -terme $t[\mathfrak{s}_1, \dots, \mathfrak{s}_n]$ est obtenu en remplaçant simultanément toutes les occurrences de i dans t par des copies de \mathfrak{s}_i ;
- $\mathbf{1}_n$ est le \mathcal{G} -terme $\begin{array}{c} | \\ n \end{array}$.

- Exemple -

En posant $\mathcal{G} := \mathcal{G}(2) \sqcup \mathcal{G}(3)$ où $\mathcal{G}(2) := \{a, b\}$ et $\mathcal{G}(3) := \{c\}$, nous avons dans le clone libre $\mathcal{F}(\mathcal{G})$,

$$\begin{array}{c} | \\ c \\ / \quad \backslash \\ 3 \quad 1 \\ / \quad \backslash \\ a \quad 3 \\ / \quad \backslash \\ 1 \quad 1 \end{array} \left[\begin{array}{c} | \\ a \\ / \quad \backslash \\ 1 \quad 2 \\ / \quad \backslash \\ a \quad 2 \\ / \quad \backslash \\ 1 \quad 2 \end{array}, \begin{array}{c} | \\ b \\ / \quad \backslash \\ 2 \quad 2 \\ / \quad \backslash \\ 2 \quad 2 \end{array}, \begin{array}{c} | \\ b \\ / \quad \backslash \\ 2 \quad 1 \\ / \quad \backslash \\ 2 \quad 1 \end{array} \right] = \begin{array}{c} | \\ c \\ / \quad \backslash \quad \backslash \\ b \quad a \quad a \\ / \quad \backslash \quad / \quad \backslash \quad / \quad \backslash \\ 2 \quad 1 \quad a \quad b \quad a \\ / \quad \backslash \quad / \quad \backslash \quad / \quad \backslash \\ 1 \quad 2 \quad 2 \quad 1 \quad a \quad 2 \\ / \quad \backslash \quad / \quad \backslash \\ 1 \quad 2 \quad 1 \quad 2 \end{array} .$$

Retour aux collections combinatoires

Soit C une **collection combinatoire à étudier**.

Une stratégie consiste à munir C d'une structure d'opérate (resp. de clone) dans le but d'utiliser les idées précédentes.

Toute opérate (resp. clone) est une opérate (resp. clone) libre modulo une congruence \equiv .

Ainsi, nous différons l'étude de C à l'étude de la congruence \equiv associée.

Ceci mène aux points d'intérêt suivants.

- Axe I -

Décrire des **constructions générales** d'opérate (resp. de clones).

- Exemple -

L'opérate \mathfrak{B} est $\mathfrak{T}_P(\mathfrak{G})$ avec $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}(2) = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ modulo \equiv où

$$\begin{array}{c} \mathbf{a} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \mathbf{a} \end{array} \equiv \begin{array}{c} \mathbf{a} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \mathbf{a} \end{array}, \quad \begin{array}{c} \mathbf{b} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \mathbf{a} \end{array} \equiv \begin{array}{c} \mathbf{a} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \mathbf{b} \end{array}, \quad \begin{array}{c} \mathbf{b} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \mathbf{b} \end{array} \equiv \begin{array}{c} \mathbf{b} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \mathbf{b} \end{array}.$$

- Axe II -

Étudier les **systèmes de réécriture** de termes.

- Axe III -

Étudier l'**évitement de motifs** dans les termes.

Domaines associés et centres d'intérêt

(A) Combinatoire énumérative :

- évitement de motifs dans les arbres ;
- opérades colorées et grammaires ;
- séries formelles généralisées.

Depuis 2009.

(B) Constructions de structures :

- opérades, clones, pros, bigèbres de Hopf ;
- posets et treillis ;
- algèbre universelle.

Depuis 2011, Aval, Bultel, Chapoton, Cheballah, Combe, Karaboghossian, Luque, Maurice, Mignot, Nicart, Tanasa.

(C) Algorithmes et complexité :

- motifs dans les permutations ;
- statistiques sur les permutations ;
- génération aléatoire.

Depuis 2015, Bulteau, Fertin, Hamel, Vialette.

(D) Systèmes de réécriture de termes :

- clones libres ;
- logique combinatoire ;
- modèles de calcul.

Depuis 2017, Chenavier, Cordero.

2. Quelques résultats et projets

Plan

2. Quelques résultats et projets

2.1 Évitement de motifs dans les termes

2.2 Systèmes de réécriture de termes

Facteurs de termes

Soit \mathcal{G} une signature.

Étant donnés deux \mathcal{G} -termes t et s , s est un **facteur** de t si

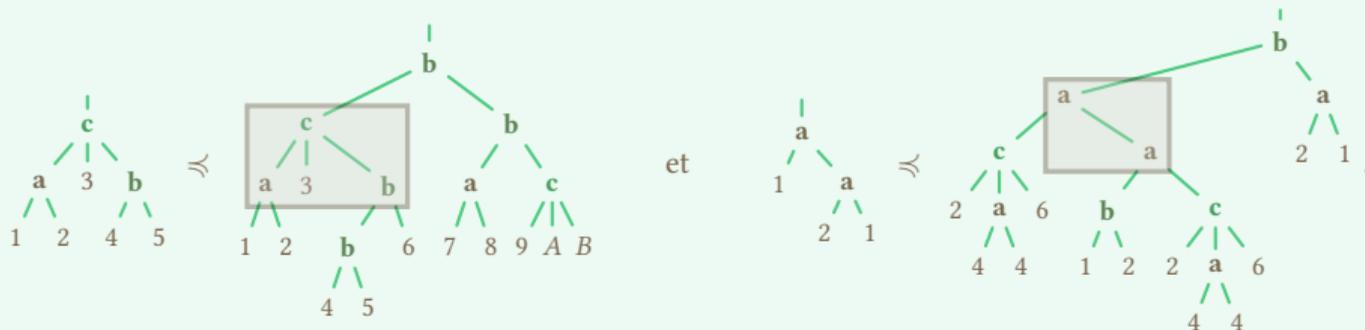
$$t = t' [s_1, \dots, s_{i-1}, s, s_{i+1}, \dots, s_n] [r_1, \dots, r_m]$$

pour $n, m \in \mathbb{N}$ et des \mathcal{G} -termes $t', s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n, r_1, \dots, r_m$, où i apparaît dans t' .

Cette propriété est notée $s \preceq t$. Lorsque $s \not\preceq t$, t **évite** s .

- Exemples -

En posant $\mathcal{G} := \mathcal{G}(2) \sqcup \mathcal{G}(3)$ où $\mathcal{G}(2) := \{a, b\}$ et $\mathcal{G}(3) := \{c\}$, nous avons



Évitement de motifs

Pour tout $\mathcal{P} \subseteq \mathfrak{T}_{\mathbb{P}}(\mathfrak{G})$, soit $\mathcal{A}(\mathcal{P})$ l'ensemble des \mathfrak{G} -termes plans **évitant** tous les motifs de \mathcal{P} .

La question de dénombrer $\mathcal{A}(\mathcal{P})$ par rapport aux degrés des termes est une question naturelle [Parker, 1993], [Loday, 2005], [Rowland, 2010], [Gabriel et al., 2012], [Khoroshkin, Piontkovski, 2015].

– Exemples –

■ Si $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}(2) = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ et $\mathcal{P} := \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{a} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \mathbf{a} \quad \mathbf{a} \end{array}, \begin{array}{c} \mathbf{a} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \mathbf{b} \quad \mathbf{a} \end{array}, \begin{array}{c} \mathbf{b} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \mathbf{a} \quad \mathbf{b} \end{array}, \begin{array}{c} \mathbf{b} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \mathbf{b} \quad \mathbf{b} \end{array} \right\},$

alors $\mathcal{A}(\mathcal{P})$ est dénombré par 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, ... (suite **A000079** – puissances de 2).

■ Si $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}(2) \sqcup \mathfrak{G}(3)$ où $\mathfrak{G}(2) = \{\mathbf{a}\}$ et $\mathfrak{G}(3) = \{\mathbf{c}\}$, et $\mathcal{P} := \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{a} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \mathbf{a} \quad \mathbf{a} \end{array}, \begin{array}{c} \mathbf{a} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \mathbf{c} \quad \mathbf{a} \end{array}, \begin{array}{c} \mathbf{c} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \mathbf{a} \quad \mathbf{c} \end{array}, \begin{array}{c} \mathbf{c} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \mathbf{c} \quad \mathbf{c} \end{array} \right\},$

alors $\mathcal{A}(\mathcal{P})$ est dénombré par 1, 1, 2, 4, 9, 21, 51, 127, ... (suite **A001006** – nombres de Motzkin).

■ Si $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}(2) = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ et $\mathcal{P} := \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{a} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \mathbf{a} \quad \mathbf{a} \end{array}, \begin{array}{c} \mathbf{b} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \mathbf{a} \quad \mathbf{b} \end{array}, \begin{array}{c} \mathbf{b} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \mathbf{b} \quad \mathbf{a} \end{array}, \begin{array}{c} \mathbf{b} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \mathbf{b} \quad \mathbf{b} \end{array} \right\},$

alors $\mathcal{A}(\mathcal{P})$ est dénombré par 1, 2, 5, 13, 35, 96, 267, 750, ... (suite **A005773** – animaux dirigés).

Dénombrement de $\mathcal{A}(\mathcal{P})$

– Théorème [G., 2020] –

Soit \mathfrak{G} une signature et \mathcal{P} un ensemble de \mathfrak{G} -termes plans. La série génératrice dénombrant $\mathcal{A}(\mathcal{P})$ par rapport aux arités (paramètre z) et aux degrés (paramètre q) est $F(\mathcal{P}, \emptyset)$ où pour tout ensemble \mathcal{Q} de \mathfrak{G} -termes plans,

$$F(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = z + q \sum_{\substack{k \geq 1 \\ \mathbf{a} \in \mathfrak{G}(k)}} \sum_{\substack{\ell \geq 1 \\ \{\mathcal{R}^{(1)}, \dots, \mathcal{R}^{(\ell)}\} \subseteq M(\mathcal{P} \cup \mathcal{Q}, \mathbf{a}) \\ (\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_k) = \mathcal{R}^{(1)} \dot{+} \dots \dot{+} \mathcal{R}^{(\ell)}}} (-1)^{1+\ell} \prod_{i \in [k]} F(\mathcal{P}, \mathcal{S}_i).$$

– Exemple –

Pour $\mathfrak{G} := \mathfrak{G}(2) := \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ et $\mathcal{P} := \left\{ \begin{array}{c} \text{a} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{a} \quad \text{b} \end{array} \right\}$, nous obtenons le système d'équations

$$\begin{aligned} F(\mathcal{P}, \emptyset) &= z + q F(\mathcal{P}, \{\mathbf{a}\}) F(\mathcal{P}, \emptyset) + q F(\mathcal{P}, \emptyset) F(\mathcal{P}, \{\mathbf{b}\}) - q F(\mathcal{P}, \{\mathbf{a}\}) F(\mathcal{P}, \{\mathbf{b}\}) + q F(\mathcal{P}, \emptyset) F(\mathcal{P}, \emptyset), \\ F(\mathcal{P}, \{\mathbf{a}\}) &= z + q F(\mathcal{P}, \emptyset) F(\mathcal{P}, \emptyset), \\ F(\mathcal{P}, \{\mathbf{b}\}) &= z + q F(\mathcal{P}, \{\mathbf{a}\}) F(\mathcal{P}, \emptyset) + q F(\mathcal{P}, \emptyset) F(\mathcal{P}, \{\mathbf{b}\}) - q F(\mathcal{P}, \{\mathbf{a}\}) F(\mathcal{P}, \{\mathbf{b}\}). \end{aligned}$$

Quelques questions ouvertes et projets

– Équivalence de Wilf –

Difficulté : ●●○○○, impact potentiel : ●●○○○.

Deux ensembles de \mathfrak{G} -termes plans \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 sont Wilf-équivalents si $F(\mathcal{P}_1, \emptyset) = F(\mathcal{P}_2, \emptyset)$.

Décrire un critère combinatoire pour tester l'équivalence de Wilf entre deux tels ensembles.

Le cas particulier où les ensembles sont des singletons d'arbres binaires a été étudié [Rowland, 2010] et celui des arbres ternaires également [Gabriel et al., 2012].

– Dénombrement général des termes évitant des motifs –

Difficulté : ●●●●○, impact potentiel : ●●●○○.

Apporter une extension du résultat précédant décrivant un système d'équations pour dénombrer les \mathfrak{G} -termes qui évitent un ensemble de motifs non nécessairement plans.

2. Quelques résultats et projets

- 2.1 Évitement de motifs dans les termes
- 2.2 Systèmes de réécriture de termes

Systemes de réécriture de termes 1 / 2

Une **relation de réécriture** sur $\mathcal{T}(\mathcal{G})$ est une relation binaire \rightarrow sur $\mathcal{T}(\mathcal{G})$.

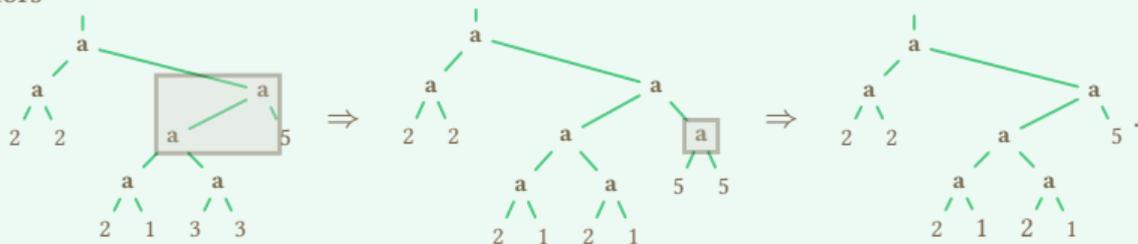
La **clôture au contexte** de \rightarrow est la relation binaire \Rightarrow vérifiant $t \Rightarrow t'$ lorsque t' est obtenu en remplaçant dans t un facteur s par s' à condition que $s \rightarrow s'$.

- Exemple -

En posant $\mathcal{G} := \mathcal{G}(2) := \{a\}$, soit \rightarrow la relation de réécriture définie par

$$\begin{array}{c} | \\ a \\ / \quad \backslash \\ 1 \quad 1 \end{array} \rightarrow | \quad 1 \quad \text{et} \quad \begin{array}{c} | \\ a \\ / \quad \backslash \\ a \quad 3 \\ / \quad \backslash \\ 1 \quad 2 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} | \\ a \\ / \quad \backslash \\ a \quad a \\ / \quad \backslash \quad / \quad \backslash \\ 1 \quad 1 \quad 3 \quad 3 \end{array} .$$

Nous avons alors



Un **système de réécriture de termes (SRT)** est un tel couple $(\mathcal{G}, \rightarrow)$.

Systemes de réécriture de termes 2 / 2

Soit $\mathcal{S} := (\mathcal{G}, \rightarrow)$ un SRT.

Nous définissons

- $G_{\mathcal{S}}$, le graphe orienté de la relation binaire \Rightarrow sur $\mathcal{T}(\mathcal{G})$, appelé **graphe de réécriture** de \mathcal{S} ;
- \ll , la clôture réflexive et transitive de \Rightarrow (relation d'accessibilité dans $G_{\mathcal{S}}$);
- \equiv , la clôture symétrique de \ll ($t \equiv t'$ ssi t et t' sont dans la même compo. connexe dans $G_{\mathcal{S}}$).

Un \mathcal{G} -terme t est une **forme normale** pour \mathcal{S} s'il n'y a pas d'arc de source t dans $G_{\mathcal{S}}(t)$.

S'il n'existe aucun chemin infini dans $G_{\mathcal{S}}$, alors \mathcal{S} est **terminant**.

Si pour tout $t \in \mathcal{T}(\mathcal{G})$, $t \ll s_1$ et $t \ll s_2$ impliquent l'existence de t' tel que $s_1 \ll t'$ et $s_2 \ll t'$, alors \mathcal{S} est **confluent**.

Propriétés des SRT, motifs et clones

Soit $\mathcal{S} := (\mathcal{G}, \rightarrow)$ un SRT.

– Connexion avec les clones –

La relation d'équivalence est une **congruence de clone** du clone libre $\mathfrak{T}(\mathcal{G})$.

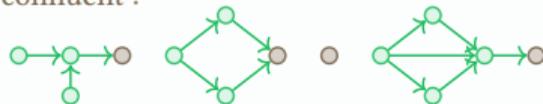
Comme tout clone \mathcal{C} peut être vu comme un quotient $\mathfrak{T}(\mathcal{G})/\equiv$, étudier \equiv permet d'obtenir des informations sur \mathcal{C} .

Voici quelques propriétés classiques des SRT [Baader, Nipkow, 1998].

– Proposition (Système de représentants) –

Si \mathcal{S} est terminant et confluente, alors l'ensemble des formes normales de \mathcal{S} est un ensemble de représentants de $\mathfrak{T}(\mathcal{G})/\equiv$.

Graphe de réécriture typique d'un SRT terminant est confluente :

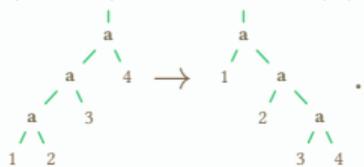


– Proposition (Formes normales et évitement de motifs) –

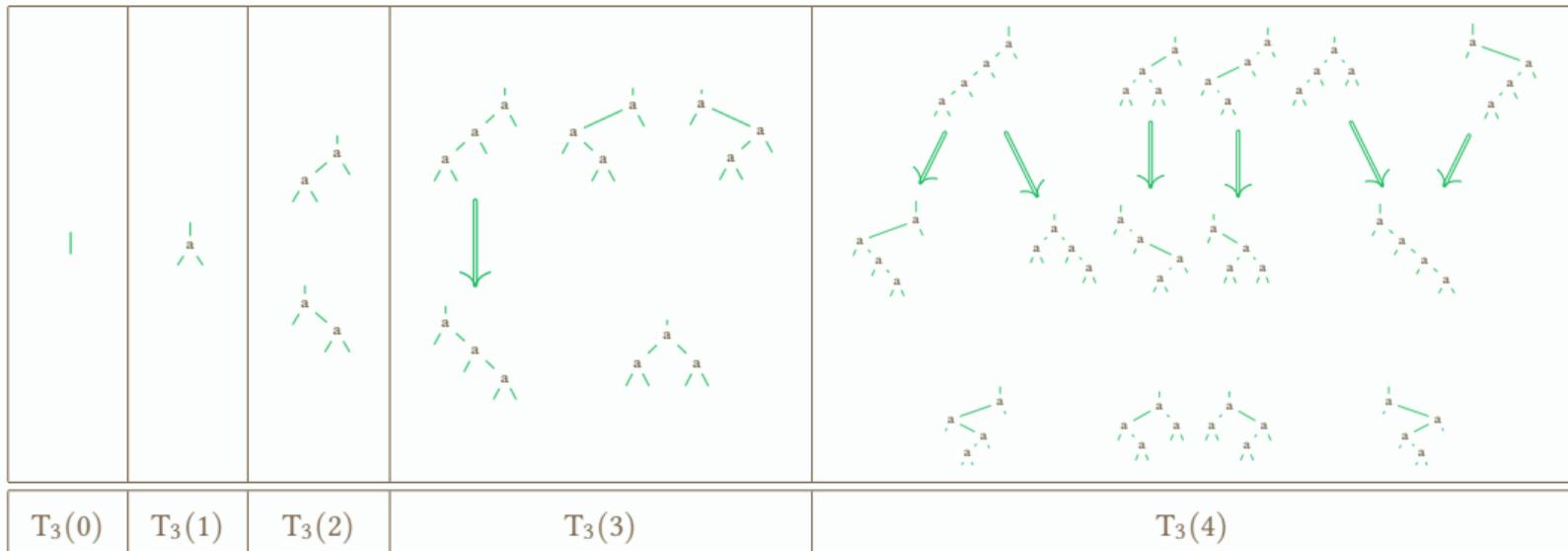
L'ensemble des formes normales de \mathcal{S} est l'ensemble $\mathcal{A}(\mathcal{P})$ où \mathcal{P} est l'ensemble des \mathcal{G} -termes apparaissant dans les membres gauches de \rightarrow .

Une variante du SRT de Tamari

Soit le SRT $(\mathfrak{G}, \rightarrow)$ où $\mathfrak{G} := \mathfrak{G}(2) := \{a\}$ et



Voici les premiers graphes de réécriture $T_3(k)$ sur les \mathfrak{G} -termes plans de degré $k \in \mathbb{N}$.



Une suite d'entiers étonnante

La suite des nombres de composantes connexes de ces graphes commence par

1, 1, 2, 4, 8, 14, 20, **19**, **16**, **14**, 14, 15, 16, 17, 18.

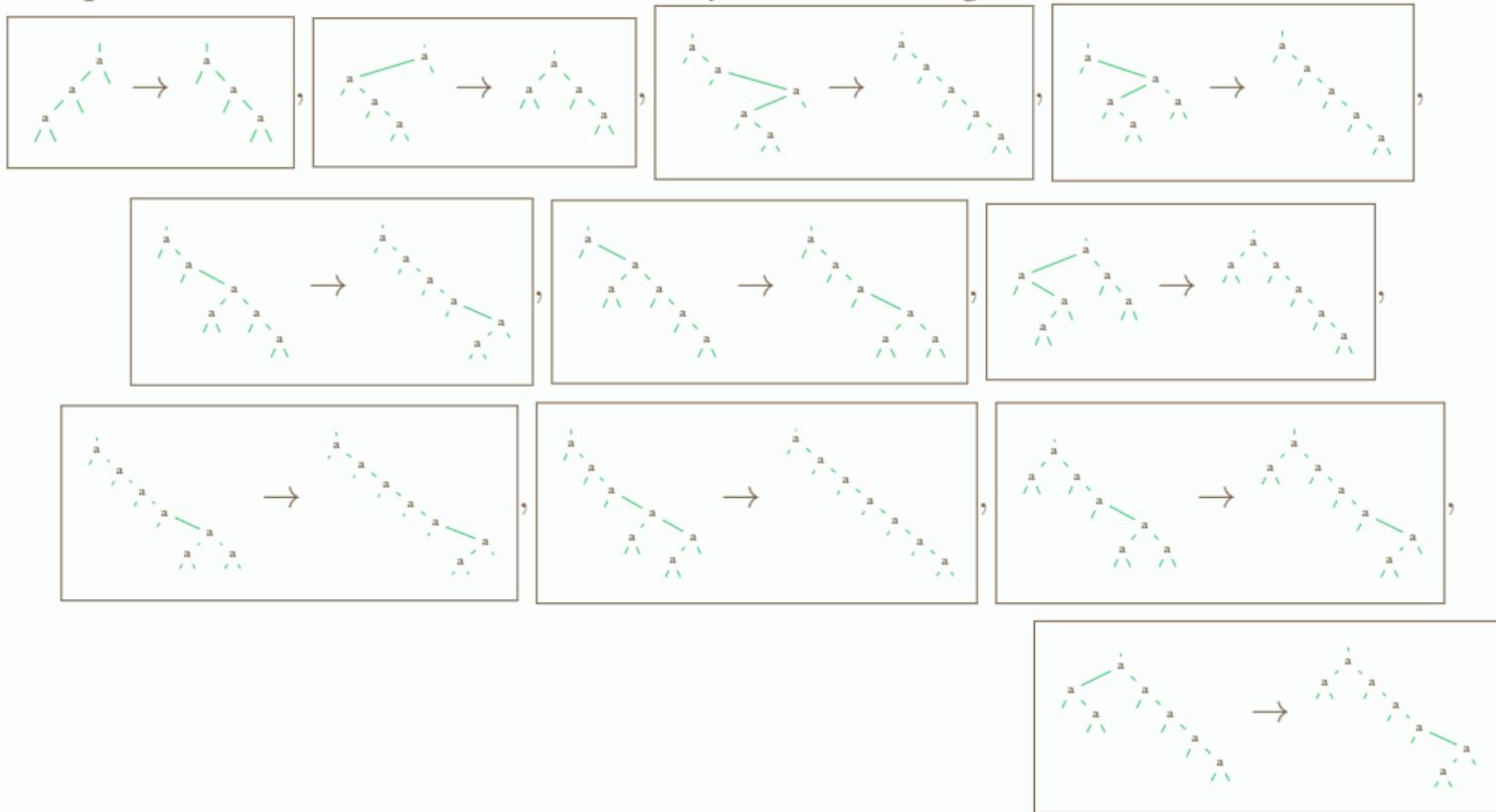
Pour dénombrer ces composantes connexes, ou de manière équivalente, les classes d'équivalence de \mathcal{G} -termes plans pour \equiv , une stratégie est de rendre \rightarrow confluente en ajoutant des règles préservant les composantes connexes.

Pour cela, nous utilisons l'**algorithme de complétion de Buchberger** [Knuth, Bendix, 1970], [Dotsenko, Khoroshkin, 2010] qui est un semi-algorithme acceptant en entrée un SRT $(\mathcal{G}, \rightarrow)$ terminant et non confluant et construisant une nouvelle relation de réécriture \rightarrow' telle que

- $(\mathcal{G}, \rightarrow')$ est terminant **et confluente**;
- les relations \equiv et \equiv' sont identiques.

Complétion du SRT

La complétion de \rightarrow termine et crée un SRT ayant les onze règles de réécriture



Nombre de composantes connexes

– Théorème [Chenavier, Cordero, G., 2018] –

La série génératrice du nombre de composantes connexes de \mathfrak{G} -termes plans du graphe de réécriture du SRT vérifie

$$F(z) = \frac{z}{(1-z)^2} (1 - z + z^2 + z^3 + 2z^4 + 2z^5 - 7z^7 - 2z^8 + z^9 + 2z^{10} + z^{11}).$$

De manière surprenante, cette série génératrice est **rationnelle**.

Ce résultat est obtenu en utilisant le procédé précédent à propos du dénombrement des termes évitant certains motifs.

Notre programme crée un système de 61 équations en 3 heures et 42 minutes (temps CPU).

Quelques questions ouvertes et projets

– Extension du SRT –

Difficulté : ●●●○○, impact potentiel : ●●○○○.

Étudier de manière similaire le SRT vérifiant $t \rightarrow t'$ où t (resp. t') est le peigne gauche (resp. droit) de degré m internal. Les cas $m \leq 3$ sont désormais connus.

Nous conjecturons que pour $m \geq 4$, il n'existe pas de complétion de \rightarrow . D'après des expérimentations informatiques, nous observons que l'algorithme de Buchberger crée encore des règles où des termes de degré 41 interviennent (pour exactement 3149 règles).

– Quotients de l'opérade des arbres binaires –

Difficulté : ●●○○○, impact potentiel : ●●●○○.

La relation d'équivalence \equiv est une congruence de l'opérade magmatique $\mathbf{Mag} := \mathfrak{T}_P(\mathcal{G})$ des arbres binaires.

Le quotient \mathbf{Mag}/\equiv est une opérade ayant comme dimensions la suite d'entiers précédente. Deux axes possibles :

1. réaliser une étude complète des autres quotients \mathbf{Mag}/\equiv où \equiv est une relation d'équivalence sur $\mathfrak{T}_P(\mathcal{G})$ mettant en relation deux arbres binaires de même degré;
2. étant donnée une suite d'entiers, concevoir un critère pour décider s'il existe une congruence d'opérades \equiv telle que l'opérade \mathbf{Mag}/\equiv admet cette suite de dimensions.

3. Conclusion et quelques autres projets

Conclusion

Objectifs de ma recherche : obtenir des informations de toutes sortes sur des structures de données.

Philosophie générale : ajouter une dimension algébrique sur les objets à étudier.

Outils employés :

- structures (opérades, clones, pros);
- séries formelles;
- systèmes de réécritures.

Résultats obtenus :

- nouvelles constructions de structures algébriques;
- nouvelles opérations sur des CC;
- nouveau type de grammaires non contextuelles;
- nouvelles méthodes de dénombrement.

Quelques autres projets 1 / 2

– Étude de complexité de produits –

Difficulté : ●●●○○, impact potentiel : ●●●○○.

Étant donné une CC C munie d'une opération \star linéaire (le produit d'objets est une somme formelle d'objets), le projet consiste à étudier les complexités des problèmes de décision suivants :

1. étant données $y, x_1, \dots, x_n \in C$, décider si y apparaît dans $\star(x_1, \dots, x_n)$;
2. étant donné $y \in C$, décider s'il existe $x \in C$ tel que y apparaît dans $\star(x, \dots, x)$.

Des cas particuliers ont été étudiés (produit de mélange [Warmuth, Haussler, 1984] [Buss, Soltys, 2013] [Rizzi, Vialette, 2013], produit de supermélange [Vargas, 2014] [G., Vialette, 2016]) mais de nombreuses opérations classiques restent à regarder.

– Grammaires à bourgeons et clones –

Difficulté : ●●●○○, impact potentiel : ●●●○○.

Les grammaires à bourgeons sont des dispositifs basés sur les opérades (colorées) qui offrent des possibilités de dénombrement et de génération d'objets [G., 2019] (application à la musique générative [G., 2020]).

Le projet consiste à étendre les grammaires à bourgeons aux clones colorés pour augmenter l'expressivité.

Quelques autres projets 2 / 2

– Logique combinatoires et ordres partiels –

Difficulté : ●●●○○, impact potentiel : ●●●○○.

Étant donnée un fragment de logique combinatoire défini à partir de combinateurs de base,

1. décider si la relation \ll du système de réécriture sous-jacent est une relation d'ordre partielle;
2. décider si cette relation d'ordre muni chaque intervalle de l'ordre d'une structure de treillis;
3. compter les composantes connexes du graphe du système de réécriture selon diverses notions de taille.

Ceci est connecté à d'autres questions classiques en logique combinatoire comme la décidabilité du problème du mot [Statman, 1989], [Sprenger, Wymann-Böni, 1993], [Barendregt et al., 2017].

– Divers objets à dénombrer –

Difficulté : ●○○○○, impact potentiel : ●○○○○.

Dans ma recherche, je rencontre de nombreux objets combinatoires qui restent à dénombrer, comme :

- des configurations primitives de diagonales non croisées dans des diagonales;
- diverses collections de mots d'entiers;
- diverses familles de structures arborescentes.