Séries d’arbres, motifs exclus et opérades

Samuele Giraudo

LIGM, Université Paris-Est Marne-la-Vallée

Séminaire de l’IRIF

8 mars 2018

Plan

Motifs et séries d'arbres

Opérations sur les séries d'arbres

Opérades et dénombrement

Plan

Motifs et séries d'arbres

Arbres syntaxiques

Un ensemble de lettres est ensemble gradué $\mathfrak{G}$ de la forme

$$\mathfrak{G} := \bigsqcup_{n \geqslant 1} \mathfrak{G}(n)$$

et tel que chaque $\mathfrak{G}(n)$ est fini.

Arbres syntaxiques

Un ensemble de lettres est ensemble gradué $\mathfrak{G}$ de la forme

$$\mathfrak{G} := \bigsqcup_{n \geqslant 1} \mathfrak{G}(n)$$

et tel que chaque $\mathfrak{G}(n)$ est fini.

Un arbre syntaxique sur $\mathfrak{G}$ est un arbre plan enraciné $\mathfrak{t}$ tel que chaque nœud interne de $\mathfrak{t}$ d'arité n est décoré par un élément de $\mathfrak{G}(n)$.

Arbres syntaxiques

Un ensemble de lettres est ensemble gradué $\mathfrak{G}$ de la forme

$$\mathfrak{G} := \bigsqcup_{n \geqslant 1} \mathfrak{G}(n)$$

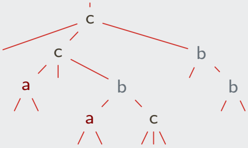
et tel que chaque $\mathfrak{G}(n)$ est fini.

Un arbre syntaxique sur $\mathfrak{G}$ est un arbre plan enraciné $\mathfrak{t}$ tel que chaque nœud interne de $\mathfrak{t}$ d'arité n est décoré par un élément de $\mathfrak{G}(n)$.

Exemple

Soit $\mathfrak{G} := \left\{ \mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c} \right\}$. On a $\mathfrak{G}(2) = \left\{ \mathsf{a}, \mathsf{b} \right\}$ et $\mathfrak{G}(3) = \left\{ \mathsf{c} \right\}$.

De plus,



est un arbre syntaxique sur $\mathfrak{G}$.

Ensemble d'arbres syntaxiques

Soit $\mathfrak{G}$ un ensemble de lettres.

L'ensemble des arbres syntaxiques sur $\mathfrak{G}$ est noté $\mathbf{A}(\mathfrak{G})$.

Ensemble d'arbres syntaxiques

Soit $\mathfrak{G}$ un ensemble de lettres.

L'ensemble des arbres syntaxiques sur $\mathfrak{G}$ est noté $\mathbf{A}(\mathfrak{G})$.

Pour tout $\mathfrak{t} \in \mathbf{A}(\mathfrak{G})$, on note par

- $|\mathfrak{t}|$ l'arité de $\mathfrak{t}$, qui est le nombre de feuilles de $\mathfrak{t}$;

Ensemble d'arbres syntaxiques

Soit $\mathfrak{G}$ un ensemble de lettres.

L'ensemble des arbres syntaxiques sur $\mathfrak{G}$ est noté $\mathbf{A}(\mathfrak{G})$.

Pour tout $\mathfrak{t} \in \mathbf{A}(\mathfrak{G})$, on note par

- $|\mathfrak{t}|$ l'arité de $\mathfrak{t}$, qui est le nombre de feuilles de $\mathfrak{t}$;
- $\deg(\mathfrak{t})$ le degré de $\mathfrak{t}$, qui est le nombre de nœuds internes de $\mathfrak{t}$;

Ensemble d'arbres syntaxiques

Soit $\mathfrak{G}$ un ensemble de lettres.

L'ensemble des arbres syntaxiques sur $\mathfrak{G}$ est noté $\mathbf{A}(\mathfrak{G})$.

Pour tout $\mathfrak{t} \in \mathbf{A}(\mathfrak{G})$, on note par

- $|\mathfrak{t}|$ l'arité de $\mathfrak{t}$, qui est le nombre de feuilles de $\mathfrak{t}$;
- $\deg(\mathfrak{t})$ le degré de $\mathfrak{t}$, qui est le nombre de nœuds internes de $\mathfrak{t}$;
- $\mathrm{a}(\mathfrak{t})$ le nombre d'arcs de $\mathfrak{t}$ (qui vérifie $\mathrm{a}(\mathfrak{t}) = |\mathfrak{t}| + \deg(\mathfrak{t})$).

Ensemble d'arbres syntaxiques

Soit $\mathfrak{G}$ un ensemble de lettres.

L'ensemble des arbres syntaxiques sur $\mathfrak{G}$ est noté $\mathbf{A}(\mathfrak{G})$.

Pour tout $\mathfrak{t} \in \mathbf{A}(\mathfrak{G})$, on note par

- $|\mathfrak{t}|$ l'arité de $\mathfrak{t}$, qui est le nombre de feuilles de $\mathfrak{t}$;
- $\deg(\mathfrak{t})$ le degré de $\mathfrak{t}$, qui est le nombre de nœuds internes de $\mathfrak{t}$;
- $\mathrm{a}(\mathfrak{t})$ le nombre d'arcs de $\mathfrak{t}$ (qui vérifie $\mathrm{a}(\mathfrak{t}) = |\mathfrak{t}| + \deg(\mathfrak{t})$).

L'ensemble des arbres syntaxiques sur $\mathfrak{G}$ d'arité n est noté $\mathbf{A}(\mathfrak{G})(n)$.

On a ainsi

$$\mathbf{A}(\mathfrak{G}) = \bigsqcup_{n \geqslant 1} \mathbf{A}(\mathfrak{G})(n).$$

Ensemble d'arbres syntaxiques

Soit $\mathfrak{G}$ un ensemble de lettres.

L'ensemble des arbres syntaxiques sur $\mathfrak{G}$ est noté $\mathbf{A}(\mathfrak{G})$.

Pour tout $\mathfrak{t} \in \mathbf{A}(\mathfrak{G})$, on note par

- $|\mathfrak{t}|$ l'arité de $\mathfrak{t}$, qui est le nombre de feuilles de $\mathfrak{t}$;
- $\deg(\mathfrak{t})$ le degré de $\mathfrak{t}$, qui est le nombre de nœuds internes de $\mathfrak{t}$;
- $\mathrm{a}(\mathfrak{t})$ le nombre d'arcs de $\mathfrak{t}$ (qui vérifie $\mathrm{a}(\mathfrak{t}) = |\mathfrak{t}| + \deg(\mathfrak{t})$).

L'ensemble des arbres syntaxiques sur $\mathfrak{G}$ d'arité n est noté $\mathbf{A}(\mathfrak{G})(n)$.

On a ainsi

$$\mathbf{A}(\mathfrak{G}) = \bigsqcup_{n \geqslant 1} \mathbf{A}(\mathfrak{G})(n).$$

Remarque : si $\mathfrak{G}(1) = \emptyset$, comme chaque $\mathfrak{G}(n)$ est fini, $\mathbf{A}(\mathfrak{G})(n)$ est fini.

Greffe partielle

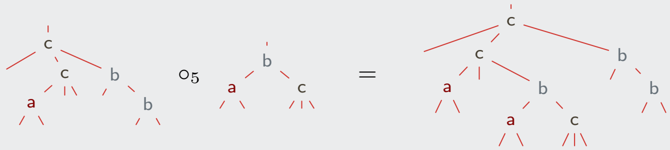
Soient $\mathfrak{t}, \mathfrak{s} \in \mathbf{A}(\mathfrak{G})$.

Greffe partielle

Soient $\mathfrak{t}, \mathfrak{s} \in \mathbf{A}(\mathfrak{G})$.

Pour tout $i \in [|\mathfrak{t}|]$, $\mathfrak{t} \circ_i \mathfrak{s}$ est l'arbre syntaxique obtenu en greffant la racine de $\mathfrak{s}$ sur la i^{e} feuille de $\mathfrak{t}$.

Exemple

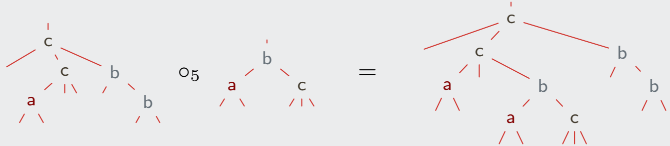


Greffe partielle

Soient $\mathfrak{t}, \mathfrak{s} \in \mathbf{A}(\mathfrak{G})$.

Pour tout $i \in [|\mathfrak{t}|]$, $\mathfrak{t} \circ_i \mathfrak{s}$ est l'arbre syntaxique obtenu en greffant la racine de $\mathfrak{s}$ sur la i^{e} feuille de $\mathfrak{t}$.

Exemple



Ainsi, $\circ_i$ est une application

$$\circ_i : \mathbf{A}(\mathfrak{G})(n) \times \mathbf{A}(\mathfrak{G})(m) \to \mathbf{A}(\mathfrak{G})(n+m-1)$$

où $n \geqslant i$ et $m \geqslant 1$, nommée application de greffe partielle.

Greffe complète

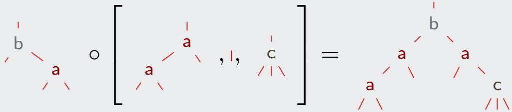
Soient $\mathfrak{t}, \mathfrak{s}_1, \ldots, \mathfrak{s}_{|\mathfrak{t}|} \in \mathbf{A}(\mathfrak{G})$.

Greffe complète

Soient $\mathfrak{t}, \mathfrak{s}_1, \ldots, \mathfrak{s}_{|\mathfrak{t}|} \in \mathbf{A}(\mathfrak{G})$.

L'arbre $\mathfrak{t} \circ \left[\mathfrak{s}_1, \ldots, \mathfrak{s}_{|\mathfrak{t}|}\right]$ est obtenu en greffant simultanément chaque $\mathfrak{s}_i$ sur la i^{e} feuille de $\mathfrak{t}$.

Exemple

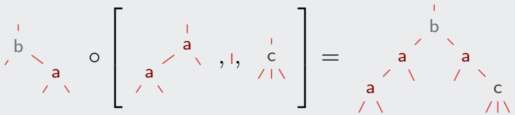


Greffe complète

Soient $\mathfrak{t}, \mathfrak{s}_1, \dots, \mathfrak{s}_{|\mathfrak{t}|} \in \mathbf{A}(\mathfrak{G})$.

L'arbre $\mathfrak{t} \circ \left[\mathfrak{s}_1, \dots, \mathfrak{s}_{|\mathfrak{t}|}\right]$ est obtenu en greffant simultanément chaque $\mathfrak{s}_i$ sur la i^{e} feuille de $\mathfrak{t}$.

Exemple



Ainsi, $\circ$ est une application

$$\circ : \mathbf{A}(\mathfrak{G})(n) \times \mathbf{A}(\mathfrak{G})(m_1) \times \cdots \times \mathbf{A}(\mathfrak{G})(m_n) \to \mathbf{A}(\mathfrak{G})(m_1 + \cdots + m_n)$$

où $n \geqslant 1$ et $m_1, \dots, m_n \geqslant 1$, nommée application de greffe complète.

Motifs et occurrences

Un arbre $\mathfrak{t} \in \mathbf{A}(\mathfrak{G})$ admet une occurrence d'un arbre $\mathfrak{s} \in \mathbf{A}(\mathfrak{G})$ s'il est possible de placer $\mathfrak{s}$ dans $\mathfrak{t}$ en confondant la racine de $\mathfrak{s}$ avec un nœud de $\mathfrak{t}$ et les feuilles de $\mathfrak{s}$ avec des nœuds de $\mathfrak{t}$.

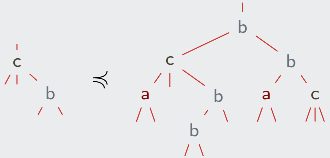
On note cette propriété $\mathfrak{s} \preccurlyeq \mathfrak{t}$.

Motifs et occurrences

Un arbre $\mathfrak{t} \in \mathbf{A}(\mathfrak{G})$ admet une occurrence d'un arbre $\mathfrak{s} \in \mathbf{A}(\mathfrak{G})$ s'il est possible de placer $\mathfrak{s}$ dans $\mathfrak{t}$ en confondant la racine de $\mathfrak{s}$ avec un nœud de $\mathfrak{t}$ et les feuilles de $\mathfrak{s}$ avec des nœuds de $\mathfrak{t}$.

On note cette propriété $\mathfrak{s} \preccurlyeq \mathfrak{t}$.

Exemple

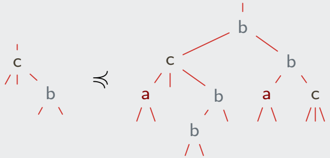


Motifs et occurrences

Un arbre $\mathfrak{t} \in \mathbf{A}(\mathfrak{G})$ admet une occurrence d'un arbre $\mathfrak{s} \in \mathbf{A}(\mathfrak{G})$ s'il est possible de placer $\mathfrak{s}$ dans $\mathfrak{t}$ en confondant la racine de $\mathfrak{s}$ avec un nœud de $\mathfrak{t}$ et les feuilles de $\mathfrak{s}$ avec des nœuds de $\mathfrak{t}$.

On note cette propriété $\mathfrak{s} \preccurlyeq \mathfrak{t}$.

Exemple



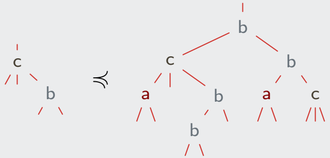
La relation $\preccurlyeq$ munit ainsi $\mathbf{A}(\mathfrak{G})$ d'une structure d'ordre partiel.

Motifs et occurrences

Un arbre $\mathfrak{t} \in \mathbf{A}(\mathfrak{G})$ admet une occurrence d'un arbre $\mathfrak{s} \in \mathbf{A}(\mathfrak{G})$ s'il est possible de placer $\mathfrak{s}$ dans $\mathfrak{t}$ en confondant la racine de $\mathfrak{s}$ avec un nœud de $\mathfrak{t}$ et les feuilles de $\mathfrak{s}$ avec des nœuds de $\mathfrak{t}$.

On note cette propriété $\mathfrak{s} \preccurlyeq \mathfrak{t}$.

Exemple



La relation $\preccurlyeq$ munit ainsi $\mathbf{A}(\mathfrak{G})$ d'une structure d'ordre partiel.

Plus formellement, nous avons $\mathfrak{s} \preccurlyeq \mathfrak{t}$ s'il existe $\mathfrak{r}, \mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}_{|\mathfrak{s}|} \in \mathbf{A}(\mathfrak{G})$ et $i \in [|\mathfrak{r}|]$ tels que

$$\mathfrak{t} = \mathfrak{r} \circ_i \left(\mathfrak{s} \circ \left[\mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}_{|\mathfrak{s}|}\right]\right).$$

Séries d'arbres

Soit $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{Q}(q_0, q_1, q_2, \ldots)$.

Séries d'arbres

Soit $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{Q}(q_0, q_1, q_2, \ldots)$.

Une série d'arbres est une application

$$\mathbf{f} : \mathbf{A}(\mathfrak{G}) \to \mathbb{K}.$$

Séries d'arbres

Soit $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{Q}(q_0, q_1, q_2, \dots)$.

Une série d'arbres est une application

$$\mathbf{f} : \mathbf{A}(\mathfrak{G}) \to \mathbb{K}.$$

Le coefficient $\mathbf{f}(\mathfrak{t})$ de $\mathfrak{t} \in \mathbf{A}(\mathfrak{G})$ dans $\mathbf{f}$ est noté par $\langle \mathfrak{t}, \mathbf{f} \rangle$.

Séries d'arbres

Soit $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{Q}(q_0, q_1, q_2, \dots)$.

Une série d'arbres est une application

$$\mathbf{f} : \mathbf{A}(\mathfrak{G}) \to \mathbb{K}.$$

Le coefficient $\mathbf{f}(\mathfrak{t})$ de $\mathfrak{t} \in \mathbf{A}(\mathfrak{G})$ dans $\mathbf{f}$ est noté par $\langle \mathfrak{t}, \mathbf{f} \rangle$.

L'ensemble de toutes les séries d'arbres est $\mathbb{K}\langle\langle \mathbf{A}(\mathfrak{G}) \rangle\rangle$.

Séries d'arbres

Soit $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{Q}(q_0, q_1, q_2, \dots)$.

Une série d'arbres est une application

$$\mathbf{f} : \mathbf{A}(\mathfrak{G}) \to \mathbb{K}.$$

Le coefficient $\mathbf{f}(\mathfrak{t})$ de $\mathfrak{t} \in \mathbf{A}(\mathfrak{G})$ dans $\mathbf{f}$ est noté par $\langle \mathfrak{t}, \mathbf{f} \rangle$.

L'ensemble de toutes les séries d'arbres est $\mathbb{K} \langle\langle \mathbf{A}(\mathfrak{G}) \rangle\rangle$.

Muni de l'addition point par point

$$\langle \mathfrak{t}, \mathbf{f} + \mathbf{g} \rangle := \langle \mathfrak{t}, \mathbf{f} \rangle + \langle \mathfrak{t}, \mathbf{g} \rangle$$

et de la multiplication par un scalaire

$$\langle \mathfrak{t}, \lambda \mathbf{f} \rangle := \lambda \langle \mathfrak{t}, \mathbf{f} \rangle ,$$

l'ensemble $\mathbb{K} \langle\langle \mathbf{A}(\mathfrak{G}) \rangle\rangle$ est un espace vectoriel.

Séries d'arbres

Soit $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{Q}(q_0, q_1, q_2, \dots)$.

Une série d'arbres est une application

$$\mathbf{f} : \mathbf{A}(\mathfrak{G}) \to \mathbb{K}.$$

Le coefficient $\mathbf{f}(\mathfrak{t})$ de $\mathfrak{t} \in \mathbf{A}(\mathfrak{G})$ dans $\mathbf{f}$ est noté par $\langle \mathfrak{t}, \mathbf{f} \rangle$.

L'ensemble de toutes les séries d'arbres est $\mathbb{K} \langle\langle \mathbf{A}(\mathfrak{G}) \rangle\rangle$.

Muni de l'addition point par point

$$\langle \mathfrak{t}, \mathbf{f} + \mathbf{g} \rangle := \langle \mathfrak{t}, \mathbf{f} \rangle + \langle \mathfrak{t}, \mathbf{g} \rangle$$

et de la multiplication par un scalaire

$$\langle \mathfrak{t}, \lambda \mathbf{f} \rangle := \lambda \langle \mathfrak{t}, \mathbf{f} \rangle ,$$

l'ensemble $\mathbb{K} \langle\langle \mathbf{A}(\mathfrak{G}) \rangle\rangle$ est un espace vectoriel.

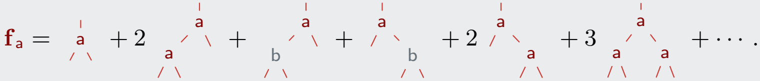
La notation somme de $\mathbf{f}$ est

$$\mathbf{f} = \sum_{\mathfrak{t} \in \mathbf{A}(\mathfrak{G})} \langle \mathfrak{t}, \mathbf{f} \rangle \, \mathfrak{t}.$$

Séries d'arbres — exemples

Exemple

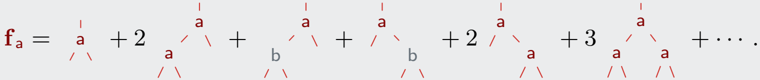
Pour tout $x \in \mathfrak{G}$, soit la série $\mathbf{f}_x$ de $\mathbb{K}\langle\langle \mathbf{A}(\mathfrak{G}) \rangle\rangle$ où $\langle \mathfrak{t}, \mathbf{f}_x \rangle$ est le nombre d'occurrences de x dans $\mathfrak{t}$. Par exemple,



Séries d'arbres — exemples

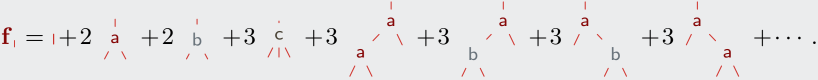
Exemple

Pour tout $x \in \mathfrak{G}$, soit la série $\mathbf{f}_x$ de $\mathbb{K}\langle\langle \mathbf{A}(\mathfrak{G}) \rangle\rangle$ où $\langle \mathfrak{t}, \mathbf{f}_x \rangle$ est le nombre d'occurrences de x dans $\mathfrak{t}$. Par exemple,



Exemple

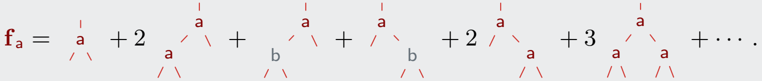
Soit la série $\mathbf{f}_{|}$ de $\mathbb{K}\langle\langle \mathbf{A}(\mathfrak{G}) \rangle\rangle$ où $\left\langle \mathfrak{t}, \mathbf{f}_{|} \right\rangle := |\mathfrak{t}|$. On a



Séries d'arbres — exemples

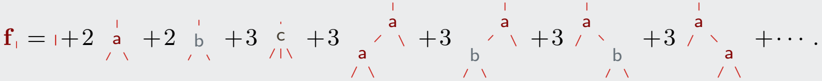
Exemple

Pour tout $x \in \mathfrak{G}$, soit la série $\mathbf{f}_x$ de $\mathbb{K}\langle\langle \mathbf{A}(\mathfrak{G})\rangle\rangle$ où $\langle \mathfrak{t}, \mathbf{f}_x\rangle$ est le nombre d'occurrences de x dans $\mathfrak{t}$. Par exemple,



Exemple

Soit la série $\mathbf{f}_{|}$ de $\mathbb{K}\langle\langle \mathbf{A}(\mathfrak{G})\rangle\rangle$ où $\left\langle \mathfrak{t}, \mathbf{f}_{|}\right\rangle := |\mathfrak{t}|$. On a



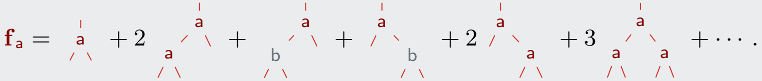
Exemple

La somme $\mathbf{f}_{\mathsf{a}} + \mathbf{f}_{\mathsf{b}} + \mathbf{f}_{\mathsf{c}}$ est la série dans laquelle le coefficient d'un arbre est son degré.

Séries d'arbres — exemples

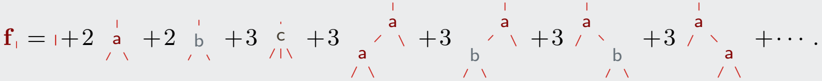
Exemple

Pour tout $x \in \mathfrak{G}$, soit la série $\mathbf{f}_x$ de $\mathbb{K}\langle\langle \mathbf{A}(\mathfrak{G})\rangle\rangle$ où $\langle \mathfrak{t}, \mathbf{f}_x\rangle$ est le nombre d'occurrences de x dans $\mathfrak{t}$. Par exemple,



Exemple

Soit la série $\mathbf{f}_{|}$ de $\mathbb{K}\langle\langle \mathbf{A}(\mathfrak{G})\rangle\rangle$ où $\langle \mathfrak{t}, \mathbf{f}_{|}\rangle := |\mathfrak{t}|$. On a



Exemple

La somme $\mathbf{f}_a + \mathbf{f}_b + \mathbf{f}_c$ est la série dans laquelle le coefficient d'un arbre est son degré.

La somme $\mathbf{f}_{|} + \mathbf{f}_a + \mathbf{f}_b + \mathbf{f}_c$ est la série dans laquelle le coefficient d'un arbre est son nombre d'arcs.

Séries d'arbres à motifs exclus

Soient $\mathcal{P} \subseteq \mathbf{A}(\mathfrak{G})$ fini et

$$\mathbf{f}(\mathcal{P}) := \sum_{\substack{\mathfrak{t} \in \mathbf{A}(\mathfrak{G}) \\ \forall \mathfrak{s} \in \mathcal{P}, \mathfrak{s} \not\preccurlyeq \mathfrak{t}}} \mathfrak{t}$$

la série des arbres qui évitent tous les arbres de $\mathcal{P}$.

Séries d'arbres à motifs exclus

Soient $\mathcal{P} \subseteq \mathbf{A}(\mathfrak{G})$ fini et

$$\mathbf{f}(\mathcal{P}) := \sum_{\substack{\mathfrak{t} \in \mathbf{A}(\mathfrak{G}) \\ \forall \mathfrak{s} \in \mathcal{P}, \mathfrak{s} \not\preccurlyeq \mathfrak{t}}} \mathfrak{t}$$

la série des arbres qui évitent tous les arbres de $\mathcal{P}$.

Soit

$$\mathrm{ev} : \mathbb{K} \langle\langle \mathbf{A}(\mathfrak{G}) \rangle\rangle \to \mathbb{K} \langle\langle t \rangle\rangle$$

l'application linéaire d'évaluation définie par

$$\mathrm{ev}(\mathfrak{t}) := t^{|\mathfrak{t}|}.$$

Séries d'arbres à motifs exclus

Soient $\mathcal{P} \subseteq \mathbf{A}(\mathfrak{G})$ fini et

$$\mathbf{f}(\mathcal{P}) := \sum_{\substack{\mathfrak{t} \in \mathbf{A}(\mathfrak{G}) \\ \forall \mathfrak{s} \in \mathcal{P}, \mathfrak{s} \not\preccurlyeq \mathfrak{t}}} \mathfrak{t}$$

la série des arbres qui évitent tous les arbres de $\mathcal{P}$.

Soit

$$\mathrm{ev} : \mathbb{K} \langle\langle \mathbf{A}(\mathfrak{G}) \rangle\rangle \to \mathbb{K} \langle\langle t \rangle\rangle$$

l'application linéaire d'évaluation définie par

$$\mathrm{ev}(\mathfrak{t}) := t^{|\mathfrak{t}|}.$$

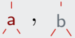
Comme

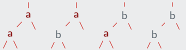
$$\mathrm{ev}(\mathbf{f}(\mathcal{P})) = \sum_{n \geqslant 1} \# \{\mathfrak{t} \in \mathbf{A}(\mathfrak{G})(n) : \forall \mathfrak{s} \in \mathcal{P}, \mathfrak{s} \not\preccurlyeq \mathfrak{t}\} \, t^n,$$

$\mathrm{ev}(\mathbf{f}(\mathcal{P}))$ est la série génératrice des arbres évitant $\mathcal{P}$, dénombrés selon leur arité.

Séries génératrices d'arbres à motifs exclus

Exemple

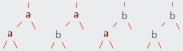
Puissances de 2 avec $\mathfrak{G} :=$ {  } :

$\mathbf{f}$ () $\xmapsto{\text{ev}} t + 2t^2 + 4t^3 + 8t^4 + 16t^5 + 32t^6 + 64t^7 + 128t^8 + \cdots .$

Séries génératrices d'arbres à motifs exclus

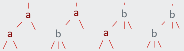
Exemple

Puissances de 2 avec $\mathfrak{G} := \Big\{$  $\Big\}$:

$\mathbf{f}\Big($  $\Big) \xmapsto{\text{ev}} t + 2t^2 + 4t^3 + 8t^4 + 16t^5 + 32t^6 + 64t^7 + 128t^8 + \cdots .$

Exemple

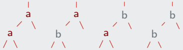
Nombres de Motzkin **A001006** avec $\mathfrak{G} := \Big\{$  $\Big\}$:

$\mathbf{f}\Big($  $\Big) \xmapsto{\text{ev}} t + t^2 + 2t^3 + 4t^4 + 9t^5 + 21t^6 + 51t^7 + 127t^8 + \cdots .$

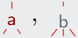
Séries génératrices d'arbres à motifs exclus

Exemple

Puissances de 2 avec $\mathfrak{G} :=$ {  } :

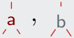
$\mathbf{f}$ () $\overset{\mathrm{ev}}{\longmapsto} t + 2t^2 + 4t^3 + 8t^4 + 16t^5 + 32t^6 + 64t^7 + 128t^8 + \cdots.$

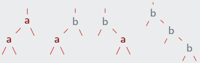
Exemple

Nombres de Motzkin **A001006** avec $\mathfrak{G} :=$ {  } :

$\mathbf{f}$ () $\overset{\mathrm{ev}}{\longmapsto} t + t^2 + 2t^3 + 4t^4 + 9t^5 + 21t^6 + 51t^7 + 127t^8 + \cdots.$

Exemple

Animaux dirigés **A005773** avec $\mathfrak{G} :=$ {  } :

$\mathbf{f}$ () $\overset{\mathrm{ev}}{\longmapsto} t + 2t^2 + 5t^3 + 13t^4 + 35t^5 + 96t^6 + 267t^7 + 750t^8 + \cdots.$

Dénombrement d'arbres à motifs exclus

Objectif

Étant donnés $\mathfrak{G}$ et $\mathcal{P} \subseteq \mathbf{A}(\mathfrak{G})$ fini, décrire un procédé pour exprimer la série génératrice $\mathrm{ev}(\mathbf{f}(\mathcal{P}))$ des arbres évitant les motifs de $\mathcal{P}$.

Dénombrement d'arbres à motifs exclus

Objectif

Étant donnés $\mathfrak{G}$ et $\mathcal{P} \subseteq \mathbf{A}(\mathfrak{G})$ fini, décrire un procédé pour exprimer la série génératrice $\mathrm{ev}(\mathbf{f}(\mathcal{P}))$ des arbres évitant les motifs de $\mathcal{P}$.

Pour cela, on cherche à décrire $\mathbf{f}(\mathcal{P})$ et une version raffinée de cette dernière,

$$\mathbf{f}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) := \sum_{\substack{\mathfrak{t} \in \mathbf{A}(\mathfrak{G}) \\ \forall \mathfrak{s} \in \mathcal{P}, \mathfrak{s} \not\preccurlyeq \mathfrak{t} \\ \forall \mathfrak{s} \in \mathcal{Q}, \mathfrak{s} \not\preccurlyeq_{\mathrm{r}} \mathfrak{t}}} \mathfrak{t},$$

où $\mathfrak{s} \preccurlyeq_{\mathrm{r}} \mathfrak{t}$ si $\mathfrak{t}$ admet une occurrence de $\mathfrak{s}$ en racine.

Dénombrement d'arbres à motifs exclus

Objectif

Étant donnés $\mathfrak{G}$ et $\mathcal{P} \subseteq \mathbf{A}(\mathfrak{G})$ fini, décrire un procédé pour exprimer la série génératrice $\mathrm{ev}(\mathbf{f}(\mathcal{P}))$ des arbres évitant les motifs de $\mathcal{P}$.

Pour cela, on cherche à décrire $\mathbf{f}(\mathcal{P})$ et une version raffinée de cette dernière,

$$\mathbf{f}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) := \sum_{\substack{\mathfrak{t} \in \mathbf{A}(\mathfrak{G}) \\ \forall \mathfrak{s} \in \mathcal{P}, \mathfrak{s} \not\preccurlyeq \mathfrak{t} \\ \forall \mathfrak{s} \in \mathcal{Q}, \mathfrak{s} \not\preccurlyeq_{\mathrm{r}} \mathfrak{t}}} \mathfrak{t},$$

où $\mathfrak{s} \preccurlyeq_{\mathrm{r}} \mathfrak{t}$ si $\mathfrak{t}$ admet une occurrence de $\mathfrak{s}$ en racine.

Plus formellement, nous avons $\mathfrak{s} \preccurlyeq_{\mathrm{r}} \mathfrak{t}$ s'il existe $\mathfrak{r}_1, \dots, \mathfrak{r}_{|\mathfrak{s}|} \in \mathbf{A}(\mathfrak{G})$ et $i \in [|\mathfrak{r}|]$ tels que

$$\mathfrak{t} = \mathfrak{s} \circ \left[\mathfrak{r}_1, \dots, \mathfrak{r}_{|\mathfrak{s}|}\right].$$

Dénombrement d'arbres à motifs exclus

Objectif

Étant donnés $\mathfrak{G}$ et $\mathcal{P} \subseteq \mathbf{A}(\mathfrak{G})$ fini, décrire un procédé pour exprimer la série génératrice $\mathrm{ev}(\mathbf{f}(\mathcal{P}))$ des arbres évitant les motifs de $\mathcal{P}$.

Pour cela, on cherche à décrire $\mathbf{f}(\mathcal{P})$ et une version raffinée de cette dernière,

$$\mathbf{f}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) := \sum_{\substack{\mathfrak{t} \in \mathbf{A}(\mathfrak{G}) \\ \forall \mathfrak{s} \in \mathcal{P}, \mathfrak{s} \not\preccurlyeq \mathfrak{t} \\ \forall \mathfrak{s} \in \mathcal{Q}, \mathfrak{s} \not\preccurlyeq_{\mathrm{r}} \mathfrak{t}}} \mathfrak{t},$$

où $\mathfrak{s} \preccurlyeq_{\mathrm{r}} \mathfrak{t}$ si $\mathfrak{t}$ admet une occurrence de $\mathfrak{s}$ en racine.

Plus formellement, nous avons $\mathfrak{s} \preccurlyeq_{\mathrm{r}} \mathfrak{t}$ s'il existe $\mathfrak{r}_1, \dots, \mathfrak{r}_{|\mathfrak{s}|} \in \mathbf{A}(\mathfrak{G})$ et $i \in [|\mathfrak{r}|]$ tels que

$$\mathfrak{t} = \mathfrak{s} \circ \left[\mathfrak{r}_1, \dots, \mathfrak{r}_{|\mathfrak{s}|}\right].$$

Remarque :

$$\mathbf{f}(\mathcal{P}) = \mathbf{f}(\mathcal{P}, \mathcal{P}'), \quad \mathcal{P}' \subseteq \mathcal{P}.$$

Description du système

Soient $\mathcal{R} \subseteq \mathbf{A}(\mathfrak{G})$ fini et $x \in \mathfrak{G}(n)$.

Description du système

Soient $\mathcal{R} \subseteq \mathbf{A}(\mathfrak{G})$ fini et $x \in \mathfrak{G}(n)$.

On définit $\mathcal{R}^x$ comme l'ensemble de tous les mots u de longueur n tels que

- les lettres de u sont des sous-ensembles de $\mathbf{A}(\mathfrak{G}) \setminus \{\mathsf{I}\}$;
- pour tout $\mathfrak{t} \in \mathcal{R}$ tel que $\mathfrak{t} = x \circ [\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_n]$, il existe un $\mathfrak{t}_i \in u_i$;
- les lettres de u sont minimales au sens de l'inclusion.

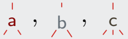
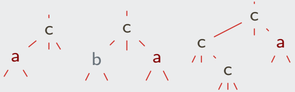
Description du système

Soient $\mathcal{R} \subseteq \mathbf{A}(\mathfrak{G})$ fini et $x \in \mathfrak{G}(n)$.

On définit $\mathcal{R}^x$ comme l'ensemble de tous les mots u de longueur n tels que

- les lettres de u sont des sous-ensembles de $\mathbf{A}(\mathfrak{G}) \setminus \{|\}$;
- pour tout $\mathfrak{t} \in \mathcal{R}$ tel que $\mathfrak{t} = x \circ [\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_n]$, il existe un $\mathfrak{t}_i \in u_i$;
- les lettres de u sont minimales au sens de l'inclusion.

Exemple

Soient $\mathfrak{G} := \Big\{$  $\Big\}$ et $\mathcal{R} :=$  .

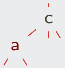
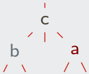
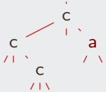
Description du système

Soient $\mathcal{R} \subseteq \mathbf{A}(\mathfrak{G})$ fini et $x \in \mathfrak{G}(n)$.

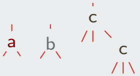
On définit $\mathcal{R}^x$ comme l'ensemble de tous les mots u de longueur n tels que

- les lettres de u sont des sous-ensembles de $\mathbf{A}(\mathfrak{G}) \setminus \{\shortmid\}$;
- pour tout $\mathfrak{t} \in \mathcal{R}$ tel que $\mathfrak{t} = x \circ [\mathfrak{t}_1, \dots, \mathfrak{t}_n]$, il existe un $\mathfrak{t}_i \in u_i$;
- les lettres de u sont minimales au sens de l'inclusion.

Exemple

Soient $\mathfrak{G} := \{$  ,  ,  $\}$ et $\mathcal{R} :=$    .

Nous avons alors

$\mathcal{R}^{\mathsf{c}} = \{ ($  $, \emptyset,$  $),($  $, \emptyset, \emptyset)\}$

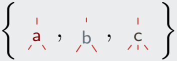
Description du système

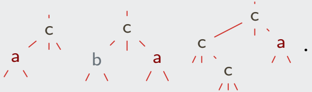
Soient $\mathcal{R} \subseteq \mathbf{A}(\mathfrak{G})$ fini et $x \in \mathfrak{G}(n)$.

On définit $\mathcal{R}^x$ comme l'ensemble de tous les mots u de longueur n tels que

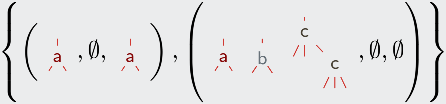
- les lettres de u sont des sous-ensembles de $\mathbf{A}(\mathfrak{G}) \setminus \{|\}$;
- pour tout $\mathfrak{t} \in \mathcal{R}$ tel que $\mathfrak{t} = x \circ [\mathfrak{t}_1, \dots, \mathfrak{t}_n]$, il existe un $\mathfrak{t}_i \in u_i$;
- les lettres de u sont minimales au sens de l'inclusion.

Exemple

Soient $\mathfrak{G} :=$ 

et $\mathcal{R} :=$ 

Nous avons alors

$\mathcal{R}^{c} =$ 

et

$$\mathcal{R}^{a} = \mathcal{R}^{b} = \{(\emptyset, \emptyset)\}.$$

Description du système

Théorème [G., 2017–]

Pour tout ensemble de lettres $\mathfrak{G}$ et tous $\mathcal{P}, \mathcal{Q} \subseteq \mathbf{A}(\mathfrak{G})$ finis,

$$\mathbf{f}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = \shortmid + \sum_{\substack{n \geqslant 1 \\ x \in \mathfrak{G}(n)}} \sum_{\substack{\mathcal{S} \subseteq (\mathcal{P} \cup \mathcal{Q})^{x} \\ \mathcal{S} \neq \emptyset}} (-1)^{1+\#\mathcal{S}} \; x \circ \left[\dots, \mathbf{f}\left(\mathcal{P}, \bigcup_{u \in \mathcal{S}} u_i \right), \dots \right].$$

Description du système

Théorème [G., 2017–]

Pour tout ensemble de lettres $\mathfrak{G}$ et tous $\mathcal{P}, \mathcal{Q} \subseteq \mathbf{A}(\mathfrak{G})$ finis,

$$\mathbf{f}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = | + \sum_{\substack{n \geqslant 1 \\ x \in \mathfrak{G}(n)}} \sum_{\substack{\mathcal{S} \subseteq (\mathcal{P} \cup \mathcal{Q})^{x} \\ \mathcal{S} \neq \emptyset}} (-1)^{1 + \# \mathcal{S}} \; x \circ \left[\ldots, \mathbf{f}\left(\mathcal{P}, \bigcup_{u \in \mathcal{S}} u_i \right), \ldots \right].$$

Intuition :

- dans l'expression de $\mathbf{f}(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$, il apparaît des $\mathbf{f}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}')$ où les arbres de $\mathcal{Q}'$ sont de hauteurs inférieures à celles de $\mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$;

Description du système

Théorème [G., 2017–]

Pour tout ensemble de lettres $\mathfrak{G}$ et tous $\mathcal{P}, \mathcal{Q} \subseteq \mathbf{A}(\mathfrak{G})$ finis,

$$\mathbf{f}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = | + \sum_{\substack{n \geqslant 1 \\ x \in \mathfrak{G}(n)}} \sum_{\substack{\mathcal{S} \subseteq (\mathcal{P} \cup \mathcal{Q})^{x} \\ \mathcal{S} \neq \emptyset}} (-1)^{1 + \#\mathcal{S}} \; x \circ \left[\dots, \mathbf{f}\left(\mathcal{P}, \bigcup_{u \in \mathcal{S}} u_i \right), \dots \right].$$

Intuition :

- dans l'expression de $\mathbf{f}(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$, il apparaît des $\mathbf{f}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}')$ où les arbres de $\mathcal{Q}'$ sont de hauteurs inférieures à celles de $\mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$;
- pour tout $u \in \mathcal{R}^{x}$, tout arbre $x \circ \left[\mathfrak{t}_1, \dots, \mathfrak{t}_{|x|}\right]$ évite en racine les arbres de $\mathcal{R}$ ssi chaque $\mathfrak{t}_i$ évite en racine les arbres de u_i ;

Description du système

Théorème [G., 2017–]

Pour tout ensemble de lettres $\mathfrak{G}$ et tous $\mathcal{P}, \mathcal{Q} \subseteq \mathbf{A}(\mathfrak{G})$ finis,

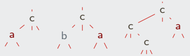
$$\mathbf{f}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = | + \sum_{\substack{n \geqslant 1 \\ x \in \mathfrak{G}(n)}} \sum_{\substack{\mathcal{S} \subseteq (\mathcal{P} \cup \mathcal{Q})^x \\ \mathcal{S} \neq \emptyset}} (-1)^{1+\#\mathcal{S}} \; x \circ \left[\ldots, \mathbf{f}\left(\mathcal{P}, \bigcup_{u \in \mathcal{S}} u_i\right), \ldots\right].$$

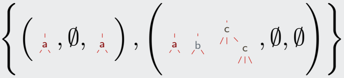
Intuition :

- dans l'expression de $\mathbf{f}(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$, il apparaît des $\mathbf{f}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}')$ où les arbres de $\mathcal{Q}'$ sont de hauteurs inférieures à celles de $\mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$;
- pour tout $u \in \mathcal{R}^x$, tout arbre $x \circ \left[\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_{|x|}\right]$ évite en racine les arbres de $\mathcal{R}$ ssi chaque $\mathfrak{t}_i$ évite en racine les arbres de u_i ;
- pour tous $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2 \in \mathcal{R}^x$, $\mathbf{f}(\mathcal{P}, \mathcal{S}_1) + \mathbf{f}(\mathcal{P}, \mathcal{S}_2) - \mathbf{f}(\mathcal{P}, \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2)$ est la série des arbres qui évitent en racine les arbres de $\mathcal{S}_1$ ou de $\mathcal{S}_2$.

Exemple de système

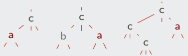
Exemple

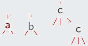
En poursuivant l'exemple précédent où $\mathcal{P} :=$  ,

$\mathcal{P}^{\mathsf{a}} = \mathcal{P}^{\mathsf{b}} = \{(\emptyset, \emptyset)\}$ et $\mathcal{P}^{\mathsf{c}} =$  , on a

Exemple de système

Exemple

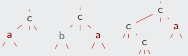
En poursuivant l'exemple précédent où $\mathcal{P} :=$  ,

$\mathcal{P}^{a} = \mathcal{P}^{b} = \{(\emptyset, \emptyset)\}$ et $\mathcal{P}^{c} = \Big\{ \Big($  $, \emptyset,$  $\Big), \Big($  $, \emptyset, \emptyset \Big) \Big\}$, on a

$\mathbf{f}(\mathcal{P}, \emptyset) =$

Exemple de système

Exemple

En poursuivant l'exemple précédent où $\mathcal{P} :=$  ,

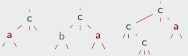
$\mathcal{P}^{\mathsf{a}} = \mathcal{P}^{\mathsf{b}} = \{(\emptyset, \emptyset)\}$ et $\mathcal{P}^{\mathsf{c}} = \Big\{ \Big($  $, \emptyset,$  $\Big), \Big($    $, \emptyset, \emptyset \Big) \Big\}$, on a

$\mathbf{f}(\mathcal{P}, \emptyset) =$

$$+ \mathsf{a} \circ [\mathbf{f}(\mathcal{P}, \emptyset), \mathbf{f}(\mathcal{P}, \emptyset)]$$

Exemple de système

Exemple

En poursuivant l'exemple précédent où $\mathcal{P} :=$  ,

$\mathcal{P}^{a} = \mathcal{P}^{b} = \{(\emptyset, \emptyset)\}$ et $\mathcal{P}^{c} = \Big\{ \Big($  $, \emptyset,$  $\Big), \Big($    $, \emptyset, \emptyset \Big) \Big\}$, on a

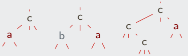
$$\mathbf{f}(\mathcal{P}, \emptyset) =$$

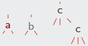
$$+ \, a \circ [\mathbf{f}(\mathcal{P}, \emptyset), \mathbf{f}(\mathcal{P}, \emptyset)]$$

$$+ \, b \circ [\mathbf{f}(\mathcal{P}, \emptyset), \mathbf{f}(\mathcal{P}, \emptyset)]$$

Exemple de système

Exemple

En poursuivant l'exemple précédent où $\mathcal{P} :=$  ,

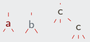
$\mathcal{P}^{a} = \mathcal{P}^{b} = \{(\emptyset, \emptyset)\}$ et $\mathcal{P}^{c} = \Big\{ \Big($  $, \emptyset,$  $\Big), \Big($  $, \emptyset, \emptyset \Big) \Big\}$, on a

$\mathbf{f}(\mathcal{P}, \emptyset) =$

$+\, a \circ [\mathbf{f}(\mathcal{P}, \emptyset), \mathbf{f}(\mathcal{P}, \emptyset)]$

$+\, b \circ [\mathbf{f}(\mathcal{P}, \emptyset), \mathbf{f}(\mathcal{P}, \emptyset)]$

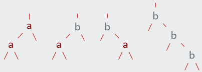
$+\, c \circ \Big[\mathbf{f}\Big(\mathcal{P},$  $\Big), \mathbf{f}(\mathcal{P}, \emptyset), \mathbf{f}\Big(\mathcal{P},$  $\Big)\Big]$

$+\, c \circ \Big[\mathbf{f}\Big(\mathcal{P},$  $\Big), \mathbf{f}(\mathcal{P}, \emptyset), \mathbf{f}(\mathcal{P}, \emptyset)\Big]$

$-\, c \circ \Big[\mathbf{f}\Big(\mathcal{P},$  $\Big), \mathbf{f}(\mathcal{P}, \emptyset), \mathbf{f}\Big(\mathcal{P},$  $\Big)\Big].$

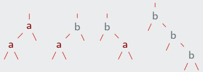
Exemple de système

Exemple

Considérons $\mathcal{P} :=$  (motifs des animaux dirigés).

Exemple de système

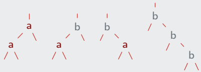
Exemple

Considérons $\mathcal{P} :=$  (motifs des animaux dirigés).

Nous avons alors

$$\mathbf{f}(\mathcal{P}, \emptyset) = \mid + \, \mathsf{a} \circ \left[\mathbf{f}\left(\mathcal{P}, \mathsf{a}\right), \mathbf{f}\left(\mathcal{P}, \emptyset\right) \right] + \mathsf{b} \circ \left[\mathbf{f}\left(\mathcal{P}, \mathsf{a}\right), \mathbf{f}\left(\mathcal{P}, \mathsf{a} \;\; \mathsf{b}(\mid, \mathsf{b}) \right) \right],$$

Exemple

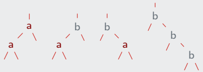
Considérons $\mathcal{P} :=$  (motifs des animaux dirigés).

Nous avons alors

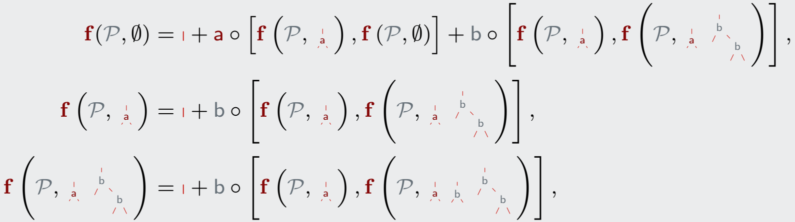
$\mathbf{f}(\mathcal{P}, \emptyset) = \mid + \, \mathsf{a} \circ \big[\mathbf{f}\big(\mathcal{P},$  $\big), \mathbf{f}\left(\mathcal{P}, \emptyset\right)\big] + \mathsf{b} \circ \big[\mathbf{f}\big(\mathcal{P},$  $\big), \mathbf{f}\big(\mathcal{P},$  $\big)\big],$

$\mathbf{f}\big(\mathcal{P},$  $\big) = \mid + \, \mathsf{b} \circ \big[\mathbf{f}\big(\mathcal{P},$  $\big), \mathbf{f}\big(\mathcal{P},$  $\big)\big],$

Exemple

Considérons $\mathcal{P} :=$  (motifs des animaux dirigés).

Nous avons alors



Exemple de système

Exemple

Considérons $\mathcal{P} := \mathsf{a}(\mathsf{a}, |) \quad \mathsf{b}(\mathsf{a}, |) \quad \mathsf{b}(|, \mathsf{a}) \quad \mathsf{b}(|, \mathsf{b}(|, \mathsf{b}))$ (motifs des animaux dirigés).

Nous avons alors

$$\mathbf{f}(\mathcal{P}, \emptyset) = | + \mathsf{a} \circ \left[\mathbf{f}\left(\mathcal{P}, \mathsf{a}\right), \mathbf{f}\left(\mathcal{P}, \emptyset\right)\right] + \mathsf{b} \circ \left[\mathbf{f}\left(\mathcal{P}, \mathsf{a}\right), \mathbf{f}\left(\mathcal{P}, \mathsf{a} \;\; \mathsf{b}(|, \mathsf{b})\right)\right],$$

$$\mathbf{f}\left(\mathcal{P}, \mathsf{a}\right) = | + \mathsf{b} \circ \left[\mathbf{f}\left(\mathcal{P}, \mathsf{a}\right), \mathbf{f}\left(\mathcal{P}, \mathsf{a} \;\; \mathsf{b}(|, \mathsf{b})\right)\right],$$

$$\mathbf{f}\left(\mathcal{P}, \mathsf{a} \;\; \mathsf{b}(|, \mathsf{b})\right) = | + \mathsf{b} \circ \left[\mathbf{f}\left(\mathcal{P}, \mathsf{a}\right), \mathbf{f}\left(\mathcal{P}, \mathsf{a} \;\; \mathsf{b} \;\; \mathsf{b}(|, \mathsf{b})\right)\right],$$

$$\mathbf{f}\left(\mathcal{P}, \mathsf{a} \;\; \mathsf{b} \;\; \mathsf{b}(|, \mathsf{b})\right) = |.$$

Évaluation

Observation : pour tout $x \in \mathfrak{G}(n)$ et toutes $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n \in \mathbb{K}\langle\langle \mathbf{A}(\mathfrak{G}) \rangle\rangle$,

$$\mathrm{ev}\left(x \circ [\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n]\right) = \prod_{i \in [n]} \mathrm{ev}(\mathbf{f}_i).$$

Évaluation

Observation : pour tout $x \in \mathfrak{G}(n)$ et toutes $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n \in \mathbb{K}\langle\langle \mathbf{A}(\mathfrak{G})\rangle\rangle$,

$$\operatorname{ev}\left(x \circ [\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n]\right) = \prod_{i \in [n]} \operatorname{ev}(\mathbf{f}_i).$$

On en déduit le résultat suivant.

Proposition [G., 2017–]

Soit $\mathfrak{G}$ un ensemble de lettres et $\mathcal{P}, \mathcal{Q} \subseteq \mathbf{A}(\mathfrak{G})$ finis. Soit la série de $\mathbb{K}\langle\langle t \rangle\rangle$ définie par

$$f(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = t + \sum_{\substack{n \geqslant 1 \\ x \in \mathfrak{G}(n)}} q_x \sum_{\substack{\mathcal{S} \subseteq (\mathcal{P} \cup \mathcal{Q})^x \\ \mathcal{S} \neq \emptyset}} (-1)^{1 + \#\mathcal{S}} \prod_{i \in [n]} f\left(\mathcal{P}, \bigcup_{u \in \mathcal{S}} u_i\right).$$

Alors, $\operatorname{ev}(\mathbf{f}(\mathcal{P}, \mathcal{Q})) = f(\mathcal{P}, \mathcal{Q})_{|q_x := 1, x \in \mathfrak{G}}$.

Cas particulier : mots

Quand $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}(1)$ les arbres de $\mathbf{A}(\mathfrak{G})$ sont unaires et peuvent se voir comme des mots et l'opération $\circ$ est la concaténation.

Exemple

Si $\mathfrak{G} := \mathfrak{G}(1) := \{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}\}$, on a dans $\mathbf{A}(\mathfrak{G})$,

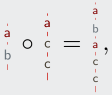
$$\begin{array}{c} \mathsf{a} \\ | \\ \mathsf{b} \end{array} \circ \begin{array}{c} \mathsf{a} \\ | \\ \mathsf{c} \\ | \\ \mathsf{c} \end{array} = \begin{array}{c} \mathsf{a} \\ | \\ \mathsf{b} \\ | \\ \mathsf{a} \\ | \\ \mathsf{c} \\ | \\ \mathsf{c} \end{array}, \qquad \text{qui se traduit en} \qquad \mathsf{ab} \cdot \mathsf{acc} = \mathsf{abacc}.$$

Cas particulier : mots

Quand $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}(1)$ les arbres de $\mathbf{A}(\mathfrak{G})$ sont unaires et peuvent se voir comme des mots et l'opération $\circ$ est la concaténation.

Exemple

Si $\mathfrak{G} := \mathfrak{G}(1) := \{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}\}$, on a dans $\mathbf{A}(\mathfrak{G})$,



qui se traduit en $\mathsf{ab} \cdot \mathsf{acc} = \mathsf{abacc}$.

Pour tout $\mathcal{R} \subseteq \mathbf{A}(\mathfrak{G})$ fini et $x \in \mathfrak{G}$, $\mathcal{R}^x$ est soit vide, soit un singleton. On en déduit alors le résultat suivant, énumérant les mots évitant des facteurs donnés [**Goulden, Jackson**, 1979].

Proposition

Pour tout ensemble de lettres $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}(1)$ et tous $\mathcal{P}, \mathcal{Q} \subseteq \mathbf{A}(\mathfrak{G})$ finis,

$$\mathbf{f}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = \epsilon + \sum_{\substack{x \in \mathfrak{G} \\ x \notin \mathcal{P} \cup \mathcal{Q}}} x \cdot \mathbf{f}\left(\mathcal{P}, \left\{u \in \mathfrak{G}^+ : xu \in \mathcal{P} \cup \mathcal{Q}\right\}\right).$$

Cas particulier : arêtes

Quand $\mathcal{R} \subseteq \mathbf{A}(\mathfrak{G})$ ne contient que des arbres de degré 2, on peut voir $\mathcal{R}$ comme un ensemble d'arêtes.

Cas particulier : arêtes

Quand $\mathcal{R} \subseteq \mathbf{A}(\mathfrak{G})$ ne contient que des arbres de degré 2, on peut voir $\mathcal{R}$ comme un ensemble d'arêtes.

De plus, dans ce cas, pour tout $x \in \mathfrak{G}$, $\mathcal{R}^x$ est voit vide, soit un singleton. On en déduit alors le résultat suivant, énumérant les arbres évitant des arêtes [**Parker**, 1993], [**Loday**, 2005].

Cas particulier : arêtes

Quand $\mathcal{R} \subseteq \mathbf{A}(\mathfrak{G})$ ne contient que des arbres de degré 2, on peut voir $\mathcal{R}$ comme un ensemble d'arêtes.

De plus, dans ce cas, pour tout $x \in \mathfrak{G}$, $\mathcal{R}^x$ est voit vide, soit un singleton. On en déduit alors le résultat suivant, énumérant les arbres évitant des arêtes [**Parker**, 1993], [**Loday**, 2005].

Proposition

Pour tout ensemble de lettres $\mathfrak{G}$ et tous $\mathcal{P}, \mathcal{Q} \subseteq \mathbf{A}(\mathfrak{G})$ finis et constitués d'éléments de degré 2,

$$\mathbf{f}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = \shortmid + \sum_{\substack{n \geqslant 1 \\ x \in \mathfrak{G}(n) \\ x \notin \mathcal{P} \cup \mathcal{Q}}} x \circ \left[\ldots, \mathbf{f}\left(\mathcal{P}, \{y \in \mathfrak{G} : x \circ_i y \in \mathcal{P} \cup \mathcal{Q}\}\right), \ldots\right].$$

Plan

Opérations sur les séries d'arbres

Produit de composition

Soit $\mathfrak{G}$ un ensemble de lettres.

Le produit de composition $\mathbf{f} \odot \mathbf{g}$ de $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathbb{K}\langle\langle \mathbf{A}(\mathfrak{G}) \rangle\rangle$ est défini par

$$\langle \mathfrak{t}, \mathbf{f} \odot \mathbf{g} \rangle := \sum_{\substack{\mathfrak{s}, \mathfrak{r}_1, \dots, \mathfrak{r}_{|\mathfrak{s}|} \in \mathbf{A}(\mathfrak{G}) \\ \mathfrak{t} = \mathfrak{s} \circ \left[\mathfrak{r}_1, \dots, \mathfrak{r}_{|\mathfrak{s}|}\right]}} \langle \mathfrak{s}, \mathbf{f} \rangle \prod_{i \in [|\mathfrak{s}|]} \langle \mathfrak{r}_i, \mathbf{g} \rangle \,.$$

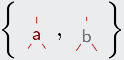
Produit de composition

Soit $\mathfrak{G}$ un ensemble de lettres.

Le produit de composition $\mathbf{f} \odot \mathbf{g}$ de $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathbb{K}\langle\langle \mathbf{A}(\mathfrak{G}) \rangle\rangle$ est défini par

$$\langle \mathfrak{t}, \mathbf{f} \odot \mathbf{g} \rangle := \sum_{\substack{\mathfrak{s}, \mathfrak{r}_1, \dots, \mathfrak{r}_{|\mathfrak{s}|} \in \mathbf{A}(\mathfrak{G}) \\ \mathfrak{t} = \mathfrak{s} \circ \left[\mathfrak{r}_1, \dots, \mathfrak{r}_{|\mathfrak{s}|}\right]}} \langle \mathfrak{s}, \mathbf{f} \rangle \prod_{i \in [|\mathfrak{s}|]} \langle \mathfrak{r}_i, \mathbf{g} \rangle .$$

Exemple

Dans $\mathbb{K}\langle\langle \mathbf{A}(\mathfrak{G}) \rangle\rangle$ où $\mathfrak{G} :=$ ,

Propriétés du produit de composition

La composition $\odot$ se formule de manière alternative par

$$\mathbf{f} \odot \mathbf{g} = \sum_{\substack{\mathfrak{s} \in \mathbf{A}(\mathfrak{G}) \\ \mathfrak{r}_1, \dots, \mathfrak{r}_{|\mathfrak{s}|} \in \mathbf{A}(\mathfrak{G})}} \langle \mathfrak{s}, \mathbf{f} \rangle \prod_{i \in [|\mathfrak{s}|]} \langle \mathfrak{r}_i, \mathbf{g} \rangle \;\; \mathfrak{s} \circ \left[\mathfrak{r}_1, \dots, \mathfrak{r}_{|\mathfrak{s}|}\right].$$

Propriétés du produit de composition

La composition $\odot$ se formule de manière alternative par

$$\mathbf{f} \odot \mathbf{g} = \sum_{\substack{\mathfrak{s} \in \mathbf{A}(\mathfrak{G}) \\ \mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}_{|\mathfrak{s}|} \in \mathbf{A}(\mathfrak{G})}} \langle \mathfrak{s}, \mathbf{f} \rangle \prod_{i \in [|\mathfrak{s}|]} \langle \mathfrak{r}_i, \mathbf{g} \rangle \; \mathfrak{s} \circ \left[\mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}_{|\mathfrak{s}|}\right].$$

Ce produit est

- défini totalement ;

Propriétés du produit de composition

La composition $\odot$ se formule de manière alternative par

$$\mathbf{f} \odot \mathbf{g} = \sum_{\substack{\mathfrak{s} \in \mathbf{A}(\mathfrak{G}) \\ \mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}_{|\mathfrak{s}|} \in \mathbf{A}(\mathfrak{G})}} \langle \mathfrak{s}, \mathbf{f} \rangle \prod_{i \in [|\mathfrak{s}|]} \langle \mathfrak{r}_i, \mathbf{g} \rangle \; \mathfrak{s} \circ \left[\mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}_{|\mathfrak{s}|} \right].$$

Ce produit est

- défini totalement ;
- linéaire à gauche (mais pas à droite) ;

Propriétés du produit de composition

La composition $\odot$ se formule de manière alternative par

$$\mathbf{f} \odot \mathbf{g} = \sum_{\substack{\mathfrak{s} \in \mathbf{A}(\mathfrak{G}) \\ \mathfrak{r}_1, \dots, \mathfrak{r}_{|\mathfrak{s}|} \in \mathbf{A}(\mathfrak{G})}} \langle \mathfrak{s}, \mathbf{f} \rangle \prod_{i \in [|\mathfrak{s}|]} \langle \mathfrak{r}_i, \mathbf{g} \rangle \; \mathfrak{s} \circ \left[\mathfrak{r}_1, \dots, \mathfrak{r}_{|\mathfrak{s}|}\right].$$

Ce produit est

- défini totalement ;
- linéaire à gauche (mais pas à droite) ;
- associatif ;

Propriétés du produit de composition

La composition $\odot$ se formule de manière alternative par

$$\mathbf{f} \odot \mathbf{g} = \sum_{\substack{\mathfrak{s} \in \mathbf{A}(\mathfrak{G}) \\ \mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_{|\mathfrak{s}|} \in \mathbf{A}(\mathfrak{G})}} \langle \mathfrak{s}, \mathbf{f} \rangle \prod_{i \in [|\mathfrak{s}|]} \langle \mathfrak{t}_i, \mathbf{g} \rangle \; \mathfrak{s} \circ \left[\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_{|\mathfrak{s}|}\right].$$

Ce produit est

- défini totalement ;
- linéaire à gauche (mais pas à droite) ;
- associatif ;
- admet $\mathbf{u} := |$ comme unité à gauche et à droite.

Propriétés du produit de composition

La composition $\odot$ se formule de manière alternative par

$$\mathbf{f} \odot \mathbf{g} = \sum_{\substack{\mathfrak{s} \in \mathbf{A}(\mathfrak{G}) \\ \mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_{|\mathfrak{s}|} \in \mathbf{A}(\mathfrak{G})}} \langle \mathfrak{s}, \mathbf{f} \rangle \prod_{i \in [|\mathfrak{s}|]} \langle \mathfrak{t}_i, \mathbf{g} \rangle \; \mathfrak{s} \circ \left[\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_{|\mathfrak{s}|}\right].$$

Ce produit est

- défini totalement ;
- linéaire à gauche (mais pas à droite) ;
- associatif ;
- admet $\mathbf{u} := |$ comme unité à gauche et à droite.

Proposition

Pour tout ensemble de lettres $\mathfrak{G}$, $(\mathbb{K} \langle\langle \mathbf{A}(\mathfrak{G}) \rangle\rangle, \odot, \mathbf{u})$ est un monoïde.

Composition de séries génératrices

Proposition

L'application ev est un morphisme de monoïdes de $(\mathbb{K}\langle\langle \mathbf{A}(\mathfrak{G})\rangle\rangle, \odot, \mathbf{u})$ dans $(t\mathbb{K}\langle\langle t\rangle\rangle, \circ, t)$.

Il est de plus surjectif quand $\mathfrak{G}(2) \neq \emptyset$.

Composition de séries génératrices

Proposition

L'application ev est un morphisme de monoïdes de $(\mathbb{K}\langle\langle \mathbf{A}(\mathfrak{G})\rangle\rangle, \odot, \mathbf{u})$ dans $(t\mathbb{K}\langle\langle t\rangle\rangle, \circ, t)$.

Il est de plus surjectif quand $\mathfrak{G}(2) \neq \emptyset$.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\mathrm{ev}(\mathbf{f} \odot \mathrm{g}) &= \sum_{\substack{\mathfrak{s} \in \mathbf{A}(\mathfrak{G}) \\ \mathfrak{r}_1, \dots, \mathfrak{r}_{|\mathfrak{s}|} \in \mathbf{A}(\mathfrak{G})}} \langle \mathfrak{s}, \mathbf{f} \rangle \prod_{i \in [|\mathfrak{s}|]} \langle \mathfrak{r}_i, \mathrm{g} \rangle \ \mathrm{ev}\left(\mathfrak{s} \circ \left[\mathfrak{r}_1, \dots, \mathfrak{r}_{|\mathfrak{s}|}\right]\right) \\
&= \sum_{\substack{\mathfrak{s} \in \mathbf{A}(\mathfrak{G}) \\ \mathfrak{r}_1, \dots, \mathfrak{r}_{|\mathfrak{s}|} \in \mathbf{A}(\mathfrak{G})}} \langle \mathfrak{s}, \mathbf{f} \rangle \prod_{i \in [|\mathfrak{s}|]} \langle \mathfrak{r}_i, \mathrm{g} \rangle \ t^{|\mathfrak{r}_1| + \dots + \left|\mathfrak{r}_{|\mathfrak{s}|}\right|} \\
&= \left(\sum_{\mathfrak{s} \in \mathbf{A}(\mathfrak{G})} \langle \mathfrak{s}, \mathbf{f} \rangle \, t^{|\mathfrak{s}|} \right) \circ \left(\sum_{\mathfrak{r} \in \mathbf{A}(\mathfrak{G})} \langle \mathfrak{r}, \mathrm{g} \rangle \, t^{|\mathfrak{r}|} \right) \\
&= \mathrm{ev}(\mathbf{f}) \circ \mathrm{ev}(\mathrm{g})
\end{aligned}$$

□

Composition de séries génératrices

Proposition

L'application ev est un morphisme de monoïdes de $(\mathbb{K}\langle\langle \mathbf{A}(\mathfrak{G})\rangle\rangle, \odot, \mathbf{u})$ dans $(t\mathbb{K}\langle\langle t\rangle\rangle, \circ, t)$.

Il est de plus surjectif quand $\mathfrak{G}(2) \neq \emptyset$.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\mathrm{ev}(\mathbf{f} \odot \mathrm{g}) &= \sum_{\substack{\mathfrak{s} \in \mathbf{A}(\mathfrak{G}) \\ \mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}_{|\mathfrak{s}|} \in \mathbf{A}(\mathfrak{G})}} \langle \mathfrak{s}, \mathbf{f}\rangle \prod_{i \in [|\mathfrak{s}|]} \langle \mathfrak{r}_i, \mathrm{g}\rangle \;\; \mathrm{ev}\left(\mathfrak{s} \circ \left[\mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}_{|\mathfrak{s}|}\right]\right) \\
&= \sum_{\substack{\mathfrak{s} \in \mathbf{A}(\mathfrak{G}) \\ \mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}_{|\mathfrak{s}|} \in \mathbf{A}(\mathfrak{G})}} \langle \mathfrak{s}, \mathbf{f}\rangle \prod_{i \in [|\mathfrak{s}|]} \langle \mathfrak{r}_i, \mathrm{g}\rangle \;\; t^{|\mathfrak{r}_1| + \cdots + \left|\mathfrak{r}_{|\mathfrak{s}|}\right|} \\
&= \left(\sum_{\mathfrak{s} \in \mathbf{A}(\mathfrak{G})} \langle \mathfrak{s}, \mathbf{f}\rangle \, t^{|\mathfrak{s}|}\right) \circ \left(\sum_{\mathfrak{r} \in \mathbf{A}(\mathfrak{G})} \langle \mathfrak{r}, \mathrm{g}\rangle \, t^{|\mathfrak{r}|}\right) \\
&= \mathrm{ev}(\mathbf{f}) \circ \mathrm{ev}(\mathrm{g}) \qquad \square
\end{aligned}$$

Ainsi, $\odot$ est une généralisation du produit de composition des séries génératrices de termes constants nuls.

Inverse pour la composition

L'inverse de $\mathbf{f} \in \mathbb{K}\langle\langle \mathbf{A}(\mathfrak{G}) \rangle\rangle$ lorsqu'il existe est la série d'arbres $\mathbf{x}$ vérifiant

$$\mathbf{f} \odot \mathbf{x} = \mathbf{u} = \mathbf{x} \odot \mathbf{f}.$$

Inverse pour la composition

L'inverse de $\mathbf{f} \in \mathbb{K}\langle\langle \mathbf{A}(\mathfrak{G}) \rangle\rangle$ lorsqu'il existe est la série d'arbres $\mathbf{x}$ vérifiant

$$\mathbf{f} \odot \mathbf{x} = \mathbf{u} = \mathbf{x} \odot \mathbf{f}.$$

Proposition

Soit $\mathbf{f} \in \mathbb{K}\langle\langle \mathbf{A}(\mathfrak{G}) \rangle\rangle$. Lorsque $\langle \shortmid, \mathbf{f} \rangle \neq 0$, l'inverse $\mathbf{f}^{-1}$ de $\mathbf{f}$ est bien défini et ses coefficients vérifient, pour tout $\mathfrak{t} \in \mathbf{A}(\mathfrak{G})$,

$$\left\langle \mathfrak{t}, \mathbf{f}^{-1} \right\rangle = \delta_{\mathfrak{t}, \shortmid} \langle \shortmid, \mathbf{f} \rangle^{-1} - \langle \shortmid, \mathbf{f} \rangle^{-1} \sum_{\substack{\mathfrak{s} \neq \shortmid, \mathfrak{r}_1, \dots, \mathfrak{r}_{|\mathfrak{s}|} \in \mathbf{A}(\mathfrak{G}) \\ \mathfrak{t} = \mathfrak{s} \circ \left[\mathfrak{r}_1, \dots, \mathfrak{r}_{|\mathfrak{s}|}\right]}} \langle \mathfrak{s}, \mathbf{f} \rangle \prod_{i \in [|\mathfrak{s}|]} \left\langle \mathfrak{r}_i, \mathbf{f}^{-1} \right\rangle .$$

Inverse pour la composition

L'inverse de $\mathbf{f} \in \mathbb{K}\langle\langle \mathbf{A}(\mathfrak{G})\rangle\rangle$ lorsqu'il existe est la série d'arbres $\mathbf{x}$ vérifiant

$$\mathbf{f} \odot \mathbf{x} = \mathbf{u} = \mathbf{x} \odot \mathbf{f}.$$

Proposition

Soit $\mathbf{f} \in \mathbb{K}\langle\langle \mathbf{A}(\mathfrak{G})\rangle\rangle$. Lorsque $\langle \shortmid, \mathbf{f}\rangle \neq 0$, l'inverse $\mathbf{f}^{-1}$ de $\mathbf{f}$ est bien défini et ses coefficients vérifient, pour tout $\mathfrak{t} \in \mathbf{A}(\mathfrak{G})$,

$$\left\langle \mathfrak{t}, \mathbf{f}^{-1}\right\rangle = \delta_{\mathfrak{t},\shortmid} \langle \shortmid, \mathbf{f}\rangle^{-1} - \langle \shortmid, \mathbf{f}\rangle^{-1} \sum_{\substack{\mathfrak{s} \neq \shortmid, \mathfrak{r}_1, \dots, \mathfrak{r}_{|\mathfrak{s}|} \in \mathbf{A}(\mathfrak{G}) \\ \mathfrak{t} = \mathfrak{s} \circ \left[\mathfrak{r}_1, \dots, \mathfrak{r}_{|\mathfrak{s}|}\right]}} \langle \mathfrak{s}, \mathbf{f}\rangle \prod_{i \in [|\mathfrak{s}|]} \left\langle \mathfrak{r}_i, \mathbf{f}^{-1}\right\rangle.$$

Démonstration.

Par définition de l'inverse, on a en particulier $\left\langle \shortmid, \mathbf{f} \odot \mathbf{f}^{-1}\right\rangle = 1$ et $\left\langle \mathfrak{t}, \mathbf{f} \odot \mathbf{f}^{-1}\right\rangle = 0$ quand $\mathfrak{t} \neq \shortmid$. Ceci implique $\left\langle \shortmid, \mathbf{f}^{-1}\right\rangle = \langle \shortmid, \mathbf{f}\rangle^{-1}$ et

$$\langle \shortmid, \mathbf{f}\rangle \left\langle \mathfrak{t}, \mathbf{f}^{-1}\right\rangle + \sum_{\substack{\mathfrak{s} \neq \shortmid, \mathfrak{r}_1, \dots, \mathfrak{r}_{|\mathfrak{s}|} \in \mathbf{A}(\mathfrak{G}) \\ \mathfrak{t} = \mathfrak{s} \circ \left[\mathfrak{r}_1, \dots, \mathfrak{r}_{|\mathfrak{s}|}\right]}} \langle \mathfrak{s}, \mathbf{f}\rangle \prod_{i \in [|\mathfrak{s}|]} \left\langle \mathfrak{r}_i, \mathbf{f}^{-1}\right\rangle = 0. \qquad \square$$

Inverse pour la composition

Proposition [G., 2017–]

Soit $\mathbf{f} \in \mathbb{K}\langle\langle \mathbf{A}(\mathfrak{G}) \rangle\rangle$. Lorsque $\langle |, \mathbf{f} \rangle \neq 0$, les coefficients de $\mathbf{f}^{-1}$ vérifient pour tout $\mathfrak{t} \in \mathbf{A}(\mathfrak{G})$,

$$\left\langle \mathfrak{t}, \mathbf{f}^{-1} \right\rangle = \sum_{\mathfrak{s} \in \mathrm{Fact}(\mathfrak{t})} \frac{(-1)^{\deg(\mathfrak{s})}}{\left\langle |, \mathbf{f} \right\rangle^{\mathrm{a}(\mathfrak{s})}} \prod_{v \in \mathcal{N}(\mathfrak{s})} \left\langle \mathfrak{s}(v), \mathbf{f} \right\rangle.$$

Inverse pour la composition

Proposition [G., 2017–]

Soit $\mathbf{f} \in \mathbb{K}\langle\langle \mathbf{A}(\mathfrak{G})\rangle\rangle$. Lorsque $\langle \shortmid, \mathbf{f}\rangle \neq 0$, les coefficients de $\mathbf{f}^{-1}$ vérifient pour tout $\mathfrak{t} \in \mathbf{A}(\mathfrak{G})$,

$$\left\langle \mathfrak{t}, \mathbf{f}^{-1} \right\rangle = \sum_{\mathfrak{s} \in \mathrm{Fact}(\mathfrak{t})} \frac{(-1)^{\deg(\mathfrak{s})}}{\left\langle \shortmid, \mathbf{f}\right\rangle^{\mathrm{a}(\mathfrak{s})}} \prod_{v \in \mathcal{N}(\mathfrak{s})} \left\langle \mathfrak{s}(v), \mathbf{f}\right\rangle .$$

Pour tout $\mathfrak{t} \in \mathbf{A}(\mathfrak{G})$, $\mathrm{Fact}(\mathfrak{t})$ est l'ensemble des factorisations de $\mathfrak{t}$. Ce sont les arbres $\mathfrak{s}$ de $\mathbf{A}(\mathbf{A}(\mathfrak{G}))$ tels que l'évaluation de $\mathfrak{s}$ est $\mathfrak{t}$.

Inverse pour la composition

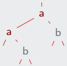
Proposition [G., 2017–]

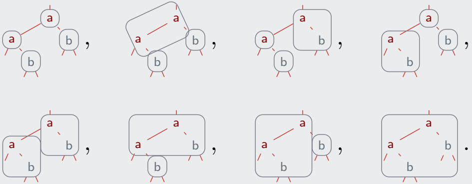
Soit $\mathbf{f} \in \mathbb{K}\langle\langle \mathbf{A}(\mathfrak{G})\rangle\rangle$. Lorsque $\langle \mathsf{I}, \mathbf{f}\rangle \neq 0$, les coefficients de $\mathbf{f}^{-1}$ vérifient pour tout $\mathfrak{t} \in \mathbf{A}(\mathfrak{G})$,

$$\left\langle \mathfrak{t}, \mathbf{f}^{-1} \right\rangle = \sum_{\mathfrak{s} \in \mathrm{Fact}(\mathfrak{t})} \frac{(-1)^{\deg(\mathfrak{s})}}{\langle \mathsf{I}, \mathbf{f}\rangle^{\mathrm{a}(\mathfrak{s})}} \prod_{v \in \mathcal{N}(\mathfrak{s})} \langle \mathfrak{s}(v), \mathbf{f}\rangle .$$

Pour tout $\mathfrak{t} \in \mathbf{A}(\mathfrak{G})$, $\mathrm{Fact}(\mathfrak{t})$ est l'ensemble des factorisations de $\mathfrak{t}$. Ce sont les arbres $\mathfrak{s}$ de $\mathbf{A}(\mathbf{A}(\mathfrak{G}))$ tels que l'évaluation de $\mathfrak{s}$ est $\mathfrak{t}$.

Exemple

L'arbre  admet les factorisations



Inverse de séries d'arbres à motifs exclus

Proposition [G., 2017–]

Pour tout ensemble de lettres $\mathfrak{G}$, tout $\mathcal{P} \subseteq \mathbf{A}(\mathfrak{G})$ fini et tout $\mathfrak{t} \in \mathbf{A}(\mathfrak{G})$,

$$\left\langle \mathfrak{t}, \mathbf{f}(\mathcal{P})^{-1} \right\rangle = \sum_{\substack{\mathfrak{s} \in \mathrm{Fact}(\mathfrak{t}) \\ \forall v \in \mathcal{N}(\mathfrak{s}), \forall \mathfrak{r} \in \mathcal{P}, \mathfrak{r} \not\preccurlyeq \mathfrak{s}(v)}} (-1)^{\deg(\mathfrak{s})}.$$

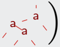
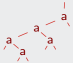
Inverse de séries d'arbres à motifs exclus

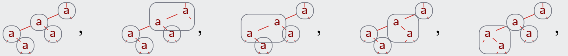
Proposition [G., 2017–]

Pour tout ensemble de lettres $\mathfrak{G}$, tout $\mathcal{P} \subseteq \mathbf{A}(\mathfrak{G})$ fini et tout $\mathfrak{t} \in \mathbf{A}(\mathfrak{G})$,

$$\left\langle \mathfrak{t}, \mathbf{f}(\mathcal{P})^{-1} \right\rangle = \sum_{\substack{\mathfrak{s} \in \mathrm{Fact}(\mathfrak{t}) \\ \forall v \in \mathcal{N}(\mathfrak{s}), \forall \mathfrak{r} \in \mathcal{P}, \mathfrak{r} \not\preccurlyeq \mathfrak{s}(v)}} (-1)^{\deg(\mathfrak{s})}.$$

Exemple

Dans $\mathbf{f}\left(\right.$  $\left.\right)^{-1}$, le coefficient de  dépend des factorisations



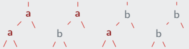
$-1, \quad +1, \quad +1, \quad +1, \quad +1,$

$-1, \quad -1, \quad -1, \quad -1$

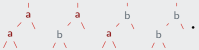
et est donc -1.

Exemples d'inverses — puissances de 2

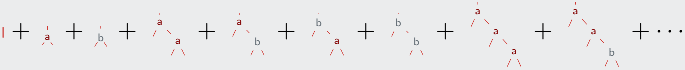
Exemple

Soit $\mathcal{P} :=$  .

Exemple

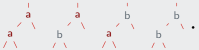
Soit $\mathcal{P} :=$ 

On a alors

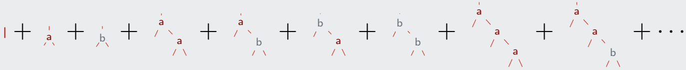
$\mathbf{f}(\mathcal{P}) =$ 

Exemples d'inverses — puissances de 2

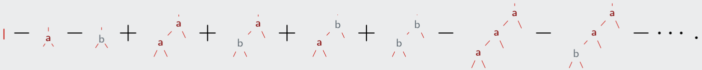
Exemple

Soit $\mathcal{P} :=$ 

On a alors

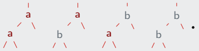
$\mathbf{f}(\mathcal{P}) =$ 

et

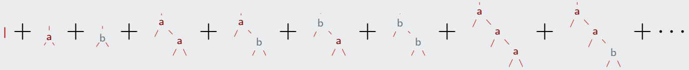
$\mathbf{f}(\mathcal{P})^{-1} =$ 

Exemples d'inverses — puissances de 2

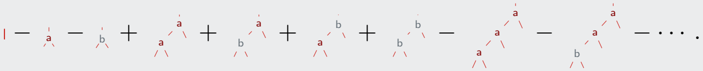
Exemple

Soit $\mathcal{P} :=$ 

On a alors

$$\mathbf{f}(\mathcal{P}) =$$ 

et

$$\mathbf{f}(\mathcal{P})^{-1} =$$ 

On a aussi

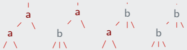
$$\mathrm{ev}(\mathbf{f}(\mathcal{P})) = \sum_{n \geqslant 1} 2^{n-1} t^n$$

et

$$\mathrm{ev}\left(\mathbf{f}(\mathcal{P})^{-1}\right) = \sum_{n \geqslant 1} (-2)^{n-1} t^n.$$

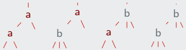
Exemples d'inverses — nombres de Motzkin

Exemple

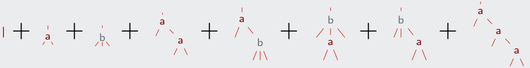
Soit $\mathcal{P} :=$  .

Exemples d'inverses — nombres de Motzkin

Exemple

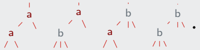
Soit $\mathcal{P} :=$  .

On a alors

$\mathbf{f}(\mathcal{P}) =$  $+ \cdots$

Exemples d'inverses — nombres de Motzkin

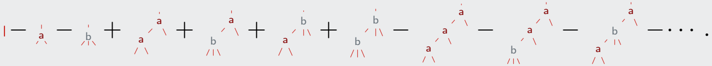
Exemple

Soit $\mathcal{P} :=$ 

On a alors

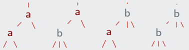
$\mathbf{f}(\mathcal{P}) =$ 

et

$\mathbf{f}(\mathcal{P})^{-1} =$ 

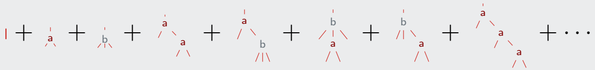
Exemples d'inverses — nombres de Motzkin

Exemple

Soit $\mathcal{P} :=$  .

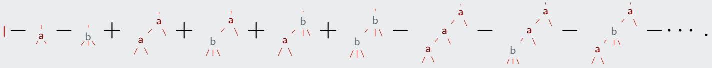
On a alors

$$\mathbf{f}(\mathcal{P}) =$$



et

$$\mathbf{f}(\mathcal{P})^{-1} =$$



On a aussi

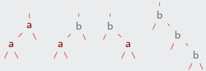
$$\mathrm{ev}(\mathbf{f}(\mathcal{P})) = t + t^2 + 2t^3 + 4t^4 + 9t^5 + 21t^6 + 51t^7 + 127t^8 + \cdots$$

et

$$\mathrm{ev}\left(\mathbf{f}(\mathcal{P})^{-1}\right) = t \sum_{n \geqslant 0} t^{3n} - t^{3n+1} = t - t^2 + t^4 - t^5 + t^7 - t^8 + t^{10} - t^{11} + \cdots .$$

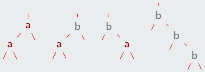
Exemples d'inverses — animaux dirigés

Exemple

Soit $\mathcal{P} :=$  .

Exemples d'inverses — animaux dirigés

Exemple

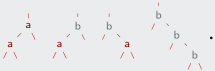
Soit $\mathcal{P} :=$  .

On a alors

$$\mathbf{f}(\mathcal{P}) =$$ 

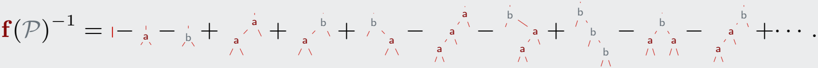
Exemples d’inverses — animaux dirigés

Exemple

Soit $\mathcal{P} :=$  .

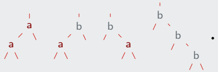
On a alors

et



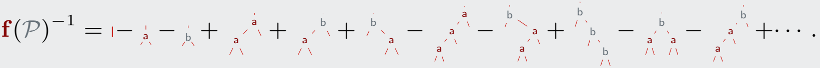
Exemples d'inverses — animaux dirigés

Exemple

Soit $\mathcal{P}$:= 

On a alors

et



On a aussi

$$\mathrm{ev}(\mathbf{f}(\mathcal{P})) = t + 2t^2 + 5t^3 + 13t^4 + 35t^5 + 96t^6 + 267t^7 + 750t^8 + \cdots .$$

et

$$\mathrm{ev}\left(\mathbf{f}(\mathcal{P})^{-1}\right) = t - 2t^2 + 3t^3 - 3t^4 + 9t^6 - 27t^7 + 54t^8 - 81t^9 + 81t^{10} - 243t^{12} + \cdots .$$

Inverse de séries d'arbres à motifs exclus simples

Théorème [**Parker**, 1993] [**Loday**, 2005]

Lorsque $\mathfrak{G}$ est un ensemble de lettres tel que $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}(2)$ et $\mathcal{P} \subseteq \mathbf{A}(\mathfrak{G})$ est fini et ne contient que des arbres de degré 2,

$$\mathbf{f}(\mathcal{P})^{-1} = \sum_{\substack{\mathfrak{t} \in \mathbf{A}(\mathfrak{G}) \\ \forall \mathfrak{s} \in \mathrm{cmp}(\mathcal{P}), \mathfrak{s} \not\preccurlyeq \mathfrak{t}}} (-1)^{\deg(\mathfrak{t})} \mathfrak{t},$$

où $\mathrm{cmp}(\mathcal{P}) := \mathbf{A}(\mathfrak{G})(3) \setminus \mathcal{P}$.

Inverse de séries d'arbres à motifs exclus simples

Théorème [**Parker**, 1993] [**Loday**, 2005]

Lorsque $\mathfrak{G}$ est un ensemble de lettres tel que $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}(2)$ et $\mathcal{P} \subseteq \mathbf{A}(\mathfrak{G})$ est fini et ne contient que des arbres de degré 2,

$$\mathbf{f}(\mathcal{P})^{-1} = \sum_{\substack{\mathfrak{t} \in \mathbf{A}(\mathfrak{G}) \\ \forall \mathfrak{s} \in \mathrm{cmp}(\mathcal{P}), \mathfrak{s} \not\preccurlyeq \mathfrak{t}}} (-1)^{\deg(\mathfrak{t})} \mathfrak{t},$$

où $\mathrm{cmp}(\mathcal{P}) := \mathbf{A}(\mathfrak{G})(3) \setminus \mathcal{P}$.

En conséquence,

$$\mathrm{g}\left(-\mathrm{g}(t)^{-1}\right) = t = \mathrm{g}(-\mathrm{g}(t))^{-1}.$$

où $\mathrm{g}(t) := \mathrm{ev}(\mathbf{f}(\mathcal{P}))$ est la série génératrice dénombrant les arbres de $\mathbf{A}(\mathfrak{G})$ évitant les motifs de $\mathcal{P}$.

Inverse de séries d'arbres à motifs exclus

Question

Existe-t-il une description aussi simple pour les coefficients de $\mathbf{f}(\mathcal{P})^{-1}$ en relâchant les conditions sur $\mathfrak{G}$ et $\mathcal{P}$?

Inverse de séries d'arbres à motifs exclus

Question

Existe-t-il une description aussi simple pour les coefficients de $\mathbf{f}(\mathcal{P})^{-1}$ en relâchant les conditions sur $\mathfrak{G}$ et $\mathcal{P}$?

La réponse est non car il peut y avoir des coefficients non triviaux (différents de $-1, 0$ et 1) qui apparaissent dans $\mathbf{f}(\mathcal{P})^{-1}$.

Inverse de séries d'arbres à motifs exclus

Question

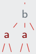
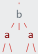
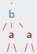
Existe-t-il une description aussi simple pour les coefficients de $\mathbf{f}(\mathcal{P})^{-1}$ en relâchant les conditions sur $\mathfrak{G}$ et $\mathcal{P}$?

La réponse est non car il peut y avoir des coefficients non triviaux (différents de -1, 0 et 1) qui apparaissent dans $\mathbf{f}(\mathcal{P})^{-1}$.

Exemple

Soit $\mathcal{P} :=$  .

On a alors

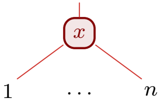
$\mathbf{f}(\mathcal{P})^{-1} =$ $-$  $-$  $+$  $+$  $+$  -2  $+ \cdots .$

Plan

Opérades et dénombrement

Opérateurs

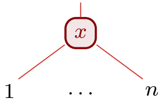
Un opérateur est une entité ayant $n \geqslant 1$ entrées et une sortie.



Son arité est son nombre n d'entrées.

Opérateurs

Un opérateur est une entité ayant $n \geqslant 1$ entrées et une sortie.



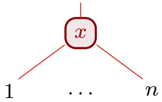
Son arité est son nombre n d'entrées.

Composer deux opérateurs x et y consiste à

1. choisir une entrée de x identifiée par sa position i ;
2. greffer la sortie de y sur cette entrée.

Opérateurs

Un opérateur est une entité ayant $n \geqslant 1$ entrées et une sortie.

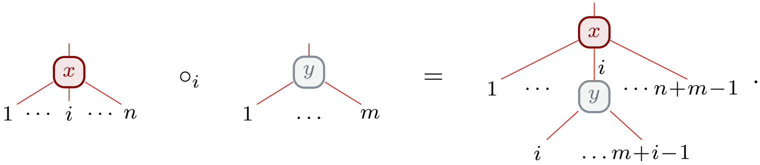


Son arité est son nombre n d'entrées.

Composer deux opérateurs x et y consiste à

1. choisir une entrée de x identifiée par sa position i ;
2. greffer la sortie de y sur cette entrée.

Ceci produit un nouvel opérateur $x \circ_i y$ d'arité $n + m - 1$:



Opérades

Les opérades sont des structures algébriques formalisant la notion d'opérateur (munis de leur composition).

Opérades

Les opérades sont des structures algébriques formalisant la notion d'opérateur (munis de leur composition).

Une opérade (ensembliste non symétrique) est un triplet $(\mathcal{O}, \circ_i, \mathbb{1})$ où

1. $\mathcal{O}$ est un ensemble gradué

$$\mathcal{O} := \bigsqcup_{n \geqslant 1} \mathcal{O}(n) \; ;$$

Opérades

Les opérades sont des structures algébriques formalisant la notion d'opérateur (munis de leur composition).

Une opérade (ensembliste non symétrique) est un triplet $(\mathcal{O}, \circ_i, \mathbb{1})$ où

1. $\mathcal{O}$ est un ensemble gradué

$$\mathcal{O} := \bigsqcup_{n \geqslant 1} \mathcal{O}(n) \ ;$$

2. $\circ_i$ est une application de composition partielle,

$$\circ_i : \mathcal{O}(n) \times \mathcal{O}(m) \to \mathcal{O}(n + m - 1), \qquad n \leqslant i, m \geqslant 1 \ ;$$

Opérades

Les opérades sont des structures algébriques formalisant la notion d'opérateur (munis de leur composition).

Une opérade (ensembliste non symétrique) est un triplet $(\mathcal{O}, \circ_i, \mathbb{1})$ où

1. $\mathcal{O}$ est un ensemble gradué

$$\mathcal{O} := \bigsqcup_{n \geqslant 1} \mathcal{O}(n)\ ;$$

2. $\circ_i$ est une application de composition partielle,

$$\circ_i : \mathcal{O}(n) \times \mathcal{O}(m) \to \mathcal{O}(n + m - 1), \qquad n \leqslant i, m \geqslant 1\ ;$$

3. $\mathbb{1}$ est un élément de $\mathcal{O}(1)$, appelé unité.

Opérades

Les opérades sont des structures algébriques formalisant la notion d'opérateur (munis de leur composition).

Une opérade (ensembliste non symétrique) est un triplet $(\mathcal{O}, \circ_i, \mathbb{1})$ où

1. $\mathcal{O}$ est un ensemble gradué

$$\mathcal{O} := \bigsqcup_{n \geqslant 1} \mathcal{O}(n) \; ;$$

2. $\circ_i$ est une application de composition partielle,

$$\circ_i : \mathcal{O}(n) \times \mathcal{O}(m) \to \mathcal{O}(n + m - 1), \qquad n \leqslant i, m \geqslant 1 \; ;$$

3. $\mathbb{1}$ est un élément de $\mathcal{O}(1)$, appelé unité.

Ces objets doivent vérifier des axiomes.

Axiomes des opérades

Associativité :

$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$

$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$

$i \in [n], j \in [m]$

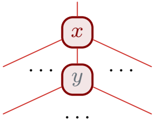
Axiomes des opérades

Associativité :

$(x \circ_i y)$

$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$

$i \in [n], j \in [m]$



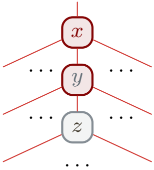
Axiomes des opérades

Associativité :

$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z$

$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$

$i \in [n], j \in [m]$



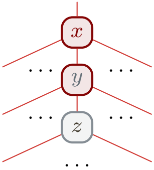
Axiomes des opérades

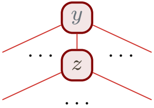
Associativité :

$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z \qquad (y \circ_j z)$

$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$

$i \in [n], j \in [m]$





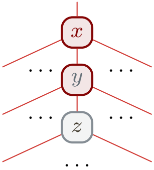
Axiomes des opérades

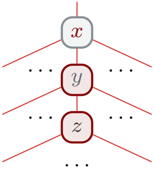
Associativité :

$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z \qquad x \circ_i (y \circ_j z)$

$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$

$i \in [n], j \in [m]$





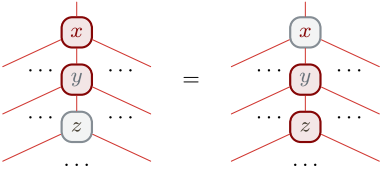
Axiomes des opérades

Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$

$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$

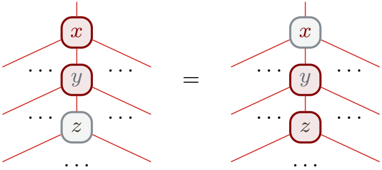
$i \in [n], j \in [m]$



Axiomes des opérades

Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$
$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$
$$i \in [n], j \in [m]$$



Commutativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{j+m-1} z = (x \circ_j z) \circ_i y$$
$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$
$$1 \leqslant i < j \leqslant n$$

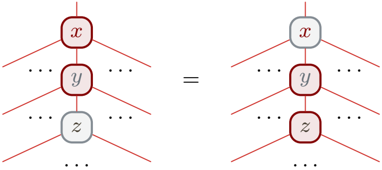
Axiomes des opérades

Associativité :

$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$

$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$

$i \in [n], j \in [m]$

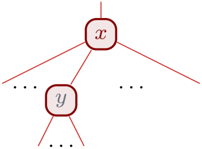


Commutativité :

$(x \circ_i y)$

$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$

$1 \leqslant i < j \leqslant n$



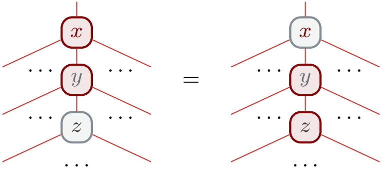
Axiomes des opérades

Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$

$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$

$i \in [n], j \in [m]$

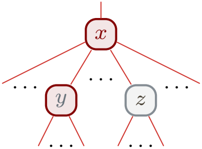


Commutativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{j+m-1} z$$

$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$

$1 \leqslant i < j \leqslant n$



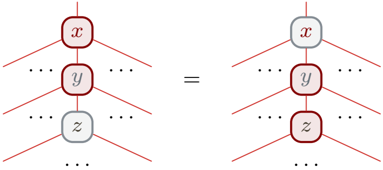
Axiomes des opérades

Associativité :

$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$

$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$

$i \in [n], j \in [m]$

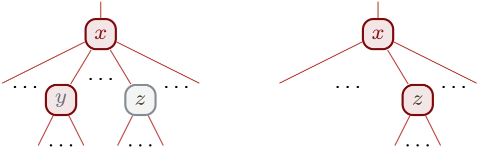


Commutativité :

$(x \circ_i y) \circ_{j+m-1} z \qquad (x \circ_j z)$

$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$

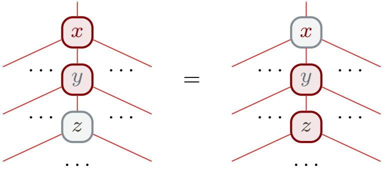
$1 \leqslant i < j \leqslant n$



Axiomes des opérades

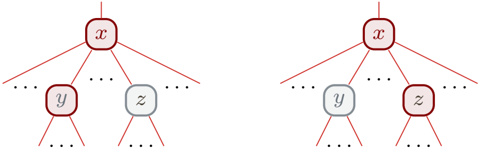
Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$
$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$
$$i \in [n], j \in [m]$$



Commutativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{j+m-1} z \qquad (x \circ_j z) \circ_i y$$
$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$
$$1 \leqslant i < j \leqslant n$$



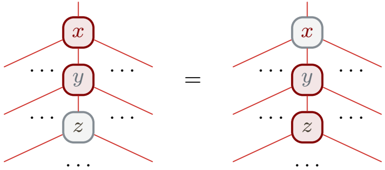
Axiomes des opérades

Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$

$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$

$i \in [n], j \in [m]$

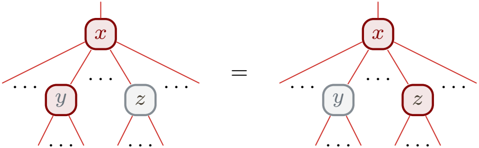


Commutativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{j+m-1} z = (x \circ_j z) \circ_i y$$

$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$

$1 \leqslant i < j \leqslant n$



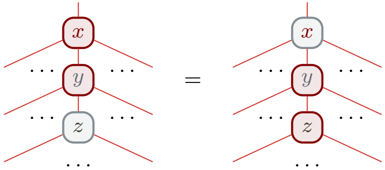
Axiomes des opérades

Associativité :

$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$

$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$

$i \in [n], j \in [m]$

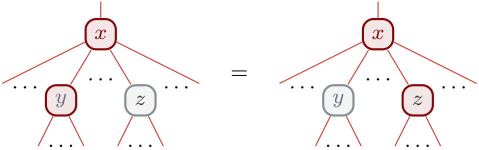


Commutativité :

$(x \circ_i y) \circ_{j+m-1} z = (x \circ_j z) \circ_i y$

$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$

$1 \leqslant i < j \leqslant n$



Unitalité :

$\mathbb{1} \circ_1 x = x = x \circ_i \mathbb{1}$

$x \in \mathcal{O}(n)$

$i \in [n]$

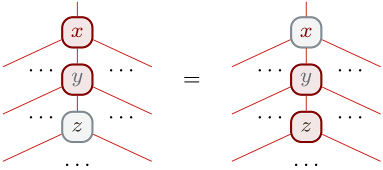
Axiomes des opérades

Associativité :

$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$

$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$

$i \in [n], j \in [m]$

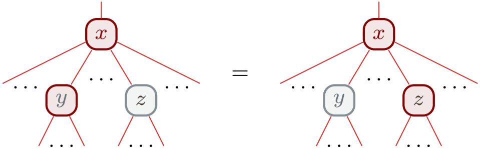


Commutativité :

$(x \circ_i y) \circ_{j+m-1} z = (x \circ_j z) \circ_i y$

$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$

$1 \leqslant i < j \leqslant n$

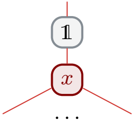


Unitalité :

$\mathbb{1} \circ_1 x$

$x \in \mathcal{O}(n)$

$i \in [n]$



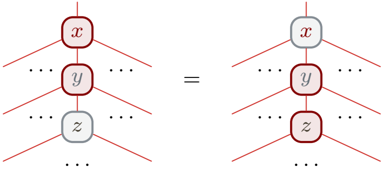
Axiomes des opérades

Associativité :

$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$

$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$

$i \in [n], j \in [m]$

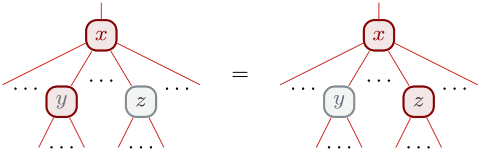


Commutativité :

$(x \circ_i y) \circ_{j+m-1} z = (x \circ_j z) \circ_i y$

$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$

$1 \leqslant i < j \leqslant n$

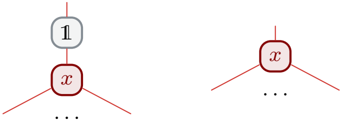


Unitalité :

$\mathbb{1} \circ_1 x \quad x$

$x \in \mathcal{O}(n)$

$i \in [n]$



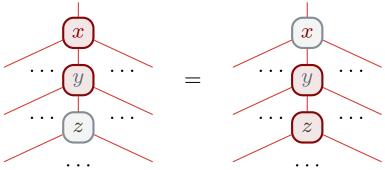
Axiomes des opérades

Associativité :

$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$

$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$

$i \in [n], j \in [m]$

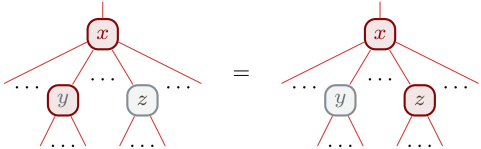


Commutativité :

$(x \circ_i y) \circ_{j+m-1} z = (x \circ_j z) \circ_i y$

$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$

$1 \leqslant i < j \leqslant n$

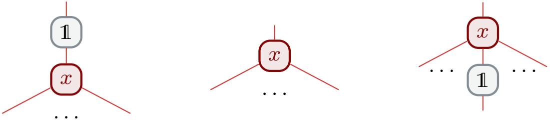


Unitalité :

$\mathbb{1} \circ_1 x \qquad x \qquad x \circ_i \mathbb{1}$

$x \in \mathcal{O}(n)$

$i \in [n]$



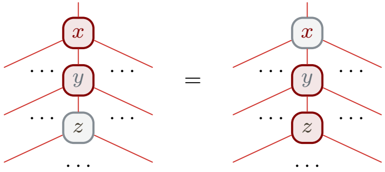
Axiomes des opérades

Associativité :

$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$

$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$

$i \in [n], j \in [m]$

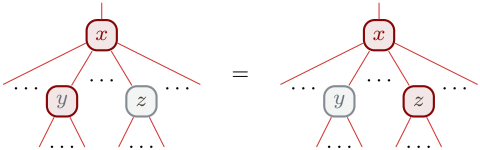


Commutativité :

$(x \circ_i y) \circ_{j+m-1} z = (x \circ_j z) \circ_i y$

$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$

$1 \leqslant i < j \leqslant n$

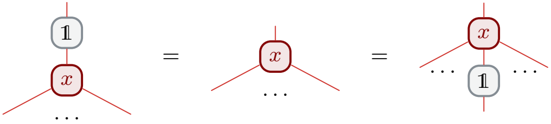


Unitalité :

$\mathbb{1} \circ_1 x = x = x \circ_i \mathbb{1}$

$x \in \mathcal{O}(n)$

$i \in [n]$

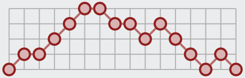


Une opérade de chemins de Motzkin

Soit Motz l'opérade dans laquelle :

- Motz(n) est l'ensemble des chemins de Motzkin de taille $n - 1$.

Exemple



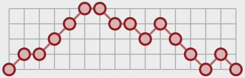
chemin de Motzkin d'arité 16.

Une opérade de chemins de Motzkin

Soit Motz l'opérade dans laquelle :

- Motz(n) est l'ensemble des chemins de Motzkin de taille $n - 1$.

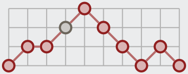
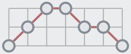
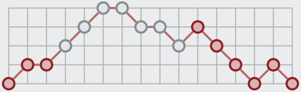
Exemple



chemin de Motzkin d'arité 16.

- La composition partielle $x \circ_i y$ se calcule en remplaçant le i^{e} point de x par une copie de y.

Exemple

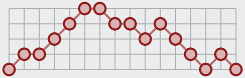
 $\circ_4$  $=$ 

Une opérade de chemins de Motzkin

Soit Motz l'opérade dans laquelle :

- Motz(n) est l'ensemble des chemins de Motzkin de taille $n - 1$.

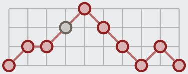
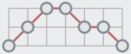
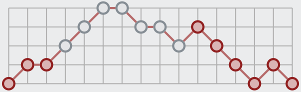
Exemple



chemin de Motzkin d'arité 16.

- La composition partielle $x \circ_i y$ se calcule en remplaçant le i^{e} point de x par une copie de y.

Exemple

 $\circ_4$  $=$ 

- L'unité est .

Opérades libres

Soit $\mathfrak{G}$ un ensemble de lettres.

Opérades libres

Soit $\mathfrak{G}$ un ensemble de lettres.

L'opérade libre sur $\mathfrak{G}$ est l'opérade $\mathbf{A}(\mathfrak{G})$ dans laquelle

- les éléments d'arité n sont les arbres de $\mathbf{A}(\mathfrak{G})(n)$;

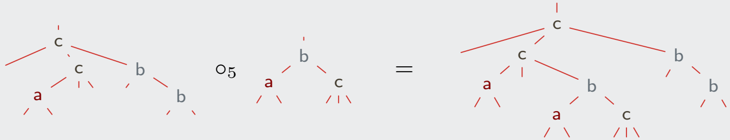
Opérades libres

Soit $\mathfrak{G}$ un ensemble de lettres.

L'opérade libre sur $\mathfrak{G}$ est l'opérade $\mathbf{A}(\mathfrak{G})$ dans laquelle

- les éléments d'arité n sont les arbres de $\mathbf{A}(\mathfrak{G})(n)$;
- La composition partielle est la greffe partielle $\circ_i$ des arbres.

Exemple



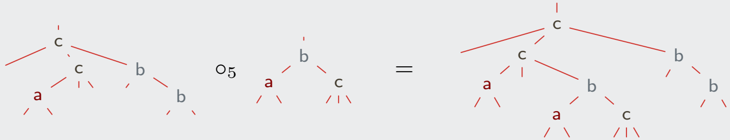
Opérades libres

Soit $\mathfrak{G}$ un ensemble de lettres.

L'opérade libre sur $\mathfrak{G}$ est l'opérade $\mathbf{A}(\mathfrak{G})$ dans laquelle

- les éléments d'arité n sont les arbres de $\mathbf{A}(\mathfrak{G})(n)$;
- La composition partielle est la greffe partielle $\circ_i$ des arbres.

Exemple



- L'unité est l'arbre $|$ réduit à une feuille.

Présentations d'opérades

Soit $\mathcal{O}$ une opérade

Une présentation de $\mathcal{O}$ est un couple $(\mathfrak{G}, \equiv)$ tel que

Présentations d'opérades

Soit $\mathcal{O}$ une opérade

Une présentation de $\mathcal{O}$ est un couple $(\mathfrak{G}, \equiv)$ tel que

- $\mathfrak{G}$ est un ensemble de lettres, appelé ensemble générateur ;

Présentations d'opérades

Soit $\mathcal{O}$ une opérade

Une présentation de $\mathcal{O}$ est un couple $(\mathfrak{G}, \equiv)$ tel que

- $\mathfrak{G}$ est un ensemble de lettres, appelé ensemble générateur ;
- $\equiv$ est une congruence d'opérades de $\mathbf{A}(\mathfrak{G})$, c.-à-d. une relation d'équivalence sur les arbres syntaxiques telle que si $\mathfrak{t} \equiv \mathfrak{t}'$ et $\mathfrak{s} \equiv \mathfrak{s}'$ alors $\mathfrak{t} \circ_i \mathfrak{s} \equiv \mathfrak{t}' \circ_i \mathfrak{s}'$;

Présentations d'opérades

Soit $\mathcal{O}$ une opérade

Une présentation de $\mathcal{O}$ est un couple $(\mathfrak{G}, \equiv)$ tel que

- $\mathfrak{G}$ est un ensemble de lettres, appelé ensemble générateur ;
- $\equiv$ est une congruence d'opérades de $\mathbf{A}(\mathfrak{G})$, c.-à-d. une relation d'équivalence sur les arbres syntaxiques telle que si $\mathfrak{t} \equiv \mathfrak{t}'$ et $\mathfrak{s} \equiv \mathfrak{s}'$ alors $\mathfrak{t} \circ_i \mathfrak{s} \equiv \mathfrak{t}' \circ_i \mathfrak{s}'$;

avec

$$\mathcal{O} \simeq \mathbf{A}(\mathfrak{G})/_{\equiv}.$$

Présentations d'opérades

Soit $\mathcal{O}$ une opérade

Une présentation de $\mathcal{O}$ est un couple $(\mathfrak{G}, \equiv)$ tel que

- $\mathfrak{G}$ est un ensemble de lettres, appelé ensemble générateur ;
- $\equiv$ est une congruence d'opérades de $\mathbf{A}(\mathfrak{G})$, c.-à-d. une relation d'équivalence sur les arbres syntaxiques telle que si $\mathfrak{t} \equiv \mathfrak{t}'$ et $\mathfrak{s} \equiv \mathfrak{s}'$ alors $\mathfrak{t} \circ_i \mathfrak{s} \equiv \mathfrak{t}' \circ_i \mathfrak{s}'$;

avec

$$\mathcal{O} \simeq \mathbf{A}(\mathfrak{G})/_{\equiv}.$$

Une présentation $(\mathfrak{G}, \equiv)$ de $\mathcal{O}$ est

- binaire quand $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}(2)$;

Présentations d'opérades

Soit $\mathcal{O}$ une opérade

Une présentation de $\mathcal{O}$ est un couple $(\mathfrak{G}, \equiv)$ tel que

- $\mathfrak{G}$ est un ensemble de lettres, appelé ensemble générateur ;
- $\equiv$ est une congruence d'opérades de $\mathbf{A}(\mathfrak{G})$, c.-à-d. une relation d'équivalence sur les arbres syntaxiques telle que si $\mathfrak{t} \equiv \mathfrak{t}'$ et $\mathfrak{s} \equiv \mathfrak{s}'$ alors $\mathfrak{t} \circ_i \mathfrak{s} \equiv \mathfrak{t}' \circ_i \mathfrak{s}'$;

avec

$$\mathcal{O} \simeq \mathbf{A}(\mathfrak{G})/_{\equiv}.$$

Une présentation $(\mathfrak{G}, \equiv)$ de $\mathcal{O}$ est

- binaire quand $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}(2)$;
- quadratique quand $\equiv$ est engendrée en tant que congruence d'opérades par une relation d'équivalence n'utilisant que des arbres de degré 2.

Bases de Poincaré-Birkhoff-Witt

Soit $\mathcal{O}$ une opérade admettant la présentation $(\mathfrak{G}, \equiv)$.

Bases de Poincaré-Birkhoff-Witt

Soit $\mathcal{O}$ une opérade admettant la présentation $(\mathfrak{G}, \equiv)$.

Une base de Poincaré-Birkhoff-Witt (PBW) de $\mathcal{O}$ pour $(\mathfrak{G}, \equiv)$ est un sous-ensemble $\mathcal{B}$ de $\mathbf{A}(\mathfrak{G})$ tel que pour tout classe d'équivalence $[\mathfrak{t}]_{\equiv}$ de $\mathbf{A}(\mathfrak{G})/_{\equiv}$, il existe exactement un arbre $\mathfrak{s} \in \mathcal{B}$ tel que $\mathfrak{s} \in [\mathfrak{t}]_{\equiv}$.

Bases de Poincaré-Birkhoff-Witt

Soit $\mathcal{O}$ une opérade admettant la présentation $(\mathfrak{G}, \equiv)$.

Une base de Poincaré-Birkhoff-Witt (PBW) de $\mathcal{O}$ pour $(\mathfrak{G}, \equiv)$ est un sous-ensemble $\mathcal{B}$ de $\mathbf{A}(\mathfrak{G})$ tel que pour tout classe d'équivalence $[\mathfrak{t}]_{\equiv}$ de $\mathbf{A}(\mathfrak{G})/_{\equiv}$, il existe exactement un arbre $\mathfrak{s} \in \mathcal{B}$ tel que $\mathfrak{s} \in [\mathfrak{t}]_{\equiv}$.

En d'autres termes, une base de PBW de $\mathcal{O}$ offre un moyen de voir ses éléments comme des arbres syntaxiques soumis à certaines conditions.

Bases de Poincaré-Birkhoff-Witt

Soit $\mathcal{O}$ une opérade admettant la présentation $(\mathfrak{G}, \equiv)$.

Une base de Poincaré-Birkhoff-Witt (PBW) de $\mathcal{O}$ pour $(\mathfrak{G}, \equiv)$ est un sous-ensemble $\mathcal{B}$ de $\mathbf{A}(\mathfrak{G})$ tel que pour tout classe d'équivalence $[\mathfrak{t}]_\equiv$ de $\mathbf{A}(\mathfrak{G})/_\equiv$, il existe exactement un arbre $\mathfrak{s} \in \mathcal{B}$ tel que $\mathfrak{s} \in [\mathfrak{t}]_\equiv$.

En d'autres termes, une base de PBW de $\mathcal{O}$ offre un moyen de voir ses éléments comme des arbres syntaxiques soumis à certaines conditions.

Exemple

Soit As l'opérade associative, définie comme l'opérade de présentation $(\mathfrak{G}, \equiv)$ où $\mathfrak{G} := \mathfrak{G}(2) := \{\mathsf{a}\}$ et $\equiv$ est la plus petite congruence d'opérades vérifiant

$$\mathsf{a} \circ_1 \mathsf{a} \equiv \mathsf{a} \circ_2 \mathsf{a}.$$

Bases de Poincaré-Birkhoff-Witt

Soit $\mathcal{O}$ une opérade admettant la présentation $(\mathfrak{G}, \equiv)$.

Une base de Poincaré-Birkhoff-Witt (PBW) de $\mathcal{O}$ pour $(\mathfrak{G}, \equiv)$ est un sous-ensemble $\mathcal{B}$ de $\mathbf{A}(\mathfrak{G})$ tel que pour tout classe d'équivalence $[\mathfrak{t}]_{\equiv}$ de $\mathbf{A}(\mathfrak{G})/_{\equiv}$, il existe exactement un arbre $\mathfrak{s} \in \mathcal{B}$ tel que $\mathfrak{s} \in [\mathfrak{t}]_{\equiv}$.

En d'autres termes, une base de PBW de $\mathcal{O}$ offre un moyen de voir ses éléments comme des arbres syntaxiques soumis à certaines conditions.

Exemple

Soit As l'opérade associative, définie comme l'opérade de présentation $(\mathfrak{G}, \equiv)$ où $\mathfrak{G} := \mathfrak{G}(2) := \{\mathtt{a}\}$ et $\equiv$ est la plus petite congruence d'opérades vérifiant

$$\mathtt{a} \circ_1 \mathtt{a} \equiv \mathtt{a} \circ_2 \mathtt{a}.$$

Une base de PBW de As est l'ensemble des arbres de $\mathbf{A}(\mathfrak{G})$ évitant l'arbre

$$\mathtt{a} \circ_1 \mathtt{a}.$$

Application à la combinatoire

Supposons que l'on ait une famille $\mathcal{C}$ d'objets combinatoires à dénombrer (suivant une notion de taille donnée).

Application à la combinatoire

Supposons que l'on ait une famille $\mathcal{C}$ d'objets combinatoires à dénombrer (suivant une notion de taille donnée).

Un angle d'attaque consiste alors à

1. définir une (bonne) structure d'opérade $\mathcal{O}$ sur $\mathcal{C}$;

Application à la combinatoire

Supposons que l'on ait une famille $\mathcal{C}$ d'objets combinatoires à dénombrer (suivant une notion de taille donnée).

Un angle d'attaque consiste alors à

1. définir une (bonne) structure d'opérade $\mathcal{O}$ sur $\mathcal{C}$;
2. à déterminer une présentation $(\mathfrak{G}, \equiv)$ de $\mathcal{O}$ (en général en utilisant des techniques de réécritures sur les arbres de $\mathbf{A}(\mathfrak{G})$) ;

Application à la combinatoire

Supposons que l'on ait une famille $\mathcal{C}$ d'objets combinatoires à dénombrer (suivant une notion de taille donnée).

Un angle d'attaque consiste alors à

1. définir une (bonne) structure d'opérade $\mathcal{O}$ sur $\mathcal{C}$;
2. à déterminer une présentation $(\mathfrak{G}, \equiv)$ de $\mathcal{O}$ (en général en utilisant des techniques de réécritures sur les arbres de $\mathbf{A}(\mathfrak{G})$) ;
3. en déduire une base de PBW de $\mathcal{O}$ décrite comme les arbres de $\mathbf{A}(\mathfrak{G})$ évitant un ensemble de motifs $\mathcal{P}$ (en général, formés par les membres gauches des règles de réécriture convergentes) ;

Application à la combinatoire

Supposons que l'on ait une famille $\mathcal{C}$ d'objets combinatoires à dénombrer (suivant une notion de taille donnée).

Un angle d'attaque consiste alors à

1. définir une (bonne) structure d'opérade $\mathcal{O}$ sur $\mathcal{C}$;
2. à déterminer une présentation $(\mathfrak{G}, \equiv)$ de $\mathcal{O}$ (en général en utilisant des techniques de réécritures sur les arbres de $\mathbf{A}(\mathfrak{G})$) ;
3. en déduire une base de PBW de $\mathcal{O}$ décrite comme les arbres de $\mathbf{A}(\mathfrak{G})$ évitant un ensemble de motifs $\mathcal{P}$ (en général, formés par les membres gauches des règles de réécriture convergentes) ;
4. appliquer les résultats précédents pour obtenir une expression pour $\mathbf{f}(\mathcal{P})$.

Application à la combinatoire

Supposons que l'on ait une famille $\mathcal{C}$ d'objets combinatoires à dénombrer (suivant une notion de taille donnée).

Un angle d'attaque consiste alors à

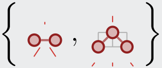
1. définir une (bonne) structure d'opérade $\mathcal{O}$ sur $\mathcal{C}$;
2. à déterminer une présentation $(\mathfrak{G}, \equiv)$ de $\mathcal{O}$ (en général en utilisant des techniques de réécritures sur les arbres de $\mathbf{A}(\mathfrak{G})$) ;
3. en déduire une base de PBW de $\mathcal{O}$ décrite comme les arbres de $\mathbf{A}(\mathfrak{G})$ évitant un ensemble de motifs $\mathcal{P}$ (en général, formés par les membres gauches des règles de réécriture convergentes) ;
4. appliquer les résultats précédents pour obtenir une expression pour $\mathbf{f}(\mathcal{P})$.

Finalement, $\mathrm{ev}(\mathbf{f}(\mathcal{P}))$ est la série de Hilbert de $\mathcal{O}$ et est la série génératrice de $\mathcal{C}$.

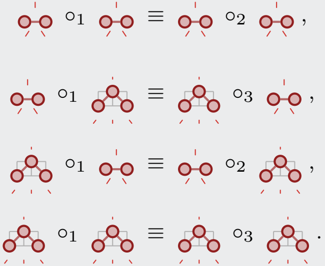
Exemple — l’opérade Motz

Proposition [G., 2015]

L’opérade Motz admet la présentation $(\mathfrak{G}, \equiv)$ où

$\mathfrak{G} :=$ 

et $\equiv$ est la plus petite congruence d’opérades vérifiant



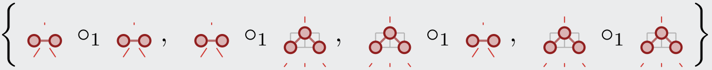
Cette présentation est quadratique et non binaire.

Exemple — l’opérade Motz

Proposition

L’ensemble $\mathcal{B}$ des arbres de $\mathbf{A}(\mathfrak{G})$ évitant

$\mathcal{P} :=$

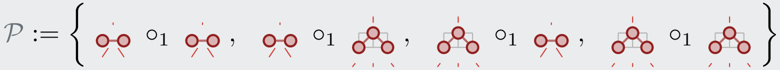


est une base de PBW de Motz.

Exemple — l'opérade Motz

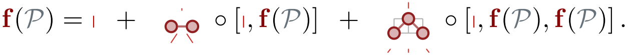
Proposition

L'ensemble $\mathcal{B}$ des arbres de $\mathbf{A}(\mathfrak{G})$ évitant



est une base de PBW de Motz.

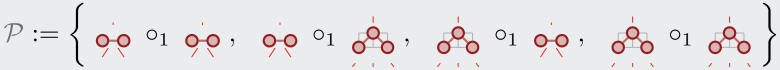
Ceci entraîne que la série caractéristique de $\mathcal{B}$ est la série $\mathbf{f}(\mathcal{P})$ vérifiant



Exemple — l’opérade Motz

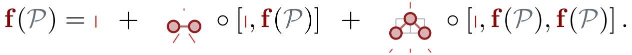
Proposition

L’ensemble $\mathcal{B}$ des arbres de $\mathbf{A}(\mathfrak{G})$ évitant



est une base de PBW de Motz.

Ceci entraîne que la série caractéristique de $\mathcal{B}$ est la série $\mathbf{f}(\mathcal{P})$ vérifiant



Ainsi, en posant $\mathrm{g}(t) := \mathrm{ev}(\mathbf{f}(\mathcal{P}))$, on obtient l’expression

$$\mathrm{g}(t) = t + t\mathrm{g}(t) + t\mathrm{g}(t)^2$$

pour la série génératrice des chemins de Motzkin.