Opérades, séries formelles et arbres à motifs exclus

Samuele Giraudo

LIGM, Université Paris-Est Marne-la-Vallée

Séminaire du LAGA

29 mars 2018

Plan

Combinatoire et séries formelles

Opérades et opérades libres

Motifs, séries d'arbres et opérades

Plan

Combinatoire et séries formelles

Ensembles combinatoires

Un ensemble combinatoire est un ensemble C muni d'une application

$$| - | : C \to \mathbb{N}$$

telle que toutes les fibres $|n|^{-1}$ sont finies.

Ensembles combinatoires

Un ensemble combinatoire est un ensemble C muni d'une application

$$|-|: C \to \mathbb{N}$$

telle que toutes les fibres $|n|^{-1}$ sont finies.

On appelle $|x|$ la taille de x pour tout $x \in C$.

Ensembles combinatoires

Un ensemble combinatoire est un ensemble C muni d'une application

$$|-|: C \to \mathbb{N}$$

telle que toutes les fibres $|n|^{-1}$ sont finies.

On appelle $|x|$ la taille de x pour tout $x \in C$.

L'ensemble (fini) des éléments de C de taille n est noté $C(n)$.

Ensembles combinatoires

Un ensemble combinatoire est un ensemble C muni d'une application

$$|-|: C \to \mathbb{N}$$

telle que toutes les fibres $|n|^{-1}$ sont finies.

On appelle $|x|$ la taille de x pour tout $x \in C$.

L'ensemble (fini) des éléments de C de taille n est noté $C(n)$.

Exemple

Soit $\mathfrak{S}$ l'ensemble combinatoire des permutations où la taille d'une permutation est sa longueur en tant que mot.

Ensembles combinatoires

Un ensemble combinatoire est un ensemble C muni d'une application

$$|-|: C \to \mathbb{N}$$

telle que toutes les fibres $|n|^{-1}$ sont finies.

On appelle $|x|$ la taille de x pour tout $x \in C$.

L'ensemble (fini) des éléments de C de taille n est noté $C(n)$.

Exemple

Soit $\mathfrak{S}$ l'ensemble combinatoire des permutations où la taille d'une permutation est sa longueur en tant que mot.

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}(0) &= \{\epsilon\}, \\
\mathfrak{S}(1) &= \{1\}, \\
\mathfrak{S}(2) &= \{12, 21\}, \\
\mathfrak{S}(3) &= \{123, 132, 213, 231, 312, 321\}, \\
&\dots \\
\mathfrak{S}(n) &= \{12\dots n, \dots, n\dots 21\}.
\end{aligned}$$

Combinatoire et questions

Soit C un ensemble combinatoire.

Questions classiques :

- compter les objets de C de taille n ;

Exemple

Le nombre d'objets de $\mathfrak{S}$ de taille n est $n!$.

Combinatoire et questions

Soit C un ensemble combinatoire.

Questions classiques :

- compter les objets de C de taille n ;
- engendrer tous les objets de C de taille n ;

Exemple

Le nombre d'objets de $\mathfrak{S}$ de taille n est $n!$.

Combinatoire et questions

Soit C un ensemble combinatoire.

Questions classiques :

- compter les objets de C de taille n ;
- engendrer tous les objets de C de taille n ;
- engendrer aléatoirement un objet de C de taille n (suivant une distribution donnée) ;

Exemple

Le nombre d'objets de $\mathfrak{S}$ de taille n est $n!$.

Combinatoire et questions

Soit C un ensemble combinatoire.

Questions classiques :

- compter les objets de C de taille n ;
- engendrer tous les objets de C de taille n ;
- engendrer aléatoirement un objet de C de taille n (suivant une distribution donnée) ;
- mettre en relation C avec d'autres ensembles combinatoires D ;

Exemple

Le nombre d'objets de $\mathfrak{S}$ de taille n est $n!$.

Combinatoire et questions

Soit C un ensemble combinatoire.

Questions classiques :

- compter les objets de C de taille n ;
- engendrer tous les objets de C de taille n ;
- engendrer aléatoirement un objet de C de taille n (suivant une distribution donnée) ;
- mettre en relation C avec d'autres ensembles combinatoires D ;
- définir des statistiques sur C, c.-à-d. des fonctions $\mathrm{s} : C \to \mathbb{N}$.

Exemple

Le nombre d'objets de $\mathfrak{S}$ de taille n est $n!$.

Une descente dans une permutation σ est une position i telle que $\sigma(i) > \sigma(i+1)$.

La fonction s qui envoie une permutation sur son nombre de descentes est une statistique de $\mathfrak{S}$. Par exemple, $\mathrm{s}(35142) = 2$.

Point de vue algébrique

Idée principale

Pour comprendre un ensemble combinatoire C, le munir d'opérations.

Point de vue algébrique

Idée principale

Pour comprendre un ensemble combinatoire C, le munir d'opérations.

L'étude de C en tant que structure algébrique $\mathcal{C}$ où $\mathcal{C}$ peut être

- l'ensemble C lui-même ;
- l'espace vectoriel $\mathbb{K}\langle C\rangle$ engendré par C ;
- l'espace des séries $\mathbb{K}\langle\langle C\rangle\rangle$ sur C ;

mène à la découverte de propriétés sur ses objets.

Point de vue algébrique

Idée principale

Pour comprendre un ensemble combinatoire C, le munir d'opérations.

L'étude de C en tant que structure algébrique $\mathcal{C}$ où $\mathcal{C}$ peut être

- l'ensemble C lui-même ;
- l'espace vectoriel $\mathbb{K}\langle C\rangle$ engendré par C ;
- l'espace des séries $\mathbb{K}\langle\langle C\rangle\rangle$ sur C ;

mène à la découverte de propriétés sur ses objets.

En particulier,

1. changements de base dans $\mathcal{C}$

   $\rightsquigarrow$ reformulations alternatives d'opérations ;

Point de vue algébrique

Idée principale

Pour comprendre un ensemble combinatoire C, le munir d'opérations.

L'étude de C en tant que structure algébrique $\mathcal{C}$ où $\mathcal{C}$ peut être

- l'ensemble C lui-même ;
- l'espace vectoriel $\mathbb{K}\langle C\rangle$ engendré par C ;
- l'espace des séries $\mathbb{K}\langle\langle C\rangle\rangle$ sur C ;

mène à la découverte de propriétés sur ses objets.

En particulier,

1. changements de base dans $\mathcal{C}$

   $\rightsquigarrow$ reformulations alternatives d'opérations ;

2. ensembles de générateurs minimaux de $\mathcal{C}$

   $\rightsquigarrow$ mise en évidence de pièces élémentaires de construction ;

Point de vue algébrique

Idée principale

Pour comprendre un ensemble combinatoire C, le munir d'opérations.

L'étude de C en tant que structure algébrique $\mathcal{C}$ où $\mathcal{C}$ peut être

- l'ensemble C lui-même ;
- l'espace vectoriel $\mathbb{K}\langle C \rangle$ engendré par C ;
- l'espace des séries $\mathbb{K}\langle\langle C \rangle\rangle$ sur C ;

mène à la découverte de propriétés sur ses objets.

En particulier,

1. changements de base dans $\mathcal{C}$

   $\rightsquigarrow$ reformulations alternatives d'opérations ;

2. ensembles de générateurs minimaux de $\mathcal{C}$

   $\rightsquigarrow$ mise en évidence de pièces élémentaires de construction ;

3. morphismes impliquant $\mathcal{C}$

   $\rightsquigarrow$ algorithmes de transformation et révélation de symétries.

Séries formelles

Soient $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{Q}(q_0, q_1, q_2, \dots)$ et X un ensemble (combinatoire).

Séries formelles

Soient $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{Q}(q_0, q_1, q_2, \ldots)$ et X un ensemble (combinatoire).

Une X-série est une application

$$\mathbf{f} : X \to \mathbb{K}.$$

Séries formelles

Soient $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{Q}(q_0, q_1, q_2, \dots)$ et X un ensemble (combinatoire).

Une X-série est une application

$$\mathbf{f} : X \to \mathbb{K}.$$

Le coefficient $\mathbf{f}(x)$ de $x \in X$ dans $\mathbf{f}$ est noté par $\langle x, \mathbf{f} \rangle$.

Séries formelles

Soient $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{Q}(q_0, q_1, q_2, \dots)$ et X un ensemble (combinatoire).

Une X-série est une application

$$\mathbf{f} : X \to \mathbb{K}.$$

Le coefficient $\mathbf{f}(x)$ de $x \in X$ dans $\mathbf{f}$ est noté par $\langle x, \mathbf{f} \rangle$.

L'ensemble de toutes les X-séries est $\mathbb{K} \langle\langle X \rangle\rangle$.

Séries formelles

Soient $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{Q}(q_0, q_1, q_2, \dots)$ et X un ensemble (combinatoire).

Une X-série est une application

$$\mathbf{f} : X \to \mathbb{K}.$$

Le coefficient $\mathbf{f}(x)$ de $x \in X$ dans $\mathbf{f}$ est noté par $\langle x, \mathbf{f} \rangle$.

L'ensemble de toutes les X-séries est $\mathbb{K} \langle\langle X \rangle\rangle$.

Muni de l'addition point par point

$$\langle x, \mathbf{f} + \mathbf{g} \rangle := \langle x, \mathbf{f} \rangle + \langle x, \mathbf{g} \rangle$$

et de la multiplication par un scalaire

$$\langle x, \lambda \mathbf{f} \rangle := \lambda \langle x, \mathbf{f} \rangle ,$$

l'ensemble $\mathbb{K} \langle\langle X \rangle\rangle$ est un espace vectoriel.

Séries formelles

Soient $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{Q}(q_0, q_1, q_2, \dots)$ et X un ensemble (combinatoire).

Une X-série est une application

$$\mathbf{f} : X \to \mathbb{K}.$$

Le coefficient $\mathbf{f}(x)$ de $x \in X$ dans $\mathbf{f}$ est noté par $\langle x, \mathbf{f} \rangle$.

L'ensemble de toutes les X-séries est $\mathbb{K}\langle\langle X \rangle\rangle$.

Muni de l'addition point par point

$$\langle x, \mathbf{f} + \mathbf{g} \rangle := \langle x, \mathbf{f} \rangle + \langle x, \mathbf{g} \rangle$$

et de la multiplication par un scalaire

$$\langle x, \lambda \mathbf{f} \rangle := \lambda \langle x, \mathbf{f} \rangle,$$

l'ensemble $\mathbb{K}\langle\langle X \rangle\rangle$ est un espace vectoriel.

La notation somme de $\mathbf{f}$ est

$$\mathbf{f} = \sum_{x \in X} \langle x, \mathbf{f} \rangle\, x.$$

Séries formelles et structures algébriques

Quand X est une structure algébrique, ses opérations s'étendent aux X-séries. Si

$$\star : X^k \to X$$

est un produit d'arité k sur X, on obtient le produit $\bar{\star}$ sur $\mathbb{K}\langle\langle X\rangle\rangle$ défini par

$$\langle x, \bar{\star}(\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_k)\rangle := \sum_{\substack{y_1, \ldots, y_k \in X \\ x = \star(y_1, \ldots, y_k)}} \prod_{1 \leqslant i \leqslant k} \langle y_i, \mathbf{f}_i\rangle .$$

Séries formelles et structures algébriques

Quand X est une structure algébrique, ses opérations s'étendent aux X-séries. Si

$$\star : X^k \to X$$

est un produit d'arité k sur X, on obtient le produit $\bar{\star}$ sur $\mathbb{K}\langle\langle X\rangle\rangle$ défini par

$$\langle x, \bar{\star}(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_k)\rangle := \sum_{\substack{y_1, \dots, y_k \in X \\ x = \star(y_1, \dots, y_k)}} \prod_{1 \leqslant i \leqslant k} \langle y_i, \mathbf{f}_i\rangle .$$

Exemple

Un produit binaire $\star : X \times X \to X$ donne lieu au produit (partiellement défini)

$$\mathbf{f} \,\bar{\star}\, \mathbf{g} := \sum_{x, y \in X} \langle x, \mathbf{f}\rangle \langle y, \mathbf{g}\rangle\, x \star y$$

sur $\mathbb{K}\langle\langle X\rangle\rangle$.

Séries formelles et structures algébriques

Voici quelques exemples de séries sur des structures algébriques classiques.

Structure sur X	**Séries**
$(\mathbb{N}, +, 0)$	Séries habituelles ($\mathbb{K}[[t]]$)
Monoïde libre comm.	Séries multivariées ($\mathbb{K}[[t_1, t_2, \dots]]$)
Monoïde libre	Séries non comm. ($\mathbb{K}\langle\langle t_1, t_2, \dots\rangle\rangle$) [**Eilenberg**, 1974]
Monoïde	Séries sur monoïdes [**Salomaa, Soittola**, 1978]
Opérade	Séries sur opérades [**Chapoton**, 2002, 2008]

Séries génératrices

Soit C un ensemble combinatoire.

La série caractéristique de C est la C-série

$$\mathbf{f}_C := \sum_{x \in C} x.$$

Séries génératrices

Soit C un ensemble combinatoire.

La série caractéristique de C est la C-série

$$\mathbf{f}_C := \sum_{x \in C} x.$$

Soit

$$\mathrm{ev} : \mathbb{K}\langle\langle C \rangle\rangle \to \mathbb{K}\langle\langle t \rangle\rangle$$

l'application linéaire définie par

$$\mathrm{ev}(x) := t^{|x|}.$$

Séries génératrices

Soit C un ensemble combinatoire.

La série caractéristique de C est la C-série

$$\mathbf{f}_C := \sum_{x \in C} x.$$

Soit

$$\mathrm{ev} : \mathbb{K}\langle\langle C \rangle\rangle \to \mathbb{K}\langle\langle t \rangle\rangle$$

l'application linéaire définie par

$$\mathrm{ev}(x) := t^{|x|}.$$

On a

$$\mathrm{ev}(\mathbf{f}_C) = \sum_{x \in C} t^{|x|} = \mathcal{G}_C(t)$$

où $\mathcal{G}_C(t)$ est la série génératrice de C.

Séries génératrices

Soit C un ensemble combinatoire.

La série caractéristique de C est la C-série

$$\mathbf{f}_C := \sum_{x \in C} x.$$

Soit

$$\mathrm{ev} : \mathbb{K}\langle\langle C \rangle\rangle \to \mathbb{K}\langle\langle t \rangle\rangle$$

l'application linéaire définie par

$$\mathrm{ev}(x) := t^{|x|}.$$

On a

$$\mathrm{ev}(\mathbf{f}_C) = \sum_{x \in C} t^{|x|} = \mathcal{G}_C(t)$$

où $\mathcal{G}_C(t)$ est la série génératrice de C.

Idée

Munir C d'opérations en vue d'exprimer $\mathbf{f}_C$ et de dénombrer ses éléments.

Exemple : séries sur les chemins

Un chemin est un élément de $\bigsqcup_{n \geqslant 1} \mathbb{N}^n$.

Exemple : séries sur les chemins

Un chemin est un élément de $\bigsqcup_{n \geqslant 1} \mathbb{N}^n$.

Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble (non combinatoire) de tous les chemins où la taille d'un chemin $u_1 \dots u_n$ est $n-1$.

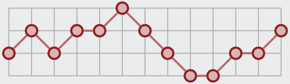
Exemple : séries sur les chemins

Un chemin est un élément de $\bigsqcup_{n \geqslant 1} \mathbb{N}^n$.

Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble (non combinatoire) de tous les chemins où la taille d'un chemin $u_1 \dots u_n$ est $n - 1$.

Exemple

Le chemin 1212232100112 est représenté par



et est de taille 12.

Exemple : séries sur les chemins

Soit $\star$ le produit binaire sur $\mathcal{P}$ défini par

$$u_1 \dots u_n \star v_1 \dots v_m := \uparrow_{\max(0, v_1 - u_n)} (u_1 \dots u_{n-1}) \max(u_n, v_1) \uparrow_{\max(0, u_n - v_1)} (v_2 \dots v_m)$$

où $\uparrow_i (w)$ désigne le mot obtenu en incrémentant de i chaque lettre de w.

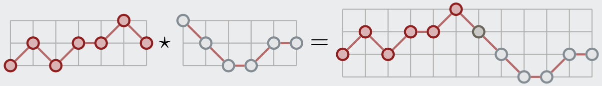
Exemple : séries sur les chemins

Soit $\star$ le produit binaire sur $\mathcal{P}$ défini par

$$u_1 \dots u_n \star v_1 \dots v_m := \\ \uparrow_{\max(0, v_1 - u_n)} (u_1 \dots u_{n-1}) \max(u_n, v_1) \uparrow_{\max(0, u_n - v_1)} (v_2 \dots v_m)$$

où $\uparrow_i (w)$ désigne le mot obtenu en incrémentant de i chaque lettre de w.

Exemple



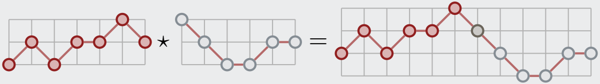
Exemple : séries sur les chemins

Soit $\star$ le produit binaire sur $\mathcal{P}$ défini par

$$u_1 \dots u_n \star v_1 \dots v_m :=$$
$$\uparrow_{\max(0, v_1 - u_n)} (u_1 \dots u_{n-1}) \max(u_n, v_1) \uparrow_{\max(0, u_n - v_1)} (v_2 \dots v_m)$$

où $\uparrow_i (w)$ désigne le mot obtenu en incrémentant de i chaque lettre de w.

Exemple



Ce produit est associatif et admet  (le chemin 0) comme unité.

Ainsi, $(\mathcal{P}, \star,$ $)$ est un monoïde.

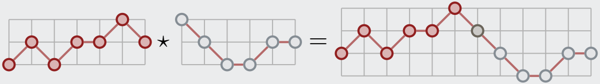
Exemple : séries sur les chemins

Soit $\star$ le produit binaire sur $\mathcal{P}$ défini par

$$u_1 \dots u_n \star v_1 \dots v_m := \\ \uparrow_{\max(0, v_1 - u_n)} (u_1 \dots u_{n-1}) \max(u_n, v_1) \uparrow_{\max(0, u_n - v_1)} (v_2 \dots v_m)$$

où $\uparrow_i (w)$ désigne le mot obtenu en incrémentant de i chaque lettre de w.

Exemple



Ce produit est associatif et admet ○ (le chemin 0) comme unité.

Ainsi, $(\mathcal{P}, \star, ○)$ est un monoïde.

La $\star$-étoile de Kleene d'un sous-ensemble X de $\mathcal{P}$ est

$$X^{\star_*} := \bigsqcup_{\ell \geqslant 0} \underbrace{X \star \dots \star X}_{\times \ell}.$$

Exemple : séries sur les chemins

Soit Motz le sous-ensemble de $\left\{\nearrow, \rightarrow, \searrow\right\}^{\star *}$ des chemins débutant et finissant par 0. On les appelle chemins de Motzkin.

Exemple : séries sur les chemins

Soit Motz le sous-ensemble de $\{$, , $\}^{\star *}$ des chemins débutant et finissant par 0. On les appelle chemins de Motzkin.

L'ensemble Motz forme un sous-monoïde de $\mathcal{P}$.

Exemple : séries sur les chemins

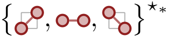
Soit Motz le sous-ensemble de $\{$$\}^{\star_*}$ des chemins débutant et finissant par 0. On les appelle chemins de Motzkin.

L'ensemble Motz forme un sous-monoïde de $\mathcal{P}$.

La série caractéristique de Motz est

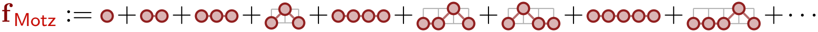
$\mathbf{f}_{\mathsf{Motz}} :=$  $+ \cdots$

Exemple : séries sur les chemins

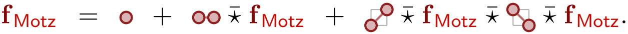
Soit Motz le sous-ensemble de  des chemins débutant et finissant par 0. On les appelle chemins de Motzkin.

L'ensemble Motz forme un sous-monoïde de $\mathcal{P}$.

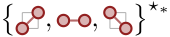
La série caractéristique de Motz est



et, en utilisant le produit $\bar{\star}$ sur les $\mathcal{P}$-séries, on obtient l'équation

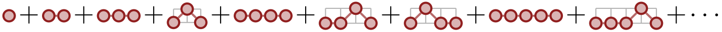


Exemple : séries sur les chemins

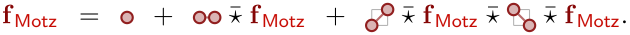
Soit Motz le sous-ensemble de  des chemins débutant et finissant par 0. On les appelle chemins de Motzkin.

L'ensemble Motz forme un sous-monoïde de $\mathcal{P}$.

La série caractéristique de Motz est

$\mathbf{f}_{\mathsf{Motz}} :=$ 

et, en utilisant le produit $\bar{\star}$ sur les $\mathcal{P}$-séries, on obtient l'équation



Par évaluation, on obtient que la série génératrice des chemins de Motzkin vérifie

$$\mathcal{G}_{\mathsf{Motz}}(t) = 1 + t\mathcal{G}_{\mathsf{Motz}}(t) + t^2\mathcal{G}_{\mathsf{Motz}}(t)^2.$$

Exemple : séries sur les chemins

Il est possible d'ajouter des paramètres pour raffiner le dénombrement selon des statistiques. Ainsi,

$$\mathbf{g}_{\mathsf{Motz}} = \; + \; q_0 \; \bar{\star}\, \mathbf{g}_{\mathsf{Motz}} \; + \; q_1 \; \bar{\star}\, \mathbf{g}_{\mathsf{Motz}} \;\bar{\star}\; \;\bar{\star}\, \mathbf{g}_{\mathsf{Motz}}.$$

est la série formelle des chemins de Motzkin où le coefficient d'un chemin u est $q_0^{\alpha_0} q_1^{\alpha_1}$ où α_0 (resp. α_1) est le nombre de (resp.) qu'il contient.

Exemple : séries sur les chemins

Il est possible d'ajouter des paramètres pour raffiner le dénombrement selon des statistiques. Ainsi,

$$\mathbf{g}_{\mathsf{Motz}} = \quad + \quad q_0 \; \bar{\star}\, \mathbf{g}_{\mathsf{Motz}} \quad + \quad q_1 \; \bar{\star}\, \mathbf{g}_{\mathsf{Motz}} \;\bar{\star}\; \;\bar{\star}\; \mathbf{g}_{\mathsf{Motz}}.$$

est la série formelle des chemins de Motzkin où le coefficient d'un chemin u est $q_0^{\alpha_0} q_1^{\alpha_1}$ où α_0 (resp. α_1) est le nombre de (resp.) qu'il contient.

Son évaluation est

$$\begin{aligned}\mathrm{ev}\left(\mathbf{g}_{\mathsf{Motz}}\right) = 1 + q_0 t + \left(q_0^2 + q_1\right) t^2 \\ + \left(q_0^3 + 3 q_0 q_1\right) t^3 \\ + \left(q_0^4 + 6 q_0^2 q_1 + 2 q_1^2\right) t^4 \\ + \left(q_0^5 + 10 q_0^3 q_1 + 10 q_0 q_1^2\right) t^5 + \cdots\end{aligned}$$

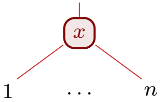
et est telle que la spécialisation $\mathrm{ev}\left(\mathbf{g}_{\mathsf{Motz}}\right)_{|q_1 := 1}$ est le triangle **A055151**.

Plan

Opérades et opérades libres

Opérateurs

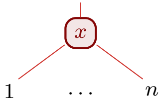
Un opérateur est une entité ayant $n \geqslant 1$ entrées et une sortie.



Son arité est son nombre n d'entrées.

Opérateurs

Un opérateur est une entité ayant $n \geqslant 1$ entrées et une sortie.



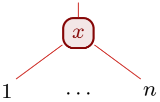
Son arité est son nombre n d'entrées.

Composer deux opérateurs x et y consiste à

1. choisir une entrée de x identifiée par sa position i ;
2. greffer la sortie de y sur cette entrée.

Opérateurs

Un opérateur est une entité ayant $n \geqslant 1$ entrées et une sortie.

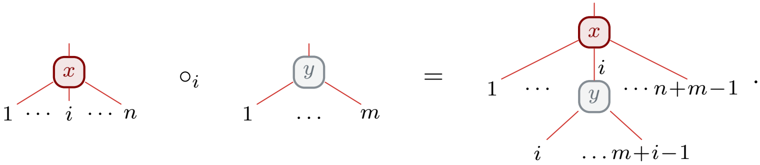


Son arité est son nombre n d'entrées.

Composer deux opérateurs x et y consiste à

1. choisir une entrée de x identifiée par sa position i ;
2. greffer la sortie de y sur cette entrée.

Ceci produit un nouvel opérateur $x \circ_i y$ d'arité $n + m - 1$:



Opérades

Les opérades sont des structures algébriques formalisant la notion d'opérateur (munis de leur composition).

Opérades

Les opérades sont des structures algébriques formalisant la notion d'opérateur (munis de leur composition).

Une opérade (ensembliste non symétrique) est un triplet $(\mathcal{O}, \circ_i, \mathbb{1})$ où

1. $\mathcal{O}$ est un ensemble gradué

$$\mathcal{O} := \bigsqcup_{n \geqslant 1} \mathcal{O}(n) \; ;$$

Opérades

Les opérades sont des structures algébriques formalisant la notion d'opérateur (munis de leur composition).

Une opérade (ensembliste non symétrique) est un triplet $(\mathcal{O}, \circ_i, \mathbb{1})$ où

1. $\mathcal{O}$ est un ensemble gradué

$$\mathcal{O} := \bigsqcup_{n \geqslant 1} \mathcal{O}(n)\ ;$$

2. $\circ_i$ est une application de composition partielle,

$$\circ_i : \mathcal{O}(n) \times \mathcal{O}(m) \to \mathcal{O}(n+m-1), \qquad 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant m\ ;$$

Opérades

Les opérades sont des structures algébriques formalisant la notion d'opérateur (munis de leur composition).

Une opérade (ensembliste non symétrique) est un triplet $(\mathcal{O}, \circ_i, \mathbb{1})$ où

1. $\mathcal{O}$ est un ensemble gradué

$$\mathcal{O} := \bigsqcup_{n \geqslant 1} \mathcal{O}(n) \; ;$$

2. $\circ_i$ est une application de composition partielle,

$$\circ_i : \mathcal{O}(n) \times \mathcal{O}(m) \to \mathcal{O}(n+m-1), \qquad 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant m \; ;$$

3. $\mathbb{1}$ est un élément de $\mathcal{O}(1)$, appelé unité.

Opérades

Les opérades sont des structures algébriques formalisant la notion d'opérateur (munis de leur composition).

Une opérade (ensembliste non symétrique) est un triplet $(\mathcal{O}, \circ_i, \mathbb{1})$ où

1. $\mathcal{O}$ est un ensemble gradué

$$\mathcal{O} := \bigsqcup_{n \geqslant 1} \mathcal{O}(n) \; ;$$

2. $\circ_i$ est une application de composition partielle,

$$\circ_i : \mathcal{O}(n) \times \mathcal{O}(m) \to \mathcal{O}(n+m-1), \qquad 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant m \; ;$$

3. $\mathbb{1}$ est un élément de $\mathcal{O}(1)$, appelé unité.

Ces objets doivent vérifier des axiomes.

Axiomes des opérades

Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$

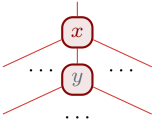
$$1 \leqslant i \leqslant |x|, 1 \leqslant j \leqslant |y|$$

Axiomes des opérades

Associativité :

$(x \circ_i y)$

$1 \leqslant i \leqslant |x|, 1 \leqslant j \leqslant |y|$

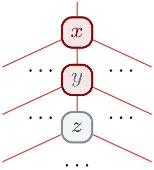


Axiomes des opérades

Associativité :

$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z$

$1 \leqslant i \leqslant |x|, 1 \leqslant j \leqslant |y|$

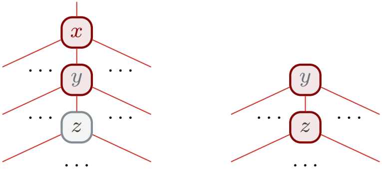


Axiomes des opérades

Associativité :

$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z \qquad (y \circ_j z)$

$1 \leqslant i \leqslant |x|, 1 \leqslant j \leqslant |y|$

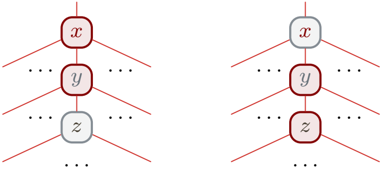


Axiomes des opérades

Associativité :

$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z \qquad x \circ_i (y \circ_j z)$

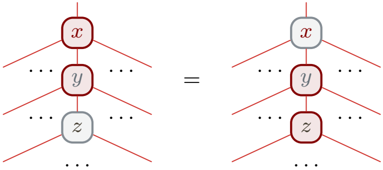
$1 \leqslant i \leqslant |x|, 1 \leqslant j \leqslant |y|$



Axiomes des opérades

Associativité :

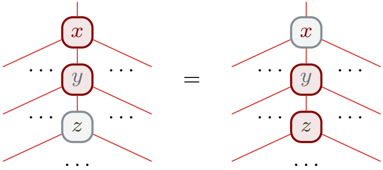
$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$
$$1 \leqslant i \leqslant |x|, 1 \leqslant j \leqslant |y|$$



Axiomes des opérades

Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$
$$1 \leqslant i \leqslant |x|, 1 \leqslant j \leqslant |y|$$



Commutativité :

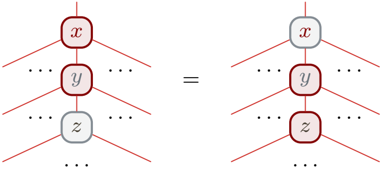
$$(x \circ_i y) \circ_{j+|y|-1} z = (x \circ_j z) \circ_i y$$
$$1 \leqslant i < j \leqslant |x|$$

Axiomes des opérades

Associativité :

$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$

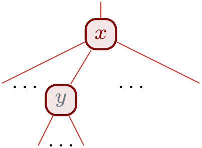
$1 \leqslant i \leqslant |x|, 1 \leqslant j \leqslant |y|$



Commutativité :

$(x \circ_i y)$

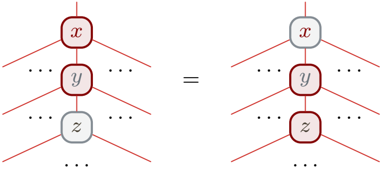
$1 \leqslant i < j \leqslant |x|$



Axiomes des opérades

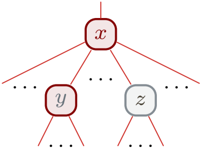
Associativité :

$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$
$1 \leqslant i \leqslant |x|, 1 \leqslant j \leqslant |y|$



Commutativité :

$(x \circ_i y) \circ_{j+|y|-1} z$
$1 \leqslant i < j \leqslant |x|$

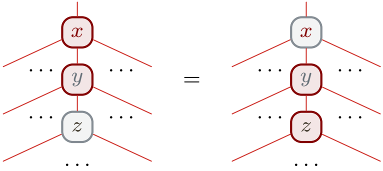


Axiomes des opérades

Associativité :

$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$

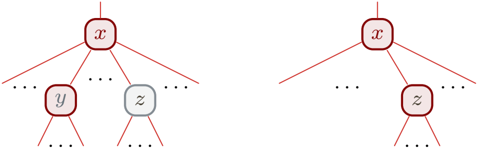
$1 \leqslant i \leqslant |x|, 1 \leqslant j \leqslant |y|$



Commutativité :

$(x \circ_i y) \circ_{j+|y|-1} z \qquad (x \circ_j z)$

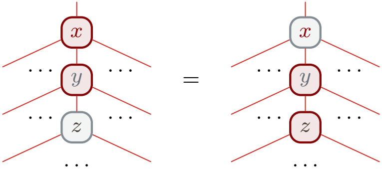
$1 \leqslant i < j \leqslant |x|$



Axiomes des opérades

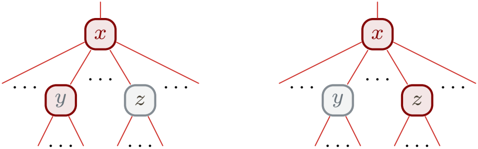
Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$
$$1 \leqslant i \leqslant |x|, 1 \leqslant j \leqslant |y|$$



Commutativité :

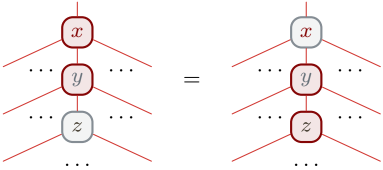
$$(x \circ_i y) \circ_{j+|y|-1} z \qquad (x \circ_j z) \circ_i y$$
$$1 \leqslant i < j \leqslant |x|$$



Axiomes des opérades

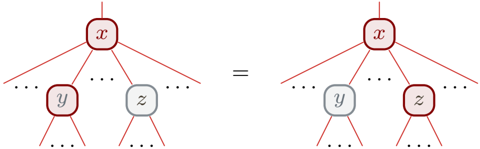
Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$
$$1 \leqslant i \leqslant |x|, 1 \leqslant j \leqslant |y|$$



Commutativité :

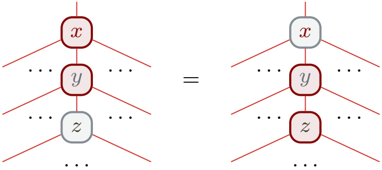
$$(x \circ_i y) \circ_{j+|y|-1} z = (x \circ_j z) \circ_i y$$
$$1 \leqslant i < j \leqslant |x|$$



Axiomes des opérades

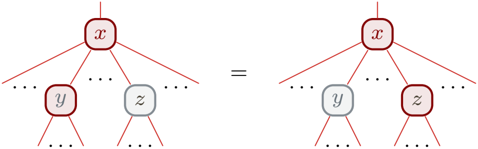
Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$
$$1 \leqslant i \leqslant |x|, 1 \leqslant j \leqslant |y|$$



Commutativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{j+|y|-1} z = (x \circ_j z) \circ_i y$$
$$1 \leqslant i < j \leqslant |x|$$



Unitalité :

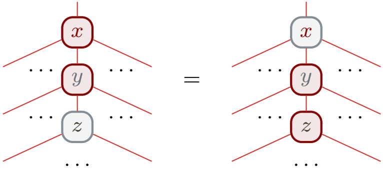
$$\mathbb{1} \circ_1 x = x = x \circ_i \mathbb{1}$$
$$1 \leqslant i \leqslant |x|$$

Axiomes des opérades

Associativité :

$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$

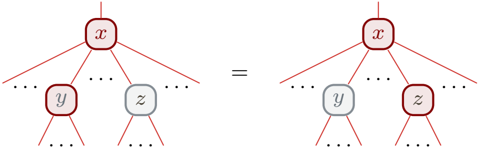
$1 \leqslant i \leqslant |x|, 1 \leqslant j \leqslant |y|$



Commutativité :

$(x \circ_i y) \circ_{j+|y|-1} z = (x \circ_j z) \circ_i y$

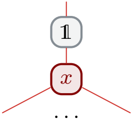
$1 \leqslant i < j \leqslant |x|$



Unitalité :

$\mathbb{1} \circ_1 x$

$1 \leqslant i \leqslant |x|$

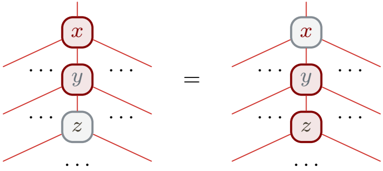


Axiomes des opérades

Associativité :

$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$

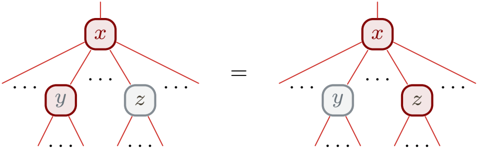
$1 \leqslant i \leqslant |x|, 1 \leqslant j \leqslant |y|$



Commutativité :

$(x \circ_i y) \circ_{j+|y|-1} z = (x \circ_j z) \circ_i y$

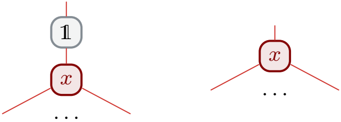
$1 \leqslant i < j \leqslant |x|$



Unitalité :

$\mathbb{1} \circ_1 x \quad x$

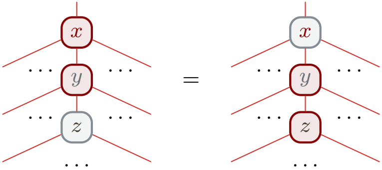
$1 \leqslant i \leqslant |x|$



Axiomes des opérades

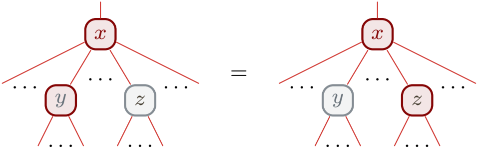
Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$
$$1 \leqslant i \leqslant |x|, 1 \leqslant j \leqslant |y|$$



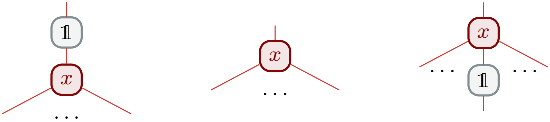
Commutativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{j+|y|-1} z = (x \circ_j z) \circ_i y$$
$$1 \leqslant i < j \leqslant |x|$$



Unitalité :

$$\mathbb{1} \circ_1 x \qquad x \qquad x \circ_i \mathbb{1}$$
$$1 \leqslant i \leqslant |x|$$

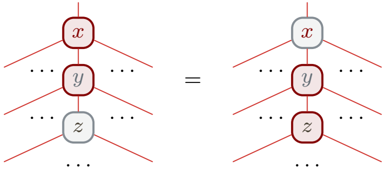


Axiomes des opérades

Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$

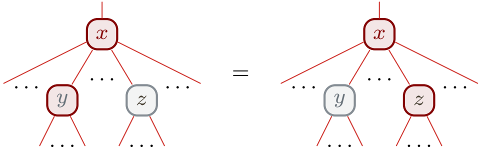
$$1 \leqslant i \leqslant |x|, 1 \leqslant j \leqslant |y|$$



Commutativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{j+|y|-1} z = (x \circ_j z) \circ_i y$$

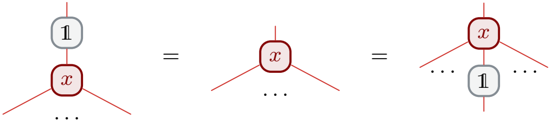
$$1 \leqslant i < j \leqslant |x|$$



Unitalité :

$$\mathbb{1} \circ_1 x = x = x \circ_i \mathbb{1}$$

$$1 \leqslant i \leqslant |x|$$

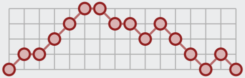


Une opérade de chemins de Motzkin

Soit Motz l'opérade dans laquelle :

- Motz(n) est l'ensemble des chemins de Motzkin à n points.

Exemple



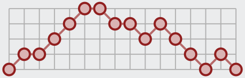
chemin de Motzkin d'arité 16.

Une opérade de chemins de Motzkin

Soit Motz l'opérade dans laquelle :

- Motz(n) est l'ensemble des chemins de Motzkin à n points.

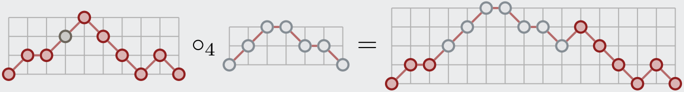
Exemple



chemin de Motzkin d'arité 16.

- La composition partielle $x \circ_i y$ se calcule en remplaçant le i^{e} point de x par une copie de y.

Exemple

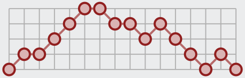


Une opérade de chemins de Motzkin

Soit Motz l'opérade dans laquelle :

- Motz(n) est l'ensemble des chemins de Motzkin à n points.

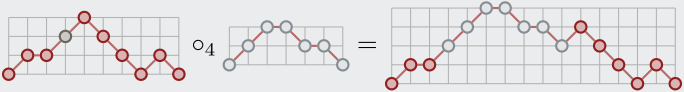
Exemple



chemin de Motzkin d'arité 16.

- La composition partielle $x \circ_i y$ se calcule en remplaçant le i^{e} point de x par une copie de y.

Exemple



- L'unité est .

Arbres syntaxiques

Un ensemble de lettres est ensemble gradué $\mathfrak{G}$ de la forme

$$\mathfrak{G} := \bigsqcup_{n \geqslant 1} \mathfrak{G}(n)$$

et tel que chaque $\mathfrak{G}(n)$ est fini.

Arbres syntaxiques

Un ensemble de lettres est ensemble gradué $\mathfrak{G}$ de la forme

$$\mathfrak{G} := \bigsqcup_{n \geqslant 1} \mathfrak{G}(n)$$

et tel que chaque $\mathfrak{G}(n)$ est fini.

Un arbre syntaxique sur $\mathfrak{G}$ est un arbre plan enraciné $\mathfrak{t}$ tel que chaque nœud interne de $\mathfrak{t}$ d'arité n est décoré par un élément de $\mathfrak{G}(n)$.

Arbres syntaxiques

Un ensemble de lettres est ensemble gradué $\mathfrak{G}$ de la forme

$$\mathfrak{G} := \bigsqcup_{n \geqslant 1} \mathfrak{G}(n)$$

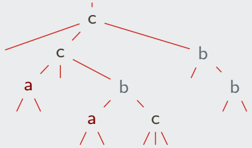
et tel que chaque $\mathfrak{G}(n)$ est fini.

Un arbre syntaxique sur $\mathfrak{G}$ est un arbre plan enraciné $\mathfrak{t}$ tel que chaque nœud interne de $\mathfrak{t}$ d'arité n est décoré par un élément de $\mathfrak{G}(n)$.

Exemple

Soit $\mathfrak{G} := \mathfrak{G}(2) \sqcup \mathfrak{G}(3)$ tel que $\mathfrak{G}(2) = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}$ et $\mathfrak{G}(3) = \{\mathsf{c}\}$.

L'arbre



est un arbre syntaxique sur $\mathfrak{G}$.

Ensemble d'arbres syntaxiques

Soit $\mathfrak{G}$ un ensemble de lettres.

L'ensemble des arbres syntaxiques sur $\mathfrak{G}$ est noté $\mathbf{A}(\mathfrak{G})$.

Ensemble d'arbres syntaxiques

Soit $\mathfrak{G}$ un ensemble de lettres.

L'ensemble des arbres syntaxiques sur $\mathfrak{G}$ est noté $\mathbf{A}(\mathfrak{G})$.

Pour tout $\mathfrak{t} \in \mathbf{A}(\mathfrak{G})$, on note par

- $|\mathfrak{t}|$ l'arité de $\mathfrak{t}$, qui est le nombre de feuilles de $\mathfrak{t}$;

Ensemble d'arbres syntaxiques

Soit $\mathfrak{G}$ un ensemble de lettres.

L'ensemble des arbres syntaxiques sur $\mathfrak{G}$ est noté $\mathbf{A}(\mathfrak{G})$.

Pour tout $\mathfrak{t} \in \mathbf{A}(\mathfrak{G})$, on note par

- $|\mathfrak{t}|$ l'arité de $\mathfrak{t}$, qui est le nombre de feuilles de $\mathfrak{t}$;
- $\deg(\mathfrak{t})$ le degré de $\mathfrak{t}$, qui est le nombre de nœuds internes de $\mathfrak{t}$;

Ensemble d'arbres syntaxiques

Soit $\mathfrak{G}$ un ensemble de lettres.

L'ensemble des arbres syntaxiques sur $\mathfrak{G}$ est noté $\mathbf{A}(\mathfrak{G})$.

Pour tout $\mathfrak{t} \in \mathbf{A}(\mathfrak{G})$, on note par

- $|\mathfrak{t}|$ l'arité de $\mathfrak{t}$, qui est le nombre de feuilles de $\mathfrak{t}$;
- $\deg(\mathfrak{t})$ le degré de $\mathfrak{t}$, qui est le nombre de nœuds internes de $\mathfrak{t}$;
- $\mathrm{a}(\mathfrak{t})$ le nombre d'arcs de $\mathfrak{t}$ (qui vérifie $\mathrm{a}(\mathfrak{t}) = |\mathfrak{t}| + \deg(\mathfrak{t})$).

Ensemble d'arbres syntaxiques

Soit $\mathfrak{G}$ un ensemble de lettres.

L'ensemble des arbres syntaxiques sur $\mathfrak{G}$ est noté $\mathbf{A}(\mathfrak{G})$.

Pour tout $\mathfrak{t} \in \mathbf{A}(\mathfrak{G})$, on note par

- $|\mathfrak{t}|$ l'arité de $\mathfrak{t}$, qui est le nombre de feuilles de $\mathfrak{t}$;
- $\deg(\mathfrak{t})$ le degré de $\mathfrak{t}$, qui est le nombre de nœuds internes de $\mathfrak{t}$;
- $\mathrm{a}(\mathfrak{t})$ le nombre d'arcs de $\mathfrak{t}$ (qui vérifie $\mathrm{a}(\mathfrak{t}) = |\mathfrak{t}| + \deg(\mathfrak{t})$).

L'ensemble des arbres syntaxiques sur $\mathfrak{G}$ d'arité n est noté $\mathbf{A}(\mathfrak{G})(n)$.

On a ainsi

$$\mathbf{A}(\mathfrak{G}) = \bigsqcup_{n \geqslant 1} \mathbf{A}(\mathfrak{G})(n).$$

Ensemble d'arbres syntaxiques

Soit $\mathfrak{G}$ un ensemble de lettres.

L'ensemble des arbres syntaxiques sur $\mathfrak{G}$ est noté $\mathbf{A}(\mathfrak{G})$.

Pour tout $\mathfrak{t} \in \mathbf{A}(\mathfrak{G})$, on note par

- $|\mathfrak{t}|$ l'arité de $\mathfrak{t}$, qui est le nombre de feuilles de $\mathfrak{t}$;
- $\deg(\mathfrak{t})$ le degré de $\mathfrak{t}$, qui est le nombre de nœuds internes de $\mathfrak{t}$;
- $\mathrm{a}(\mathfrak{t})$ le nombre d'arcs de $\mathfrak{t}$ (qui vérifie $\mathrm{a}(\mathfrak{t}) = |\mathfrak{t}| + \deg(\mathfrak{t})$).

L'ensemble des arbres syntaxiques sur $\mathfrak{G}$ d'arité n est noté $\mathbf{A}(\mathfrak{G})(n)$.

On a ainsi

$$\mathbf{A}(\mathfrak{G}) = \bigsqcup_{n \geqslant 1} \mathbf{A}(\mathfrak{G})(n).$$

Remarque : si $\mathfrak{G}(1) = \emptyset$, comme chaque $\mathfrak{G}(n)$ est fini, $\mathbf{A}(\mathfrak{G})(n)$ est fini.

Greffe partielle

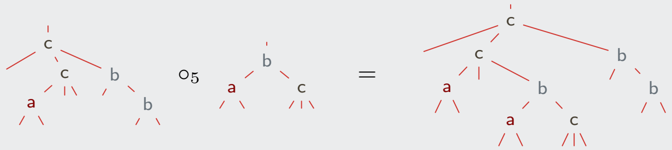
Soient $\mathfrak{t}, \mathfrak{s} \in \mathbf{A}(\mathfrak{G})$.

Greffe partielle

Soient $\mathfrak{t}, \mathfrak{s} \in \mathbf{A}(\mathfrak{G})$.

Pour tout $i \in [|\mathfrak{t}|]$, $\mathfrak{t} \circ_i \mathfrak{s}$ est l'arbre syntaxique obtenu en greffant la racine de $\mathfrak{s}$ sur la i^{e} feuille de $\mathfrak{t}$.

Exemple

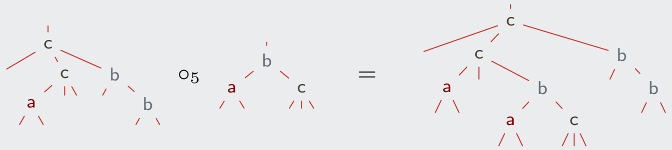


Greffe partielle

Soient $\mathfrak{t}, \mathfrak{s} \in \mathbf{A}(\mathfrak{G})$.

Pour tout $i \in [|\mathfrak{t}|]$, $\mathfrak{t} \circ_i \mathfrak{s}$ est l'arbre syntaxique obtenu en greffant la racine de $\mathfrak{s}$ sur la i^{e} feuille de $\mathfrak{t}$.

Exemple



Ainsi, $\circ_i$ est une application

$$\circ_i : \mathbf{A}(\mathfrak{G})(n) \times \mathbf{A}(\mathfrak{G})(m) \to \mathbf{A}(\mathfrak{G})(n + m - 1)$$

où $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant m$, nommée application de greffe partielle.

Greffe complète

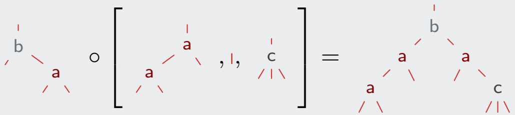
Soient $\mathfrak{t}, \mathfrak{s}_1, \ldots, \mathfrak{s}_{|\mathfrak{t}|} \in \mathbf{A}(\mathfrak{G})$.

Greffe complète

Soient $\mathfrak{t}, \mathfrak{s}_1, \ldots, \mathfrak{s}_{|\mathfrak{t}|} \in \mathbf{A}(\mathfrak{G})$.

L'arbre $\mathfrak{t} \circ \left[\mathfrak{s}_1, \ldots, \mathfrak{s}_{|\mathfrak{t}|}\right]$ est obtenu en greffant simultanément chaque $\mathfrak{s}_i$ sur la i^{e} feuille de $\mathfrak{t}$.

Exemple

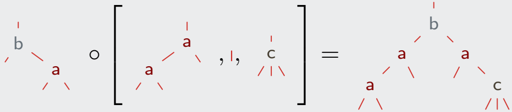


Greffe complète

Soient $\mathfrak{t}, \mathfrak{s}_1, \ldots, \mathfrak{s}_{|\mathfrak{t}|} \in \mathbf{A}(\mathfrak{G})$.

L'arbre $\mathfrak{t} \circ \left[\mathfrak{s}_1, \ldots, \mathfrak{s}_{|\mathfrak{t}|}\right]$ est obtenu en greffant simultanément chaque $\mathfrak{s}_i$ sur la i^{e} feuille de $\mathfrak{t}$.

Exemple



Ainsi, $\circ$ est une application

$$\circ : \mathbf{A}(\mathfrak{G})(n) \times \mathbf{A}(\mathfrak{G})(m_1) \times \cdots \times \mathbf{A}(\mathfrak{G})(m_n) \to \mathbf{A}(\mathfrak{G})(m_1 + \cdots + m_n)$$

où $1 \leqslant n$ et $1 \leqslant m_1, \ldots, m_n$, nommée application de greffe complète.

Opérades libres

Soit $\mathfrak{G}$ un ensemble de lettres.

Opérades libres

Soit $\mathfrak{G}$ un ensemble de lettres.

L'opérade libre sur $\mathfrak{G}$ est l'opérade $\mathbf{A}(\mathfrak{G})$ dans laquelle

- les éléments d'arité n sont les arbres de $\mathbf{A}(\mathfrak{G})(n)$;

Opérades libres

Soit $\mathfrak{G}$ un ensemble de lettres.

L'opérade libre sur $\mathfrak{G}$ est l'opérade $\mathbf{A}(\mathfrak{G})$ dans laquelle

- les éléments d'arité n sont les arbres de $\mathbf{A}(\mathfrak{G})(n)$;
- La composition partielle est la greffe partielle $\circ_i$ des arbres ;

Opérades libres

Soit $\mathfrak{G}$ un ensemble de lettres.

L'opérade libre sur $\mathfrak{G}$ est l'opérade $\mathbf{A}(\mathfrak{G})$ dans laquelle

- les éléments d'arité n sont les arbres de $\mathbf{A}(\mathfrak{G})(n)$;
- La composition partielle est la greffe partielle $\circ_i$ des arbres ;
- L'unité est l'arbre $|$ réduit à une feuille.

Opérades libres

Soit $\mathfrak{G}$ un ensemble de lettres.

L'opérade libre sur $\mathfrak{G}$ est l'opérade $\mathbf{A}(\mathfrak{G})$ dans laquelle

- les éléments d'arité n sont les arbres de $\mathbf{A}(\mathfrak{G})(n)$;
- La composition partielle est la greffe partielle $\circ_i$ des arbres ;
- L'unité est l'arbre $\shortmid$ réduit à une feuille.

On note par $\mathrm{c} : \mathfrak{G} \to \mathbf{A}(\mathfrak{G})$ l'injection naturelle.

Opérades libres

Soit $\mathfrak{G}$ un ensemble de lettres.

L'opérade libre sur $\mathfrak{G}$ est l'opérade $\mathbf{A}(\mathfrak{G})$ dans laquelle

- les éléments d'arité n sont les arbres de $\mathbf{A}(\mathfrak{G})(n)$;
- La composition partielle est la greffe partielle $\circ_i$ des arbres ;
- L'unité est l'arbre $|$ réduit à une feuille.

On note par $\mathrm{c} : \mathfrak{G} \to \mathbf{A}(\mathfrak{G})$ l'injection naturelle.

Les opérades libres vérifient la propriété universelle suivante.

Pour tout ensemble gradué $\mathfrak{G}$, toute opérade $\mathcal{O}$ et toute application graduée $f : \mathfrak{G} \to \mathcal{O}$, il existe un unique morphisme d'opérades $\phi : \mathbf{A}(\mathfrak{G}) \to \mathcal{O}$ tel que $f = \phi \circ \mathrm{c}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{G} \arrow[rr, "f"] \arrow[d, tail, "\mathrm{c}"'] & & \mathcal{O} \\
\mathbf{A}(\mathfrak{G}) \arrow[urr, dashed, "\phi"'] & &
\end{tikzcd}$$

Plan

Motifs, séries d'arbres et opérades

Séries d'arbres

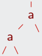
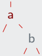
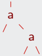
Une série d'arbres est une $\mathbf{A}(\mathfrak{G})$-série.

Séries d'arbres

Une série d'arbres est une $\mathbf{A}(\mathfrak{G})$-série.

Exemple

Pour tout $x \in \mathfrak{G}$, soit la série $\mathbf{f}_x$ de $\mathbb{K}\langle\langle \mathbf{A}(\mathfrak{G}) \rangle\rangle$ où $\langle \mathfrak{t}, \mathbf{f}_x \rangle$ est le nombre de lettres x dans $\mathfrak{t}$. Par exemple,

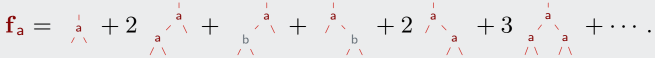
$\mathbf{f}_{\mathsf{a}} =$  $+\, 2$  $+$  $+$  $+\, 2$  $+\, 3$  $+ \cdots .$

Séries d'arbres

Une série d'arbres est une $\mathbf{A}(\mathfrak{G})$-série.

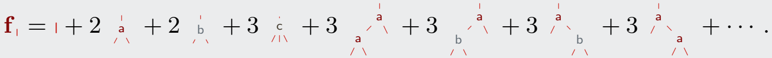
Exemple

Pour tout $x \in \mathfrak{G}$, soit la série $\mathbf{f}_x$ de $\mathbb{K}\langle\langle \mathbf{A}(\mathfrak{G}) \rangle\rangle$ où $\langle \mathfrak{t}, \mathbf{f}_x \rangle$ est le nombre de lettres x dans $\mathfrak{t}$. Par exemple,



Exemple

Soit la série $\mathbf{f}_{|}$ de $\mathbb{K}\langle\langle \mathbf{A}(\mathfrak{G}) \rangle\rangle$ où $\langle \mathfrak{t}, \mathbf{f}_{|} \rangle := |\mathfrak{t}|$. On a

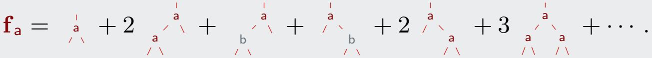


Séries d'arbres

Une série d'arbres est une $\mathbf{A}(\mathfrak{G})$-série.

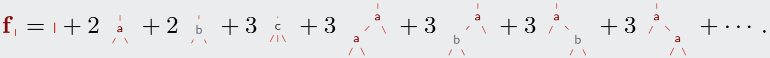
Exemple

Pour tout $x \in \mathfrak{G}$, soit la série $\mathbf{f}_x$ de $\mathbb{K}\langle\langle \mathbf{A}(\mathfrak{G}) \rangle\rangle$ où $\langle \mathfrak{t}, \mathbf{f}_x \rangle$ est le nombre de lettres x dans $\mathfrak{t}$. Par exemple,



Exemple

Soit la série $\mathbf{f}_{|}$ de $\mathbb{K}\langle\langle \mathbf{A}(\mathfrak{G}) \rangle\rangle$ où $\left\langle \mathfrak{t}, \mathbf{f}_{|} \right\rangle := |\mathfrak{t}|$. On a



Exemple

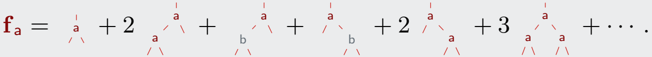
La somme $\mathbf{f}_{\mathsf{a}} + \mathbf{f}_{\mathsf{b}} + \mathbf{f}_{\mathsf{c}}$ est la série dans laquelle le coefficient d'un arbre est son degré.

Séries d'arbres

Une série d'arbres est une $\mathbf{A}(\mathfrak{G})$-série.

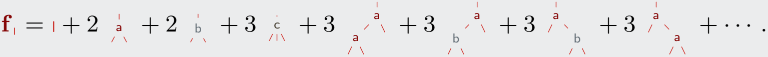
Exemple

Pour tout $x \in \mathfrak{G}$, soit la série $\mathbf{f}_x$ de $\mathbb{K}\langle\langle \mathbf{A}(\mathfrak{G}) \rangle\rangle$ où $\langle \mathfrak{t}, \mathbf{f}_x \rangle$ est le nombre de lettres x dans $\mathfrak{t}$. Par exemple,



Exemple

Soit la série $\mathbf{f}_{|}$ de $\mathbb{K}\langle\langle \mathbf{A}(\mathfrak{G}) \rangle\rangle$ où $\langle \mathfrak{t}, \mathbf{f}_{|} \rangle := |\mathfrak{t}|$. On a



Exemple

La somme $\mathbf{f}_a + \mathbf{f}_b + \mathbf{f}_c$ est la série dans laquelle le coefficient d'un arbre est son degré.

La somme $\mathbf{f}_{|} + \mathbf{f}_a + \mathbf{f}_b + \mathbf{f}_c$ est la série dans laquelle le coefficient d'un arbre est son nombre d'arcs.

Motifs et occurrences

Un arbre $\mathfrak{t} \in \mathbf{A}(\mathfrak{G})$ admet une occurrence d'un arbre $\mathfrak{s} \in \mathbf{A}(\mathfrak{G})$ s'il est possible de placer $\mathfrak{s}$ dans $\mathfrak{t}$ en confondant la racine de $\mathfrak{s}$ avec un nœud de $\mathfrak{t}$ et les feuilles de $\mathfrak{s}$ avec des nœuds de $\mathfrak{t}$.

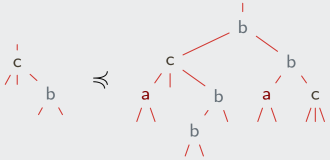
On note cette propriété $\mathfrak{s} \preccurlyeq \mathfrak{t}$.

Motifs et occurrences

Un arbre $\mathfrak{t} \in \mathbf{A}(\mathfrak{G})$ admet une occurrence d'un arbre $\mathfrak{s} \in \mathbf{A}(\mathfrak{G})$ s'il est possible de placer $\mathfrak{s}$ dans $\mathfrak{t}$ en confondant la racine de $\mathfrak{s}$ avec un nœud de $\mathfrak{t}$ et les feuilles de $\mathfrak{s}$ avec des nœuds de $\mathfrak{t}$.

On note cette propriété $\mathfrak{s} \preccurlyeq \mathfrak{t}$.

Exemple

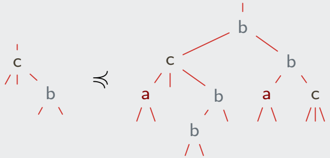


Motifs et occurrences

Un arbre $\mathfrak{t} \in \mathbf{A}(\mathfrak{G})$ admet une occurrence d'un arbre $\mathfrak{s} \in \mathbf{A}(\mathfrak{G})$ s'il est possible de placer $\mathfrak{s}$ dans $\mathfrak{t}$ en confondant la racine de $\mathfrak{s}$ avec un nœud de $\mathfrak{t}$ et les feuilles de $\mathfrak{s}$ avec des nœuds de $\mathfrak{t}$.

On note cette propriété $\mathfrak{s} \preccurlyeq \mathfrak{t}$.

Exemple



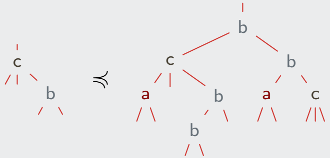
La relation $\preccurlyeq$ munit ainsi $\mathbf{A}(\mathfrak{G})$ d'une structure d'ordre partiel.

Motifs et occurrences

Un arbre $\mathfrak{t} \in \mathbf{A}(\mathfrak{G})$ admet une occurrence d'un arbre $\mathfrak{s} \in \mathbf{A}(\mathfrak{G})$ s'il est possible de placer $\mathfrak{s}$ dans $\mathfrak{t}$ en confondant la racine de $\mathfrak{s}$ avec un nœud de $\mathfrak{t}$ et les feuilles de $\mathfrak{s}$ avec des nœuds de $\mathfrak{t}$.

On note cette propriété $\mathfrak{s} \preccurlyeq \mathfrak{t}$.

Exemple



La relation $\preccurlyeq$ munit ainsi $\mathbf{A}(\mathfrak{G})$ d'une structure d'ordre partiel.

Plus formellement, nous avons $\mathfrak{s} \preccurlyeq \mathfrak{t}$ s'il existe $\mathfrak{r}, \mathfrak{r}_1, \dots, \mathfrak{r}_{|\mathfrak{s}|} \in \mathbf{A}(\mathfrak{G})$ et $i \in [|\mathfrak{r}|]$ tels que

$$\mathfrak{t} = \mathfrak{r} \circ_i \left(\mathfrak{s} \circ \left[\mathfrak{r}_1, \dots, \mathfrak{r}_{|\mathfrak{s}|}\right]\right).$$

Séries d'arbres à motifs exclus

Soient $\mathcal{P} \subseteq \mathbf{A}(\mathfrak{G})$ fini et

$$\mathbf{f}(\mathcal{P}) := \sum_{\substack{\mathfrak{t} \in \mathbf{A}(\mathfrak{G}) \\ \forall \mathfrak{s} \in \mathcal{P}, \mathfrak{s} \not\preccurlyeq \mathfrak{t}}} \mathfrak{t}$$

la série des arbres qui évitent tous les arbres de $\mathcal{P}$.

Séries d'arbres à motifs exclus

Soient $\mathcal{P} \subseteq \mathbf{A}(\mathfrak{G})$ fini et

$$\mathbf{f}(\mathcal{P}) := \sum_{\substack{\mathfrak{t} \in \mathbf{A}(\mathfrak{G}) \\ \forall \mathfrak{s} \in \mathcal{P}, \mathfrak{s} \not\preccurlyeq \mathfrak{t}}} \mathfrak{t}$$

la série des arbres qui évitent tous les arbres de $\mathcal{P}$.

Lorsque $\mathfrak{G}(1) = \emptyset$, chaque $\mathbf{A}(\mathfrak{G})(n)$ est fini et ainsi l'ensemble des arbres syntaxiques sur $\mathfrak{G}$ d'arité n qui évitent $\mathcal{P}$ est fini.

Séries d'arbres à motifs exclus

Soient $\mathcal{P} \subseteq \mathbf{A}(\mathfrak{G})$ fini et

$$\mathbf{f}(\mathcal{P}) := \sum_{\substack{\mathfrak{t} \in \mathbf{A}(\mathfrak{G}) \\ \forall \mathfrak{s} \in \mathcal{P}, \mathfrak{s} \not\preccurlyeq \mathfrak{t}}} \mathfrak{t}$$

la série des arbres qui évitent tous les arbres de $\mathcal{P}$.

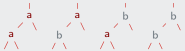
Lorsque $\mathfrak{G}(1) = \emptyset$, chaque $\mathbf{A}(\mathfrak{G})(n)$ est fini et ainsi l'ensemble des arbres syntaxiques sur $\mathfrak{G}$ d'arité n qui évitent $\mathcal{P}$ est fini.

Dans ce cas, $\mathrm{ev}(\mathbf{f}(\mathcal{P}))$ est bien définie et est la série génératrice des arbres évitant $\mathcal{P}$, dénombrés selon leur arité.

Séries génératrices d'arbres à motifs exclus

Exemple

Puissances de 2 avec $\mathfrak{G} := \mathfrak{G}(2) := \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}$:

$\mathbf{f}\,\Big($ 

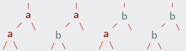
$\Big) \xmapsto{\text{ev}} t + 2t^2 + 4t^3 + 8t^4 + 16t^5 + 32t^6 + 64t^7 + 128t^8 + \cdots .$

Séries génératrices d'arbres à motifs exclus

Exemple

Puissances de 2 avec $\mathfrak{G} := \mathfrak{G}(2) := \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}$:

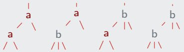
$$\mathbf{f}\left(\quad \right) \xrightarrow{\text{ev}} t + 2t^2 + 4t^3 + 8t^4 + 16t^5 + 32t^6 + 64t^7 + 128t^8 + \cdots .$$



Exemple

Chem. Motz. **A001006** avec $\mathfrak{G} := \mathfrak{G}(2) \sqcup \mathfrak{G}(3)$ où $\mathfrak{G}(2) := \{\mathsf{a}\}$ et $\mathfrak{G}(3) := \{\mathsf{b}\}$:

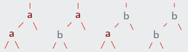
$$\mathbf{f}\left(\quad \right) \xrightarrow{\text{ev}} t + t^2 + 2t^3 + 4t^4 + 9t^5 + 21t^6 + 51t^7 + 127t^8 + \cdots .$$



Séries génératrices d’arbres à motifs exclus

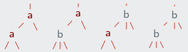
Exemple

Puissances de 2 avec $\mathfrak{G} := \mathfrak{G}(2) := \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}$:

$\mathbf{f}\Bigg($  $\Bigg) \xrightarrow{\text{ev}} t + 2t^2 + 4t^3 + 8t^4 + 16t^5 + 32t^6 + 64t^7 + 128t^8 + \cdots .$

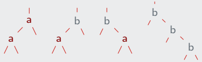
Exemple

Chem. Motz. **A001006** avec $\mathfrak{G} := \mathfrak{G}(2) \sqcup \mathfrak{G}(3)$ où $\mathfrak{G}(2) := \{\mathsf{a}\}$ et $\mathfrak{G}(3) := \{\mathsf{b}\}$:

$\mathbf{f}\Bigg($  $\Bigg) \xrightarrow{\text{ev}} t + t^2 + 2t^3 + 4t^4 + 9t^5 + 21t^6 + 51t^7 + 127t^8 + \cdots .$

Exemple

Animaux dirigés **A005773** avec $\mathfrak{G} := \mathfrak{G}(2) := \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}$:

$\mathbf{f}\Bigg($  $\Bigg) \xrightarrow{\text{ev}} t+2t^2+5t^3+13t^4+35t^5+96t^6+267t^7+750t^8+\cdots .$

Dénombrement d'arbres à motifs exclus

Objectif

Étant donnés $\mathfrak{G}$ et $\mathcal{P} \subseteq \mathbf{A}(\mathfrak{G})$ fini, décrire un procédé pour exprimer la série génératrice $\mathrm{ev}(\mathbf{f}(\mathcal{P}))$ des arbres évitant les motifs de $\mathcal{P}$.

Dénombrement d'arbres à motifs exclus

Objectif

Étant donnés $\mathfrak{G}$ et $\mathcal{P} \subseteq \mathbf{A}(\mathfrak{G})$ fini, décrire un procédé pour exprimer la série génératrice $\mathrm{ev}(\mathbf{f}(\mathcal{P}))$ des arbres évitant les motifs de $\mathcal{P}$.

Pour cela, on cherche à décrire $\mathbf{f}(\mathcal{P})$ et une version raffinée de cette dernière,

$$\mathbf{f}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) := \sum_{\substack{\mathfrak{t} \in \mathbf{A}(\mathfrak{G}) \\ \forall \mathfrak{s} \in \mathcal{P}, \mathfrak{s} \not\preccurlyeq \mathfrak{t} \\ \forall \mathfrak{s} \in \mathcal{Q}, \mathfrak{s} \not\preccurlyeq_{\mathrm{r}} \mathfrak{t}}} \mathfrak{t},$$

où $\mathfrak{s} \preccurlyeq_{\mathrm{r}} \mathfrak{t}$ si $\mathfrak{t}$ admet une occurrence de $\mathfrak{s}$ en racine.

Dénombrement d'arbres à motifs exclus

Objectif

Étant donnés $\mathfrak{G}$ et $\mathcal{P} \subseteq \mathbf{A}(\mathfrak{G})$ fini, décrire un procédé pour exprimer la série génératrice $\mathrm{ev}(\mathbf{f}(\mathcal{P}))$ des arbres évitant les motifs de $\mathcal{P}$.

Pour cela, on cherche à décrire $\mathbf{f}(\mathcal{P})$ et une version raffinée de cette dernière,

$$\mathbf{f}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) := \sum_{\substack{\mathfrak{t} \in \mathbf{A}(\mathfrak{G}) \\ \forall \mathfrak{s} \in \mathcal{P}, \mathfrak{s} \not\preccurlyeq \mathfrak{t} \\ \forall \mathfrak{s} \in \mathcal{Q}, \mathfrak{s} \not\preccurlyeq_{\mathrm{r}} \mathfrak{t}}} \mathfrak{t},$$

où $\mathfrak{s} \preccurlyeq_{\mathrm{r}} \mathfrak{t}$ si $\mathfrak{t}$ admet une occurrence de $\mathfrak{s}$ en racine.

Plus formellement, nous avons $\mathfrak{s} \preccurlyeq_{\mathrm{r}} \mathfrak{t}$ s'il existe $\mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}_{|\mathfrak{s}|} \in \mathbf{A}(\mathfrak{G})$ et $i \in [|\mathfrak{r}|]$ tels que

$$\mathfrak{t} = \mathfrak{s} \circ \left[\mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}_{|\mathfrak{s}|}\right].$$

Dénombrement d'arbres à motifs exclus

Objectif

Étant donnés $\mathfrak{G}$ et $\mathcal{P} \subseteq \mathbf{A}(\mathfrak{G})$ fini, décrire un procédé pour exprimer la série génératrice $\mathrm{ev}(\mathbf{f}(\mathcal{P}))$ des arbres évitant les motifs de $\mathcal{P}$.

Pour cela, on cherche à décrire $\mathbf{f}(\mathcal{P})$ et une version raffinée de cette dernière,

$$\mathbf{f}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) := \sum_{\substack{\mathfrak{t} \in \mathbf{A}(\mathfrak{G}) \\ \forall \mathfrak{s} \in \mathcal{P}, \mathfrak{s} \not\preccurlyeq \mathfrak{t} \\ \forall \mathfrak{s} \in \mathcal{Q}, \mathfrak{s} \not\preccurlyeq_{\mathrm{r}} \mathfrak{t}}} \mathfrak{t},$$

où $\mathfrak{s} \preccurlyeq_{\mathrm{r}} \mathfrak{t}$ si $\mathfrak{t}$ admet une occurrence de $\mathfrak{s}$ en racine.

Plus formellement, nous avons $\mathfrak{s} \preccurlyeq_{\mathrm{r}} \mathfrak{t}$ s'il existe $\mathfrak{r}_1, \dots, \mathfrak{r}_{|\mathfrak{s}|} \in \mathbf{A}(\mathfrak{G})$ et $i \in [|\mathfrak{r}|]$ tels que

$$\mathfrak{t} = \mathfrak{s} \circ \left[\mathfrak{r}_1, \dots, \mathfrak{r}_{|\mathfrak{s}|}\right].$$

Remarque :

$$\mathbf{f}(\mathcal{P}) = \mathbf{f}(\mathcal{P}, \mathcal{P}'), \quad \mathcal{P}' \subseteq \mathcal{P}.$$

Description du système

Soient $\mathcal{R} \subseteq \mathbf{A}(\mathfrak{G})$ fini et $x \in \mathfrak{G}(n)$.

Description du système

Soient $\mathcal{R} \subseteq \mathbf{A}(\mathfrak{G})$ fini et $x \in \mathfrak{G}(n)$.

On définit $\mathcal{R}^x$ comme l'ensemble de tous les mots u de longueur n tels que

- les lettres de u sont des sous-ensembles de $\mathbf{A}(\mathfrak{G}) \setminus \{|\}$;
- pour tout $\mathfrak{t} \in \mathcal{R}$ tel que $\mathfrak{t} = \mathrm{c}(x) \circ [\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_n]$, il existe un $\mathfrak{t}_i \in u_i$;
- les lettres de u sont minimales au sens de l'inclusion.

Description du système

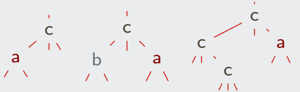
Soient $\mathcal{R} \subseteq \mathbf{A}(\mathfrak{G})$ fini et $x \in \mathfrak{G}(n)$.

On définit $\mathcal{R}^x$ comme l'ensemble de tous les mots u de longueur n tels que

- les lettres de u sont des sous-ensembles de $\mathbf{A}(\mathfrak{G}) \setminus \{|\}$;
- pour tout $\mathfrak{t} \in \mathcal{R}$ tel que $\mathfrak{t} = \mathsf{c}(x) \circ [\mathfrak{t}_1, \dots, \mathfrak{t}_n]$, il existe un $\mathfrak{t}_i \in u_i$;
- les lettres de u sont minimales au sens de l'inclusion.

Exemple

Soient $\mathfrak{G} := \mathfrak{G}(2) \sqcup \mathfrak{G}(3)$ avec $\mathfrak{G}(2) := \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}$, $\mathfrak{G}(3) := \{\mathsf{c}\}$ et

$\mathcal{R} :=$  .

Description du système

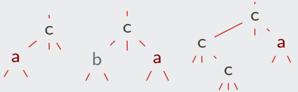
Soient $\mathcal{R} \subseteq \mathbf{A}(\mathfrak{G})$ fini et $x \in \mathfrak{G}(n)$.

On définit $\mathcal{R}^x$ comme l'ensemble de tous les mots u de longueur n tels que

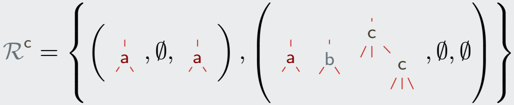
- les lettres de u sont des sous-ensembles de $\mathbf{A}(\mathfrak{G}) \setminus \{|\}$;
- pour tout $\mathfrak{t} \in \mathcal{R}$ tel que $\mathfrak{t} = \mathsf{c}(x) \circ [\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_n]$, il existe un $\mathfrak{t}_i \in u_i$;
- les lettres de u sont minimales au sens de l'inclusion.

Exemple

Soient $\mathfrak{G} := \mathfrak{G}(2) \sqcup \mathfrak{G}(3)$ avec $\mathfrak{G}(2) := \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}$, $\mathfrak{G}(3) := \{\mathsf{c}\}$ et

$\mathcal{R} :=$  .

Nous avons alors



Description du système

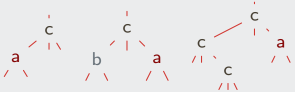
Soient $\mathcal{R} \subseteq \mathbf{A}(\mathfrak{G})$ fini et $x \in \mathfrak{G}(n)$.

On définit $\mathcal{R}^x$ comme l'ensemble de tous les mots u de longueur n tels que

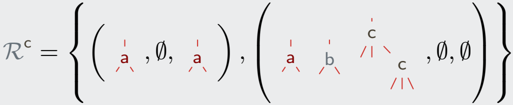
- les lettres de u sont des sous-ensembles de $\mathbf{A}(\mathfrak{G}) \setminus \{|\}$;
- pour tout $\mathfrak{t} \in \mathcal{R}$ tel que $\mathfrak{t} = \mathsf{c}(x) \circ [\mathfrak{t}_1, \dots, \mathfrak{t}_n]$, il existe un $\mathfrak{t}_i \in u_i$;
- les lettres de u sont minimales au sens de l'inclusion.

Exemple

Soient $\mathfrak{G} := \mathfrak{G}(2) \sqcup \mathfrak{G}(3)$ avec $\mathfrak{G}(2) := \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}$, $\mathfrak{G}(3) := \{\mathsf{c}\}$ et

$\mathcal{R} :=$  .

Nous avons alors



et

$$\mathcal{R}^{\mathsf{a}} = \mathcal{R}^{\mathsf{b}} = \{(\emptyset, \emptyset)\}.$$

Description du système

Théorème [G., 2017–]

Pour tout ensemble de lettres $\mathfrak{G}$ et tous $\mathcal{P}, \mathcal{Q} \subseteq \mathbf{A}(\mathfrak{G})$ finis,

$$\mathbf{f}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = \shortmid + \sum_{\substack{n \geqslant 1 \\ x \in \mathfrak{G}(n)}} \sum_{\substack{\mathcal{S} \subseteq (\mathcal{P} \cup \mathcal{Q})^{x} \\ \mathcal{S} \neq \emptyset}} (-1)^{1+\#\mathcal{S}} \; \mathrm{c}(x) \bar{\circ} \left[\dots, \mathbf{f}\left(\mathcal{P}, \bigcup_{u \in \mathcal{S}} u_i \right), \dots \right].$$

Description du système

Théorème [G., 2017–]

Pour tout ensemble de lettres $\mathfrak{G}$ et tous $\mathcal{P}, \mathcal{Q} \subseteq \mathbf{A}(\mathfrak{G})$ finis,

$$\mathbf{f}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = \shortmid + \sum_{\substack{n \geqslant 1 \\ x \in \mathfrak{G}(n)}} \sum_{\substack{\mathcal{S} \subseteq (\mathcal{P} \cup \mathcal{Q})^{x} \\ \mathcal{S} \neq \emptyset}} (-1)^{1+\#\mathcal{S}} \; \mathrm{c}(x) \bar{\circ} \left[\ldots, \mathbf{f}\left(\mathcal{P}, \bigcup_{u \in \mathcal{S}} u_i\right), \ldots \right].$$

Intuition :

- dans l'expression de $\mathbf{f}(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$, il apparaît des $\mathbf{f}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}')$ où les arbres de $\mathcal{Q}'$ sont de hauteurs inférieures à celles de $\mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$;

Description du système

Théorème [G., 2017–]

Pour tout ensemble de lettres $\mathfrak{G}$ et tous $\mathcal{P}, \mathcal{Q} \subseteq \mathbf{A}(\mathfrak{G})$ finis,

$$\mathbf{f}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = \shortmid + \sum_{\substack{n \geqslant 1 \\ x \in \mathfrak{G}(n)}} \sum_{\substack{\mathcal{S} \subseteq (\mathcal{P} \cup \mathcal{Q})^{x} \\ \mathcal{S} \neq \emptyset}} (-1)^{1+\#\mathcal{S}} \; \mathrm{c}(x) \bar{\circ} \left[\dots, \mathbf{f}\left(\mathcal{P}, \bigcup_{u \in \mathcal{S}} u_i \right), \dots \right].$$

Intuition :

- dans l'expression de $\mathbf{f}(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$, il apparaît des $\mathbf{f}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}')$ où les arbres de $\mathcal{Q}'$ sont de hauteurs inférieures à celles de $\mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$;
- pour tout $u \in \mathcal{R}^{x}$, tout arbre $\mathrm{c}(x) \circ \left[\mathfrak{t}_1, \dots, \mathfrak{t}_{|x|}\right]$ évite en racine les arbres de $\mathcal{R}$ ssi chaque $\mathfrak{t}_i$ évite en racine les arbres de u_i ;

Description du système

Théorème [G., 2017–]

Pour tout ensemble de lettres $\mathfrak{G}$ et tous $\mathcal{P}, \mathcal{Q} \subseteq \mathbf{A}(\mathfrak{G})$ finis,

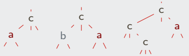
$$\mathbf{f}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = \shortmid + \sum_{\substack{n \geqslant 1 \\ x \in \mathfrak{G}(n)}} \sum_{\substack{\mathcal{S} \subseteq (\mathcal{P} \cup \mathcal{Q})^{x} \\ \mathcal{S} \neq \emptyset}} (-1)^{1+\#\mathcal{S}} \; \mathrm{c}(x) \bar{\circ} \left[\dots, \mathbf{f}\left(\mathcal{P}, \bigcup_{u \in \mathcal{S}} u_i\right), \dots \right].$$

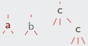
Intuition :

- dans l'expression de $\mathbf{f}(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$, il apparaît des $\mathbf{f}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}')$ où les arbres de $\mathcal{Q}'$ sont de hauteurs inférieures à celles de $\mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$;
- pour tout $u \in \mathcal{R}^{x}$, tout arbre $\mathrm{c}(x) \circ \left[\mathfrak{t}_1, \dots, \mathfrak{t}_{|x|}\right]$ évite en racine les arbres de $\mathcal{R}$ ssi chaque $\mathfrak{t}_i$ évite en racine les arbres de u_i ;
- pour tous $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2 \in \mathcal{R}^{x}$, $\mathbf{f}(\mathcal{P}, \mathcal{S}_1) + \mathbf{f}(\mathcal{P}, \mathcal{S}_2) - \mathbf{f}(\mathcal{P}, \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2)$ est la série des arbres qui évitent en racine les arbres de $\mathcal{S}_1$ ou de $\mathcal{S}_2$.

Exemple de système

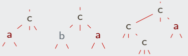
Exemple

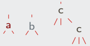
En poursuivant l'exemple précédent où $\mathcal{P} :=$  ,

$\mathcal{P}^{\mathsf{a}} = \mathcal{P}^{\mathsf{b}} = \{(\emptyset, \emptyset)\}$ et $\mathcal{P}^{\mathsf{c}} = \Bigg\{ \Bigg($  $, \emptyset,$  $\Bigg), \Bigg($  $, \emptyset, \emptyset \Bigg) \Bigg\}$, on a

Exemple de système

Exemple

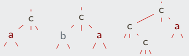
En poursuivant l'exemple précédent où $\mathcal{P} :=$  ,

$\mathcal{P}^{\mathsf{a}} = \mathcal{P}^{\mathsf{b}} = \{(\emptyset, \emptyset)\}$ et $\mathcal{P}^{\mathsf{c}} = \Big\{ \Big($  $, \emptyset,$  $\Big), \Big($  $, \emptyset, \emptyset \Big) \Big\}$, on a

$$\mathbf{f}(\mathcal{P}, \emptyset) =$$

Exemple de système

Exemple

En poursuivant l'exemple précédent où $\mathcal{P} :=$  ,

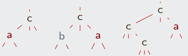
$\mathcal{P}^{\mathsf{a}} = \mathcal{P}^{\mathsf{b}} = \{(\emptyset, \emptyset)\}$ et $\mathcal{P}^{\mathsf{c}} = \Big\{ \Big($  $, \emptyset,$  $\Big), \Big($    $, \emptyset, \emptyset \Big) \Big\}$, on a

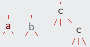
$\mathbf{f}(\mathcal{P}, \emptyset) =$

$$+\ \mathrm{c}(\mathsf{a})\bar{\circ}\,[\mathbf{f}(\mathcal{P}, \emptyset), \mathbf{f}(\mathcal{P}, \emptyset)]$$

Exemple de système

Exemple

En poursuivant l'exemple précédent où $\mathcal{P} :=$  ,

$\mathcal{P}^{a} = \mathcal{P}^{b} = \{(\emptyset, \emptyset)\}$ et $\mathcal{P}^{c} = \Bigg\{ \Bigg($  $, \emptyset,$  $\Bigg), \Bigg($  $, \emptyset, \emptyset \Bigg) \Bigg\}$, on a

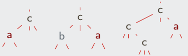
$$\mathbf{f}(\mathcal{P}, \emptyset) = $$

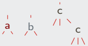
$$+ \, c(a) \bar{\circ} \left[\mathbf{f}(\mathcal{P}, \emptyset), \mathbf{f}(\mathcal{P}, \emptyset) \right]$$

$$+ \, c(b) \bar{\circ} \left[\mathbf{f}(\mathcal{P}, \emptyset), \mathbf{f}(\mathcal{P}, \emptyset) \right]$$

Exemple de système

Exemple

En poursuivant l'exemple précédent où $\mathcal{P} :=$  ,

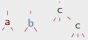
$\mathcal{P}^{a} = \mathcal{P}^{b} = \{(\emptyset, \emptyset)\}$ et $\mathcal{P}^{c} = \Big\{ \Big($  $, \emptyset,$  $\Big), \Big($  $, \emptyset, \emptyset \Big) \Big\}$, on a

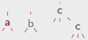
$$\mathbf{f}(\mathcal{P}, \emptyset) = |$$

$$+\, \mathrm{c}(a) \bar{\circ} \left[\mathbf{f}(\mathcal{P}, \emptyset), \mathbf{f}(\mathcal{P}, \emptyset)\right]$$

$$+\, \mathrm{c}(b) \bar{\circ} \left[\mathbf{f}(\mathcal{P}, \emptyset), \mathbf{f}(\mathcal{P}, \emptyset)\right]$$

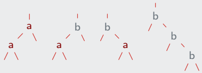
$+\, \mathrm{c}(c) \bar{\circ} \Big[\mathbf{f} \Big(\mathcal{P},$  $\Big), \mathbf{f}(\mathcal{P}, \emptyset), \mathbf{f} \Big(\mathcal{P},$  $\Big) \Big]$

$+\, \mathrm{c}(c) \bar{\circ} \Big[\mathbf{f} \Big(\mathcal{P},$  $\Big), \mathbf{f}(\mathcal{P}, \emptyset), \mathbf{f}(\mathcal{P}, \emptyset) \Big]$

$-\, \mathrm{c}(c) \bar{\circ} \Big[\mathbf{f} \Big(\mathcal{P},$  $\Big), \mathbf{f}(\mathcal{P}, \emptyset), \mathbf{f} \Big(\mathcal{P},$  $\Big) \Big]$.

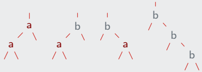
Exemple de système

Exemple

Considérons $\mathcal{P} :=$  (motifs des animaux dirigés).

Exemple de système

Exemple

Considérons $\mathcal{P} :=$  (motifs des animaux dirigés).

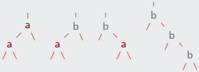
Nous avons alors

$\mathbf{f}(\mathcal{P}, \emptyset) = \shortmid +\, \mathrm{c}(\mathsf{a})\bar{\circ} \big[\mathbf{f}\big(\mathcal{P},$  $\big), \mathbf{f}(\mathcal{P}, \emptyset) \big]$

$+\, \mathrm{c}(\mathsf{b})\bar{\circ} \Big[\mathbf{f}\big(\mathcal{P},$  $\big), \mathbf{f}\Big(\mathcal{P},$  $\Big) \Big],$

Exemple de système

Exemple

Considérons $\mathcal{P} :=$  (motifs des animaux dirigés).

Nous avons alors

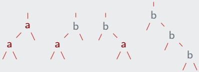
$$\mathbf{f}(\mathcal{P},\emptyset) = | + \mathrm{c}(\mathsf{a})\,\bar{\circ}\left[\mathbf{f}\left(\mathcal{P}, \mathsf{a}\right), \mathbf{f}\left(\mathcal{P},\emptyset\right)\right]$$

$$+ \mathrm{c}(\mathsf{b})\,\bar{\circ}\left[\mathbf{f}\left(\mathcal{P}, \mathsf{a}\right), \mathbf{f}\left(\mathcal{P}, \mathsf{a}\right.\right.$$  $$\left.\left.\right)\right],$$

$$\mathbf{f}\left(\mathcal{P}, \mathsf{a}\right) = | + \mathrm{c}(\mathsf{b})\,\bar{\circ}\left[\mathbf{f}\left(\mathcal{P}, \mathsf{a}\right), \mathbf{f}\left(\mathcal{P}, \mathsf{a}\right.\right.$$  $$\left.\left.\right)\right],$$

Exemple de système

Exemple

Considérons $\mathcal{P} :=$  (motifs des animaux dirigés).

Nous avons alors

$$\mathbf{f}(\mathcal{P}, \emptyset) = | + \mathrm{c}(\mathsf{a})\bar{\circ}\left[\mathbf{f}\left(\mathcal{P},\right.\right.$$  $$\left.\left.\right), \mathbf{f}(\mathcal{P}, \emptyset)\right]$$

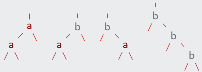
$$+\, \mathrm{c}(\mathsf{b})\bar{\circ}\left[\mathbf{f}\left(\mathcal{P},\right.\right.$$  $$\left.\right), \mathbf{f}\left(\mathcal{P},\right.$$  $$\left.\left.\right)\right],$$

$$\mathbf{f}\left(\mathcal{P},\right.$$  $$\left.\right) = | + \mathrm{c}(\mathsf{b})\bar{\circ}\left[\mathbf{f}\left(\mathcal{P},\right.\right.$$  $$\left.\right), \mathbf{f}\left(\mathcal{P},\right.$$  $$\left.\left.\right)\right],$$

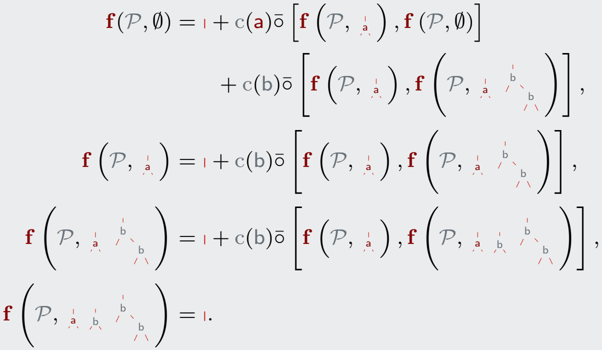
$$\mathbf{f}\left(\mathcal{P},\right.$$  $$\left.\right) = | + \mathrm{c}(\mathsf{b})\bar{\circ}\left[\mathbf{f}\left(\mathcal{P},\right.\right.$$  $$\left.\right), \mathbf{f}\left(\mathcal{P},\right.$$  $$\left.\left.\right)\right],$$

Exemple de système

Exemple

Considérons $\mathcal{P} :=$  (motifs des animaux dirigés).

Nous avons alors



Évaluation

Observation : pour tout $x \in \mathfrak{G}(n)$ et toutes $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n \in \mathbb{K}\langle\langle \mathbf{A}(\mathfrak{G}) \rangle\rangle$,

$$\mathrm{ev}\left(\mathrm{c}(x) \bar{\circ} \left[\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n\right]\right) = \prod_{i \in [n]} \mathrm{ev}(\mathbf{f}_i).$$

Évaluation

Observation : pour tout $x \in \mathfrak{G}(n)$ et toutes $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n \in \mathbb{K}\langle\langle \mathbf{A}(\mathfrak{G}) \rangle\rangle$,

$$\mathrm{ev}\left(\mathrm{c}(x) \bar{\circ} [\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n]\right) = \prod_{i \in [n]} \mathrm{ev}(\mathbf{f}_i).$$

On en déduit le résultat suivant.

Proposition [G., 2017–]

Soit $\mathfrak{G}$ un ensemble de lettres et $\mathcal{P}, \mathcal{Q} \subseteq \mathbf{A}(\mathfrak{G})$ finis. Soit la série de $\mathbb{K}\langle\langle t \rangle\rangle$ définie par

$$f(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = t + \sum_{\substack{n \geqslant 1 \\ x \in \mathfrak{G}(n)}} q_x \sum_{\substack{\mathcal{S} \subseteq (\mathcal{P} \cup \mathcal{Q})^x \\ \mathcal{S} \neq \emptyset}} (-1)^{1 + \#\mathcal{S}} \prod_{i \in [n]} f\left(\mathcal{P}, \bigcup_{u \in \mathcal{S}} u_i\right).$$

Alors, $\mathrm{ev}(\mathbf{f}(\mathcal{P}, \mathcal{Q})) = f(\mathcal{P}, \mathcal{Q})_{|q_x := 1, x \in \mathfrak{G}}$.

Présentations d'opérades

Soit $\mathcal{O}$ une opérade

Une présentation de $\mathcal{O}$ est un couple $(\mathfrak{G}, \equiv)$ tel que

Présentations d'opérades

Soit $\mathcal{O}$ une opérade

Une présentation de $\mathcal{O}$ est un couple $(\mathfrak{G}, \equiv)$ tel que

- $\mathfrak{G}$ est un ensemble de lettres, appelé ensemble générateur ;

Présentations d'opérades

Soit $\mathcal{O}$ une opérade

Une présentation de $\mathcal{O}$ est un couple $(\mathfrak{G}, \equiv)$ tel que

- $\mathfrak{G}$ est un ensemble de lettres, appelé ensemble générateur ;
- $\equiv$ est une congruence d'opérades de $\mathbf{A}(\mathfrak{G})$, c.-à-d. une relation d'équivalence sur les arbres syntaxiques telle que si $\mathfrak{t} \equiv \mathfrak{t}'$ et $\mathfrak{s} \equiv \mathfrak{s}'$ alors $\mathfrak{t} \circ_i \mathfrak{s} \equiv \mathfrak{t}' \circ_i \mathfrak{s}'$;

Présentations d'opérades

Soit $\mathcal{O}$ une opérade

Une présentation de $\mathcal{O}$ est un couple $(\mathfrak{G}, \equiv)$ tel que

- $\mathfrak{G}$ est un ensemble de lettres, appelé ensemble générateur ;
- $\equiv$ est une congruence d'opérades de $\mathbf{A}(\mathfrak{G})$, c.-à-d. une relation d'équivalence sur les arbres syntaxiques telle que si $\mathfrak{t} \equiv \mathfrak{t}'$ et $\mathfrak{s} \equiv \mathfrak{s}'$ alors $\mathfrak{t} \circ_i \mathfrak{s} \equiv \mathfrak{t}' \circ_i \mathfrak{s}'$;

avec

$$\mathcal{O} \simeq \mathbf{A}(\mathfrak{G})/_{\equiv}.$$

Présentations d'opérades

Soit $\mathcal{O}$ une opérade

Une présentation de $\mathcal{O}$ est un couple $(\mathfrak{G}, \equiv)$ tel que

- $\mathfrak{G}$ est un ensemble de lettres, appelé ensemble générateur ;
- $\equiv$ est une congruence d'opérades de $\mathbf{A}(\mathfrak{G})$, c.-à-d. une relation d'équivalence sur les arbres syntaxiques telle que si $\mathfrak{t} \equiv \mathfrak{t}'$ et $\mathfrak{s} \equiv \mathfrak{s}'$ alors $\mathfrak{t} \circ_i \mathfrak{s} \equiv \mathfrak{t}' \circ_i \mathfrak{s}'$;

avec

$$\mathcal{O} \simeq \mathbf{A}(\mathfrak{G})/_{\equiv}.$$

Une présentation $(\mathfrak{G}, \equiv)$ de $\mathcal{O}$ est

- binaire quand $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}(2)$;

Présentations d'opérades

Soit $\mathcal{O}$ une opérade

Une présentation de $\mathcal{O}$ est un couple $(\mathfrak{G}, \equiv)$ tel que

- $\mathfrak{G}$ est un ensemble de lettres, appelé ensemble générateur ;
- $\equiv$ est une congruence d'opérades de $\mathbf{A}(\mathfrak{G})$, c.-à-d. une relation d'équivalence sur les arbres syntaxiques telle que si $\mathfrak{t} \equiv \mathfrak{t}'$ et $\mathfrak{s} \equiv \mathfrak{s}'$ alors $\mathfrak{t} \circ_i \mathfrak{s} \equiv \mathfrak{t}' \circ_i \mathfrak{s}'$;

avec

$$\mathcal{O} \simeq \mathbf{A}(\mathfrak{G})/_{\equiv}.$$

Une présentation $(\mathfrak{G}, \equiv)$ de $\mathcal{O}$ est

- binaire quand $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}(2)$;
- quadratique quand $\equiv$ est engendrée en tant que congruence d'opérades par une relation d'équivalence n'utilisant que des arbres de degré 2.

Bases de Poincaré-Birkhoff-Witt

Soit $\mathcal{O}$ une opérade admettant la présentation $(\mathfrak{G}, \equiv)$.

Bases de Poincaré-Birkhoff-Witt

Soit $\mathcal{O}$ une opérade admettant la présentation $(\mathfrak{G}, \equiv)$.

Une base de Poincaré-Birkhoff-Witt (PBW) de $\mathcal{O}$ pour $(\mathfrak{G}, \equiv)$ est un sous-ensemble $\mathcal{B}$ de $\mathbf{A}(\mathfrak{G})$ tel que pour tout classe d'équivalence $[\mathfrak{t}]_{\equiv}$ de $\mathbf{A}(\mathfrak{G})/_{\equiv}$, il existe exactement un arbre $\mathfrak{s} \in \mathcal{B}$ tel que $\mathfrak{s} \in [\mathfrak{t}]_{\equiv}$.

Bases de Poincaré-Birkhoff-Witt

Soit $\mathcal{O}$ une opérade admettant la présentation $(\mathfrak{G}, \equiv)$.

Une base de Poincaré-Birkhoff-Witt (PBW) de $\mathcal{O}$ pour $(\mathfrak{G}, \equiv)$ est un sous-ensemble $\mathcal{B}$ de $\mathbf{A}(\mathfrak{G})$ tel que pour tout classe d'équivalence $[\mathfrak{t}]_\equiv$ de $\mathbf{A}(\mathfrak{G})/_\equiv$, il existe exactement un arbre $\mathfrak{s} \in \mathcal{B}$ tel que $\mathfrak{s} \in [\mathfrak{t}]_\equiv$.

En d'autres termes, une base de PBW de $\mathcal{O}$ offre un moyen de voir ses éléments comme des arbres syntaxiques soumis à certaines conditions.

Bases de Poincaré-Birkhoff-Witt

Soit $\mathcal{O}$ une opérade admettant la présentation $(\mathfrak{G}, \equiv)$.

Une base de Poincaré-Birkhoff-Witt (PBW) de $\mathcal{O}$ pour $(\mathfrak{G}, \equiv)$ est un sous-ensemble $\mathcal{B}$ de $\mathbf{A}(\mathfrak{G})$ tel que pour tout classe d'équivalence $[\mathfrak{t}]_{\equiv}$ de $\mathbf{A}(\mathfrak{G})/_{\equiv}$, il existe exactement un arbre $\mathfrak{s} \in \mathcal{B}$ tel que $\mathfrak{s} \in [\mathfrak{t}]_{\equiv}$.

En d'autres termes, une base de PBW de $\mathcal{O}$ offre un moyen de voir ses éléments comme des arbres syntaxiques soumis à certaines conditions.

Exemple

Soit As l'opérade associative, définie comme l'opérade de présentation $(\mathfrak{G}, \equiv)$ où $\mathfrak{G} := \mathfrak{G}(2) := \{\mathsf{a}\}$ et $\equiv$ est la plus petite congruence d'opérades vérifiant

$$\mathrm{c}(\mathsf{a}) \circ_1 \mathrm{c}(\mathsf{a}) \equiv \mathrm{c}(\mathsf{a}) \circ_2 \mathrm{c}(\mathsf{a}).$$

Bases de Poincaré-Birkhoff-Witt

Soit $\mathcal{O}$ une opérade admettant la présentation $(\mathfrak{G}, \equiv)$.

Une base de Poincaré-Birkhoff-Witt (PBW) de $\mathcal{O}$ pour $(\mathfrak{G}, \equiv)$ est un sous-ensemble $\mathcal{B}$ de $\mathbf{A}(\mathfrak{G})$ tel que pour tout classe d'équivalence $[\mathfrak{t}]_{\equiv}$ de $\mathbf{A}(\mathfrak{G})/_{\equiv}$, il existe exactement un arbre $\mathfrak{s} \in \mathcal{B}$ tel que $\mathfrak{s} \in [\mathfrak{t}]_{\equiv}$.

En d'autres termes, une base de PBW de $\mathcal{O}$ offre un moyen de voir ses éléments comme des arbres syntaxiques soumis à certaines conditions.

Exemple

Soit As l'opérade associative, définie comme l'opérade de présentation $(\mathfrak{G}, \equiv)$ où $\mathfrak{G} := \mathfrak{G}(2) := \{\mathsf{a}\}$ et $\equiv$ est la plus petite congruence d'opérades vérifiant

$$\mathrm{c}(\mathsf{a}) \circ_1 \mathrm{c}(\mathsf{a}) \equiv \mathrm{c}(\mathsf{a}) \circ_2 \mathrm{c}(\mathsf{a}).$$

Une base de PBW de As est l'ensemble des arbres de $\mathbf{A}(\mathfrak{G})$ évitant l'arbre $\mathrm{c}(\mathsf{a}) \circ_1 \mathrm{c}(\mathsf{a})$.

Application au dénombrement

Supposons que l'on ait un ensemble combinatoire C dont on cherche à décrire la série génératrice.

Application au dénombrement

Supposons que l'on ait un ensemble combinatoire C dont on cherche à décrire la série génératrice.

Un angle d'attaque consiste alors à

1. définir une (bonne) structure d'opérade $\mathcal{O}$ sur C ;

Application au dénombrement

Supposons que l'on ait un ensemble combinatoire C dont on cherche à décrire la série génératrice.

Un angle d'attaque consiste alors à

1. définir une (bonne) structure d'opérade $\mathcal{O}$ sur C ;
2. à déterminer une présentation $(\mathfrak{G}, \equiv)$ de $\mathcal{O}$ (en général en utilisant des techniques de réécritures sur les arbres de $\mathbf{A}(\mathfrak{G})$) ;

Application au dénombrement

Supposons que l'on ait un ensemble combinatoire C dont on cherche à décrire la série génératrice.

Un angle d'attaque consiste alors à

1. définir une (bonne) structure d'opérade $\mathcal{O}$ sur C ;
2. à déterminer une présentation $(\mathfrak{G}, \equiv)$ de $\mathcal{O}$ (en général en utilisant des techniques de réécritures sur les arbres de $\mathbf{A}(\mathfrak{G})$) ;
3. en déduire une base de PBW de $\mathcal{O}$ décrite comme les arbres de $\mathbf{A}(\mathfrak{G})$ évitant un ensemble de motifs $\mathcal{P}$ (en général, formés par les membres gauches des règles de réécriture convergentes) ;

Application au dénombrement

Supposons que l'on ait un ensemble combinatoire C dont on cherche à décrire la série génératrice.

Un angle d'attaque consiste alors à

1. définir une (bonne) structure d'opérade $\mathcal{O}$ sur C ;
2. à déterminer une présentation $(\mathfrak{G}, \equiv)$ de $\mathcal{O}$ (en général en utilisant des techniques de réécritures sur les arbres de $\mathbf{A}(\mathfrak{G})$) ;
3. en déduire une base de PBW de $\mathcal{O}$ décrite comme les arbres de $\mathbf{A}(\mathfrak{G})$ évitant un ensemble de motifs $\mathcal{P}$ (en général, formés par les membres gauches des règles de réécriture convergentes) ;
4. appliquer les résultats précédents pour obtenir une expression pour $\mathbf{f}(\mathcal{P})$.

Application au dénombrement

Supposons que l'on ait un ensemble combinatoire C dont on cherche à décrire la série génératrice.

Un angle d'attaque consiste alors à

1. définir une (bonne) structure d'opérade $\mathcal{O}$ sur C ;
2. à déterminer une présentation $(\mathfrak{G}, \equiv)$ de $\mathcal{O}$ (en général en utilisant des techniques de réécritures sur les arbres de $\mathbf{A}(\mathfrak{G})$) ;
3. en déduire une base de PBW de $\mathcal{O}$ décrite comme les arbres de $\mathbf{A}(\mathfrak{G})$ évitant un ensemble de motifs $\mathcal{P}$ (en général, formés par les membres gauches des règles de réécriture convergentes) ;
4. appliquer les résultats précédents pour obtenir une expression pour $\mathbf{f}(\mathcal{P})$.

Finalement, $\mathrm{ev}(\mathbf{f}(\mathcal{P}))$ est la série de Hilbert de $\mathcal{O}$ et est la série génératrice de C.

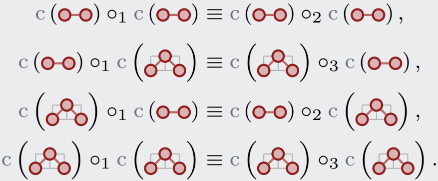
Exemple — l'opérade Motz

Proposition [G., 2015]

L'opérade Motz admet la présentation $(\mathfrak{G}, \equiv)$ où

$$\mathfrak{G} := \{\ldots\}$$

et $\equiv$ est la plus petite congruence d'opérades vérifiant



Cette présentation est quadratique et non binaire.

Exemple — l'opérade Motz

Proposition

L'ensemble $\mathcal{B}$ des arbres de $\mathbf{A}(\mathfrak{G})$ évitant

$\mathcal{P} := \{ \mathrm{c}\,($  $) \circ_1 \mathrm{c}\,($  $)$, $\mathrm{c}\,($  $) \circ_1 \mathrm{c}\,($  $)$,

$\mathrm{c}\,($  $) \circ_1 \mathrm{c}\,($  $)$, $\mathrm{c}\,($  $) \circ_1 \mathrm{c}\,($  $) \}$

est une base de PBW de Motz.

Exemple — l'opérade Motz

Proposition

L'ensemble $\mathcal{B}$ des arbres de $\mathbf{A}(\mathfrak{G})$ évitant

$$\mathcal{P} := \{\mathrm{c}\,(\ ) \circ_1 \mathrm{c}\,(\ ),\ \ \mathrm{c}\,(\ ) \circ_1 \mathrm{c}\,(\ ),\ \ \mathrm{c}\,(\ ) \circ_1 \mathrm{c}\,(\ ),\ \ \mathrm{c}\,(\ ) \circ_1 \mathrm{c}\,(\ )\}$$

est une base de PBW de Motz.

Ceci entraîne que la série caractéristique de $\mathcal{B}$ est la série $\mathbf{f}(\mathcal{P})$ vérifiant

$$\mathbf{f}(\mathcal{P}) = | \ + \ \mathrm{c}\,(\ )\,\bar{\circ}\,[|, \mathbf{f}(\mathcal{P})] \ + \ \mathrm{c}\,(\ )\,\bar{\circ}\,[|, \mathbf{f}(\mathcal{P}), \mathbf{f}(\mathcal{P})]\,.$$

Exemple — l'opérade Motz

Proposition

L'ensemble $\mathcal{B}$ des arbres de $\mathbf{A}(\mathfrak{G})$ évitant

$\mathcal{P} := \{\mathrm{c}($  $) \circ_1 \mathrm{c}($  $)$, $\mathrm{c}($  $) \circ_1 \mathrm{c}($  $)$,

$\mathrm{c}($  $) \circ_1 \mathrm{c}($  $)$, $\mathrm{c}($  $) \circ_1 \mathrm{c}($  $)\}$

est une base de PBW de Motz.

Ceci entraîne que la série caractéristique de $\mathcal{B}$ est la série $\mathbf{f}(\mathcal{P})$ vérifiant

$\mathbf{f}(\mathcal{P}) = | + \mathrm{c}($  $) \bar{\circ} [|, \mathbf{f}(\mathcal{P})] + \mathrm{c}($  $) \bar{\circ} [|, \mathbf{f}(\mathcal{P}), \mathbf{f}(\mathcal{P})]$.

Ainsi, en posant $\mathrm{g}(t) := \mathrm{ev}(\mathbf{f}(\mathcal{P}))$, on obtient l'expression

$$\mathrm{g}(t) = t + t\mathrm{g}(t) + t\mathrm{g}(t)^2$$

pour la série génératrice des chemins de Motzkin.