

Opérades, séries et combinatoire

Samuele Giraudo

LIGM, Université Paris-Est Marne-la-Vallée

Séminaire ALGO
GREYC, Caen

23 janvier 2018

Plan

Combinatoire et opérations

Opérades et séries

Grammaires à bourgeons

Plan

Combinatoire et opérations

Ensembles combinatoires

Un **ensemble combinatoire** est un ensemble C muni d'une application

$$| - | : C \rightarrow \mathbb{N}$$

telle que toutes les fibres $|n|^{-1}$ sont finies.

Ensembles combinatoires

Un **ensemble combinatoire** est un ensemble C muni d'une application

$$| - | : C \rightarrow \mathbb{N}$$

telle que toutes les fibres $|n|^{-1}$ sont finies.

On appelle $|x|$ la **taille** de x pour tout $x \in C$.

Ensembles combinatoires

Un **ensemble combinatoire** est un ensemble C muni d'une application

$$| - | : C \rightarrow \mathbb{N}$$

telle que toutes les fibres $|n|^{-1}$ sont finies.

On appelle $|x|$ la **taille** de x pour tout $x \in C$.

L'ensemble (fini) des éléments de C de taille n est noté $C(n)$.

Ensembles combinatoires

Un **ensemble combinatoire** est un ensemble C muni d'une application

$$|-| : C \rightarrow \mathbb{N}$$

telle que toutes les fibres $|n|^{-1}$ sont finies.

On appelle $|x|$ la **taille** de x pour tout $x \in C$.

L'ensemble (fini) des éléments de C de taille n est noté $C(n)$.

Exemple

Soit $\mathfrak{S}$ l'ensemble combinatoire des permutations où la taille d'une permutation est sa longueur en tant que mot.

Ensembles combinatoires

Un **ensemble combinatoire** est un ensemble C muni d'une application

$$| - | : C \rightarrow \mathbb{N}$$

telle que toutes les fibres $|n|^{-1}$ sont finies.

On appelle $|x|$ la **taille** de x pour tout $x \in C$.

L'ensemble (fini) des éléments de C de taille n est noté $C(n)$.

Exemple

Soit $\mathfrak{S}$ l'ensemble combinatoire des permutations où la taille d'une permutation est sa longueur en tant que mot.

Ainsi,

$$\mathfrak{S}(0) = \{\epsilon\},$$

$$\mathfrak{S}(1) = \{1\},$$

$$\mathfrak{S}(2) = \{12, 21\},$$

$$\mathfrak{S}(3) = \{123, 132, 213, 231, 312, 321\},$$

...

$$\mathfrak{S}(n) = \{12 \dots n, \dots, n \dots 21\}.$$

Combinatoire et questions

Soit C un ensemble combinatoire.

Questions classiques :

- ▶ compter les objets de C de taille n ;

Exemple

Le nombre d'objets de $\mathfrak{S}$ de taille n est $n!$.

Combinatoire et questions

Soit C un ensemble combinatoire.

Questions classiques :

- ▶ compter les objets de C de taille n ;
- ▶ engendrer tous les objets de C de taille n ;

Exemple

Le nombre d'objets de $\mathfrak{S}$ de taille n est $n!$.

Combinatoire et questions

Soit C un ensemble combinatoire.

Questions classiques :

- ▶ compter les objets de C de taille n ;
- ▶ engendrer tous les objets de C de taille n ;
- ▶ engendrer aléatoirement un objet de C de taille n (suivant une distribution donnée);

Exemple

Le nombre d'objets de $\mathfrak{S}$ de taille n est $n!$.

Combinatoire et questions

Soit C un ensemble combinatoire.

Questions classiques :

- ▶ compter les objets de C de taille n ;
- ▶ engendrer tous les objets de C de taille n ;
- ▶ engendrer aléatoirement un objet de C de taille n (suivant une distribution donnée);
- ▶ mettre en relation C avec d'autres ensembles combinatoires D ;

Exemple

Le nombre d'objets de $\mathfrak{S}$ de taille n est $n!$.

Combinatoire et questions

Soit $\mathcal{C}$ un ensemble combinatoire.

Questions classiques :

- ▶ compter les objets de $\mathcal{C}$ de taille n ;
- ▶ engendrer tous les objets de $\mathcal{C}$ de taille n ;
- ▶ engendrer aléatoirement un objet de $\mathcal{C}$ de taille n (suivant une distribution donnée);
- ▶ mettre en relation $\mathcal{C}$ avec d'autres ensembles combinatoires $\mathcal{D}$;
- ▶ définir des statistiques sur $\mathcal{C}$, c.-à-d. des fonctions $s : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{N}$.

Exemple

Le nombre d'objets de $\mathfrak{S}$ de taille n est $n!$.

Une descente dans une permutation σ est une position i telle que $\sigma(i) > \sigma(i+1)$.

La fonction s qui envoie une permutation sur son nombre de descentes est une statistique de $\mathfrak{S}$. Par exemple, $s(3\overline{5}14\overline{2}) = 2$.

Point de vue algébrique

Idée principale

Pour comprendre un ensemble combinatoire C , le munir d'opérations.

Point de vue algébrique

Idée principale

Pour comprendre un ensemble combinatoire $\mathcal{C}$, le munir d'opérations.

L'étude de $\mathcal{C}$ en tant que structure algébrique $\mathcal{C}$ où $\mathcal{C}$ peut être

- ▶ l'ensemble $\mathcal{C}$ lui-même;
- ▶ l'espace vectoriel $\mathbb{K} \langle \mathcal{C} \rangle$ engendré par $\mathcal{C}$;
- ▶ l'espace des séries $\mathbb{K} \langle\langle \mathcal{C} \rangle\rangle$ sur $\mathcal{C}$;

mène à la découverte de propriétés sur ses objets.

Point de vue algébrique

Idée principale

Pour comprendre un ensemble combinatoire $\mathcal{C}$, le munir d'opérations.

L'étude de $\mathcal{C}$ en tant que structure algébrique $\mathcal{C}$ où $\mathcal{C}$ peut être

- ▶ l'ensemble $\mathcal{C}$ lui-même;
- ▶ l'espace vectoriel $\mathbb{K}\langle\mathcal{C}\rangle$ engendré par $\mathcal{C}$;
- ▶ l'espace des séries $\mathbb{K}\langle\langle\mathcal{C}\rangle\rangle$ sur $\mathcal{C}$;

mène à la découverte de propriétés sur ses objets.

En particulier,

1. changements de base dans $\mathcal{C}$

↪ reformulations alternatives d'opérations;

Point de vue algébrique

Idée principale

Pour comprendre un ensemble combinatoire $\mathcal{C}$, le munir d'opérations.

L'étude de $\mathcal{C}$ en tant que structure algébrique $\mathcal{C}$ où $\mathcal{C}$ peut être

- ▶ l'ensemble $\mathcal{C}$ lui-même;
- ▶ l'espace vectoriel $\mathbb{K} \langle \mathcal{C} \rangle$ engendré par $\mathcal{C}$;
- ▶ l'espace des séries $\mathbb{K} \langle\langle \mathcal{C} \rangle\rangle$ sur $\mathcal{C}$;

mène à la découverte de propriétés sur ses objets.

En particulier,

1. changements de base dans $\mathcal{C}$

↪ reformulations alternatives d'opérations;

2. ensembles de générateurs minimaux de $\mathcal{C}$

↪ mise en évidence de pièces élémentaires de construction;

Point de vue algébrique

Idée principale

Pour comprendre un ensemble combinatoire $\mathcal{C}$, le munir d'opérations.

L'étude de $\mathcal{C}$ en tant que structure algébrique $\mathcal{C}$ où $\mathcal{C}$ peut être

- ▶ l'ensemble $\mathcal{C}$ lui-même;
- ▶ l'espace vectoriel $\mathbb{K} \langle \mathcal{C} \rangle$ engendré par $\mathcal{C}$;
- ▶ l'espace des séries $\mathbb{K} \langle\langle \mathcal{C} \rangle\rangle$ sur $\mathcal{C}$;

mène à la découverte de propriétés sur ses objets.

En particulier,

1. changements de base dans $\mathcal{C}$

↪ reformulations alternatives d'opérations;

2. ensembles de générateurs minimaux de $\mathcal{C}$

↪ mise en évidence de pièces élémentaires de construction;

3. morphismes impliquant $\mathcal{C}$

↪ algorithmes de transformation et révélation de symétries.

Séries formelles

Soient $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{Q}(q_0, q_1, q_2, \dots)$ et X un ensemble (combinatoire).

Séries formelles

Soient $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{Q}(q_0, q_1, q_2, \dots)$ et X un ensemble (combinatoire).

Une X -série est une application

$$\mathbf{f} : X \rightarrow \mathbb{K}.$$

Séries formelles

Soient $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{Q}(q_0, q_1, q_2, \dots)$ et X un ensemble (combinatoire).

Une X -série est une application

$$\mathbf{f} : X \rightarrow \mathbb{K}.$$

Le coefficient $\mathbf{f}(x)$ de $x \in X$ dans $\mathbf{f}$ est noté par $\langle x, \mathbf{f} \rangle$.

Séries formelles

Soient $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{Q}(q_0, q_1, q_2, \dots)$ et X un ensemble (combinatoire).

Une X -série est une application

$$\mathbf{f} : X \rightarrow \mathbb{K}.$$

Le coefficient $\mathbf{f}(x)$ de $x \in X$ dans $\mathbf{f}$ est noté par $\langle x, \mathbf{f} \rangle$.

L'ensemble de toutes les X -séries est $\mathbb{K} \langle\langle X \rangle\rangle$.

Séries formelles

Soient $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{Q}(q_0, q_1, q_2, \dots)$ et X un ensemble (combinatoire).

Une X -série est une application

$$\mathbf{f} : X \rightarrow \mathbb{K}.$$

Le coefficient $\mathbf{f}(x)$ de $x \in X$ dans $\mathbf{f}$ est noté par $\langle x, \mathbf{f} \rangle$.

L'ensemble de toutes les X -séries est $\mathbb{K} \langle\langle X \rangle\rangle$.

Muni de l'addition point par point

$$\langle x, \mathbf{f} + \mathbf{g} \rangle := \langle x, \mathbf{f} \rangle + \langle x, \mathbf{g} \rangle$$

et de la multiplication par un scalaire

$$\langle x, \lambda \mathbf{f} \rangle := \lambda \langle x, \mathbf{f} \rangle,$$

l'ensemble $\mathbb{K} \langle\langle X \rangle\rangle$ est un espace vectoriel.

Séries formelles

Soient $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{Q}(q_0, q_1, q_2, \dots)$ et X un ensemble (combinatoire).

Une X -série est une application

$$\mathbf{f} : X \rightarrow \mathbb{K}.$$

Le coefficient $\mathbf{f}(x)$ de $x \in X$ dans $\mathbf{f}$ est noté par $\langle x, \mathbf{f} \rangle$.

L'ensemble de toutes les X -séries est $\mathbb{K} \langle\langle X \rangle\rangle$.

Muni de l'addition point par point

$$\langle x, \mathbf{f} + \mathbf{g} \rangle := \langle x, \mathbf{f} \rangle + \langle x, \mathbf{g} \rangle$$

et de la multiplication par un scalaire

$$\langle x, \lambda \mathbf{f} \rangle := \lambda \langle x, \mathbf{f} \rangle,$$

l'ensemble $\mathbb{K} \langle\langle X \rangle\rangle$ est un espace vectoriel.

La notation somme de $\mathbf{f}$ est

$$\mathbf{f} = \sum_{x \in X} \langle x, \mathbf{f} \rangle x.$$

Séries formelles et structures algébriques

Quand X est une **structure algébrique**, ses opérations s'étendent aux X -séries. Si

$$\star : X^k \rightarrow X$$

est un produit d'arité k sur X , on obtient le produit $\bar{\star}$ sur $\mathbb{K} \langle\langle X \rangle\rangle$ défini par

$$\langle x, \bar{\star}(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_k) \rangle := \sum_{\substack{y_1, \dots, y_k \in X \\ x = \star(y_1, \dots, y_k)}} \prod_{1 \leq i \leq k} \langle y_i, \mathbf{f}_i \rangle.$$

Séries formelles et structures algébriques

Quand X est une **structure algébrique**, ses opérations s'étendent aux X -séries. Si

$$\star : X^k \rightarrow X$$

est un produit d'arité k sur X , on obtient le produit $\bar{\star}$ sur $\mathbb{K} \langle\langle X \rangle\rangle$ défini par

$$\langle x, \bar{\star}(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_k) \rangle := \sum_{\substack{y_1, \dots, y_k \in X \\ x = \star(y_1, \dots, y_k)}} \prod_{1 \leq i \leq k} \langle y_i, \mathbf{f}_i \rangle.$$

Exemple

Un produit binaire $\star : X \times X \rightarrow X$ donne lieu au produit (partiellement défini)

$$\mathbf{f} \bar{\star} \mathbf{g} := \sum_{x, y \in X} \langle x, \mathbf{f} \rangle \langle y, \mathbf{g} \rangle x \star y$$

sur $\mathbb{K} \langle\langle X \rangle\rangle$.

Séries formelles et structures algébriques

Voici quelques exemples de séries sur des structures algébriques classiques.

Structure sur X	Séries
$(\mathbb{N}, +, 0)$	Séries habituelles $(\mathbb{K}[[t]])$
Monoïde libre comm.	Séries multivariées $(\mathbb{K}[[t_1, t_2, \dots]])$
Monoïde libre	Séries non comm. $(\mathbb{K}\langle\langle t_1, t_2, \dots \rangle\rangle)$ [Eilenberg, 1974]
Monoïde	Séries sur monoïdes [Salomaa, Soittola, 1978]
Opérade	Séries sur opérades [Chapoton, 2002, 2008]

Séries génératrices

Soit C un ensemble combinatoire.

La **série caractéristique** de C est la C -série

$$\mathbf{f}_C := \sum_{x \in C} x.$$

Séries génératrices

Soit C un ensemble combinatoire.

La **série caractéristique** de C est la C -série

$$\mathbf{f}_C := \sum_{x \in C} x.$$

Soit

$$\text{ev} : \mathbb{K} \langle\langle C \rangle\rangle \rightarrow \mathbb{K} \langle\langle t \rangle\rangle$$

l'application linéaire définie par

$$\text{ev}(x) := t^{|x|}.$$

Séries génératrices

Soit C un ensemble combinatoire.

La **série caractéristique** de C est la C -série

$$\mathbf{f}_C := \sum_{x \in C} x.$$

Soit

$$\text{ev} : \mathbb{K} \langle\langle C \rangle\rangle \rightarrow \mathbb{K} \langle\langle t \rangle\rangle$$

l'application linéaire définie par

$$\text{ev}(x) := t^{|x|}.$$

On a

$$\text{ev}(\mathbf{f}_C) = \sum_{x \in C} t^{|x|} = \mathcal{G}_C(t)$$

où $\mathcal{G}_C(t)$ est la série génératrice de C .

Séries génératrices

Soit C un ensemble combinatoire.

La **série caractéristique** de C est la C -série

$$\mathbf{f}_C := \sum_{x \in C} x.$$

Soit

$$\text{ev} : \mathbb{K} \langle\langle C \rangle\rangle \rightarrow \mathbb{K} \langle\langle t \rangle\rangle$$

l'application linéaire définie par

$$\text{ev}(x) := t^{|x|}.$$

On a

$$\text{ev}(\mathbf{f}_C) = \sum_{x \in C} t^{|x|} = \mathcal{G}_C(t)$$

où $\mathcal{G}_C(t)$ est la série génératrice de C .

Idée

Munir C d'opérations en vue d'exprimer $\mathbf{f}_C$ et de dénombrer ses éléments.

Exemple : séries sur les chemins

Un **chemin** est un élément de $\bigsqcup_{n \geq 1} \mathbb{N}^n$.

Exemple : séries sur les chemins

Un **chemin** est un élément de $\bigsqcup_{n \geq 1} \mathbb{N}^n$.

Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble (non combinatoire) de tous les chemins où la taille d'un chemin $u_1 \dots u_n$ est $n - 1$.

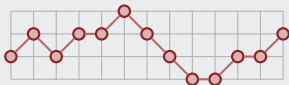
Exemple : séries sur les chemins

Un **chemin** est un élément de $\bigsqcup_{n \geq 1} \mathbb{N}^n$.

Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble (non combinatoire) de tous les chemins où la taille d'un chemin $u_1 \dots u_n$ est $n - 1$.

Exemple

Le chemin 1212232100112 est représenté par



et est de taille 12.

Exemple : séries sur les chemins

Soit $\star$ le produit binaire sur $\mathcal{P}$ défini par

$$u_1 \dots u_n \star v_1 \dots v_m :=$$

$$\uparrow_{\max(0, v_1 - u_n)} (u_1 \dots u_{n-1}) \max(u_n, v_1) \uparrow_{\max(0, u_n - v_1)} (v_2 \dots v_m)$$

où $\uparrow_i(w)$ désigne le mot obtenu en incrémentant de i chaque lettre de w .

Exemple : séries sur les chemins

Soit $\star$ le produit binaire sur $\mathcal{P}$ défini par

$$u_1 \dots u_n \star v_1 \dots v_m :=$$

$$\uparrow_{\max(0, v_1 - u_n)} (u_1 \dots u_{n-1}) \max(u_n, v_1) \uparrow_{\max(0, u_n - v_1)} (v_2 \dots v_m)$$

où $\uparrow_i(w)$ désigne le mot obtenu en incrémentant de i chaque lettre de w .

Exemple



Exemple : séries sur les chemins

Soit $\star$ le produit binaire sur $\mathcal{P}$ défini par

$$u_1 \dots u_n \star v_1 \dots v_m :=$$

$$\uparrow_{\max(0, v_1 - u_n)} (u_1 \dots u_{n-1}) \max(u_n, v_1) \uparrow_{\max(0, u_n - v_1)} (v_2 \dots v_m)$$

où $\uparrow_i(w)$ désigne le mot obtenu en incrémentant de i chaque lettre de w .

Exemple



Ce produit est associatif et admet $\bullet$ (le chemin 0) comme unité.

Ainsi, $(\mathcal{P}, \star, \bullet)$ est un monoïde.

Exemple : séries sur les chemins

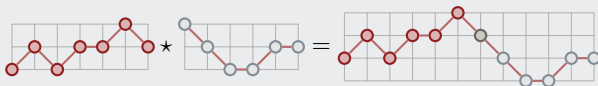
Soit $\star$ le produit binaire sur $\mathcal{P}$ défini par

$$u_1 \dots u_n \star v_1 \dots v_m :=$$

$$\uparrow_{\max(0, v_1 - u_n)} (u_1 \dots u_{n-1}) \max(u_n, v_1) \uparrow_{\max(0, u_n - v_1)} (v_2 \dots v_m)$$

où $\uparrow_i(w)$ désigne le mot obtenu en incrémentant de i chaque lettre de w .

Exemple



Ce produit est associatif et admet $\bullet$ (le chemin 0) comme unité.

Ainsi, $(\mathcal{P}, \star, \bullet)$ est un monoïde.

La $\star$ -**étoile de Kleene** d'un sous-ensemble X de $\mathcal{P}$ est

$$X^{\star\star} := \bigsqcup_{\ell \geq 0} \underbrace{X \star \dots \star X}_{\times \ell}.$$

Exemple : séries sur les chemins

Soit **Schr** le sous-ensemble de $\left\{ \begin{array}{c} \circ \\ \diagup \diagdown \\ \circ \end{array} , \circ - \circ - \circ , \begin{array}{c} \circ \\ \diagup \diagdown \\ \circ \end{array} \right\}^{**}$ des chemins débutant et finissant par 0. On les appelle **chemins de Schröder**.

Exemple : séries sur les chemins

Soit **Schr** le sous-ensemble de $\left\{ \begin{array}{c} \circ \\ \square \end{array} \circ, \circ - \circ - \circ, \begin{array}{c} \circ \\ \square \end{array} \circ \right\}^{**}$ des chemins débutant et finissant par 0. On les appelle **chemins de Schröder**.

L'ensemble **Schr** forme un sous-monoïde de $\mathcal{P}$.

Exemple : séries sur les chemins

Soit **Schr** le sous-ensemble de $\left\{ \begin{array}{c} \circ \\ \square \end{array} \circ, \circ - \circ - \circ, \begin{array}{c} \circ \\ \square \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \square \end{array} \right\}^{**}$ des chemins débutant et finissant par 0. On les appelle **chemins de Schröder**.

L'ensemble **Schr** forme un sous-monoïde de $\mathcal{P}$.

La série caractéristique de **Schr** est

$$f_{\text{Schr}} := \begin{array}{c} \circ \\ \square \end{array} + \circ - \circ - \circ + \begin{array}{c} \circ \\ \square \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \square \end{array} + \circ - \circ - \circ - \circ + \begin{array}{c} \circ \\ \square \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \square \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \square \end{array} + \begin{array}{c} \circ \\ \square \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \square \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \square \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \square \end{array} + \begin{array}{c} \circ \\ \square \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \square \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \square \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \square \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \square \end{array} + \begin{array}{c} \circ \\ \square \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \square \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \square \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \square \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \square \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \square \end{array} + \begin{array}{c} \circ \\ \square \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \square \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \square \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \square \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \square \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \square \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \square \end{array} + \dots$$

Exemple : séries sur les chemins

Soit Schr le sous-ensemble de $\{\text{diagrammes}\}^*$ des chemins débutant et finissant par 0. On les appelle **chemins de Schröder**.

L'ensemble Schr forme un sous-monoïde de $\mathcal{P}$.

La série caractéristique de Schr est

$$f_{\text{Schr}} := \text{diagramme 1} + \text{diagramme 2} + \text{diagramme 3} + \text{diagramme 4} + \text{diagramme 5} + \text{diagramme 6} + \text{diagramme 7} + \text{diagramme 8} + \text{diagramme 9} + \dots$$

et, en utilisant le produit $\bar{\star}$ sur les $\mathcal{P}$ -séries, on obtient l'équation

$$f_{\text{Schr}} = \text{diagramme 1} + \text{diagramme 2} \bar{\star} f_{\text{Schr}} + \text{diagramme 3} \bar{\star} f_{\text{Schr}} \bar{\star} f_{\text{Schr}}.$$

Exemple : séries sur les chemins

Soit Schr le sous-ensemble de $\{\text{diagrammes}\}^{**}$ des chemins débutant et finissant par 0. On les appelle **chemins de Schröder**.

L'ensemble Schr forme un sous-monoïde de $\mathcal{P}$.

La série caractéristique de Schr est

$$f_{\text{Schr}} := \text{diagramme 1} + \text{diagramme 2} + \text{diagramme 3} + \text{diagramme 4} + \text{diagramme 5} + \text{diagramme 6} + \text{diagramme 7} + \text{diagramme 8} + \text{diagramme 9} + \dots$$

et, en utilisant le produit $\bar{\star}$ sur les $\mathcal{P}$ -séries, on obtient l'équation

$$f_{\text{Schr}} = \text{diagramme 1} + \text{diagramme 2} \bar{\star} f_{\text{Schr}} + \text{diagramme 3} \bar{\star} f_{\text{Schr}} \bar{\star} \text{diagramme 4} \bar{\star} f_{\text{Schr}}.$$

Par évaluation, on obtient que la série génératrice des chemins de Schröder vérifie

$$\mathcal{G}_{\text{Schr}}(t) = 1 + t^2 \mathcal{G}_{\text{Schr}}(t) + t^2 \mathcal{G}_{\text{Schr}}(t)^2.$$

Exemple : séries sur les chemins

Il est possible d'ajouter des paramètres pour raffiner le dénombrement selon des **statistiques**. Ainsi,

$$g_{\text{Schr}} = \circ + q_0 \circ \circ \circ \star g_{\text{Schr}} + q_1 \circ \square \star g_{\text{Schr}} \star \square \circ \star g_{\text{Schr}}$$

est la série formelle des chemins de Schröder où le coefficient d'un chemin u est $q_0^{\alpha_0} q_1^{\alpha_1}$ où α_0 (resp. α_1) est la moitié du nombre de $\circ \circ$ (resp. le nombre de $\circ \square$) qu'il contient.

Exemple : séries sur les chemins

Il est possible d'ajouter des paramètres pour raffiner le dénombrement selon des **statistiques**. Ainsi,

$$g_{\text{Schr}} = \circ + q_0 \circ \circ \circ \star g_{\text{Schr}} + q_1 \circ \begin{array}{|c|} \hline \circ \\ \hline \end{array} \star g_{\text{Schr}} \star \begin{array}{|c|} \hline \circ \\ \hline \end{array} \star g_{\text{Schr}}$$

est la série formelle des chemins de Schröder où le coefficient d'un chemin u est $q_0^{\alpha_0} q_1^{\alpha_1}$ où α_0 (resp. α_1) est la moitié du nombre de $\circ \circ$ (resp. le nombre de $\begin{array}{|c|} \hline \circ \\ \hline \end{array}$) qu'il contient.

Son évaluation est

$$\begin{aligned} \text{ev}(g_{\text{Schr}}) &= 1 + (q_0 + q_1) t^2 + (q_0^2 + 3q_0 q_1 + 2q_1^2) t^4 \\ &\quad + (q_0^3 + 6q_0^2 q_1 + 10q_0 q_1^2 + 5q_1^3) t^6 \\ &\quad + (q_0^4 + 10q_0^3 q_1 + 30q_0^2 q_1^2 + 35q_0 q_1^3 + 14q_1^4) t^8 + \dots \end{aligned}$$

et est telle que la spécialisation $\text{ev}(g_{\text{Schr}})|_{q_1:=1}$ est le triangle **A088617** et $\text{ev}(g_{\text{Schr}})|_{q_0:=1}$ est le triangle **A060693**.

Exemple : séries sur les chemins

Ceci s'applique à d'autres types de chemins :

- les chemins de Dyck, sous-ensemble Dyck de $\{\text{○} \nearrow \text{○}, \text{○} \searrow \text{○}\}^{**}$ des chemins débutant et finissant par 0. Leur série caractéristique vérifie

$$f_{\text{Dyck}} = \text{○} + \text{○} \nearrow \bar{f}_{\text{Dyck}} \bar{\searrow} \text{○} \bar{f}_{\text{Dyck}} ;$$

Exemple : séries sur les chemins

Ceci s'applique à d'autres types de chemins :

- ▶ les chemins de Dyck, sous-ensemble Dyck de $\{\text{○} \nearrow \text{○}, \text{○} \searrow \text{○}\}^{**}$ des chemins débutant et finissant par 0. Leur série caractéristique vérifie

$$f_{\text{Dyck}} = \text{○} + \text{○} \nearrow \bar{f}_{\text{Dyck}} \bar{\text{○} \searrow} f_{\text{Dyck}} ;$$

- ▶ les chemins de Motzkin, sous-ensemble Motz de $\{\text{○} \nearrow \text{○}, \text{○} \rightarrow \text{○}, \text{○} \searrow \text{○}\}^{**}$ des chemins débutant et finissant par 0. Leur série caractéristique vérifie

$$f_{\text{Motz}} = \text{○} + \text{○} \rightarrow \bar{f}_{\text{Motz}} + \text{○} \nearrow \bar{f}_{\text{Motz}} \bar{\text{○} \searrow} f_{\text{Motz}} ;$$

Exemple : séries sur les chemins

Ceci s'applique à d'autres types de chemins :

- ▶ les chemins de Dyck, sous-ensemble Dyck de $\{\text{diagramme 1}, \text{diagramme 2}\}^{**}$ des chemins débutant et finissant par 0. Leur série caractéristique vérifie

$$f_{\text{Dyck}} = \text{diagramme 1} + \text{diagramme 2} \star f_{\text{Dyck}} \star \text{diagramme 3} \star f_{\text{Dyck}} ;$$

- ▶ les chemins de Motzkin, sous-ensemble Motz de $\{\text{diagramme 1}, \text{diagramme 2}, \text{diagramme 3}\}^{**}$ des chemins débutant et finissant par 0. Leur série caractéristique vérifie

$$f_{\text{Motz}} = \text{diagramme 1} + \text{diagramme 2} \star f_{\text{Motz}} + \text{diagramme 3} \star f_{\text{Motz}} \star \text{diagramme 4} \star f_{\text{Motz}} ;$$

- ▶ les chemins de Fibonacci, sous-ensemble Fibo de $\{\text{diagramme 1}, \text{diagramme 2}\}^{**}$. Leur série caractéristique vérifie

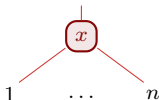
$$f_{\text{Fibo}} = \text{diagramme 1} + \text{diagramme 2} \star f_{\text{Fibo}} + \text{diagramme 3} \star f_{\text{Fibo}} .$$

Plan

Opérades et séries

Opérateurs

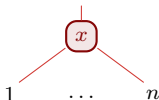
Un **opérateur** est une entité ayant $n \geq 1$ entrées et une sortie.



Son **arité** est son nombre n d'entrées.

Opérateurs

Un **opérateur** est une entité ayant $n \geq 1$ entrées et une sortie.



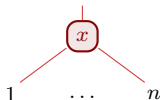
Son **arité** est son nombre n d'entrées.

Composer deux opérateurs x et y consiste à

1. choisir une entrée de x identifiée par sa position i ;
2. greffer la sortie de y sur cette entrée.

Opérateurs

Un **opérateur** est une entité ayant $n \geq 1$ entrées et une sortie.

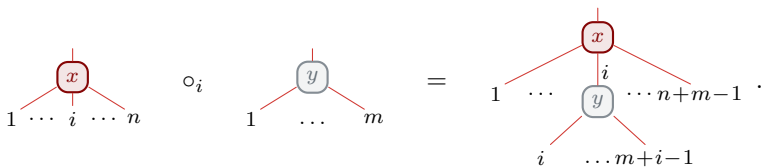


Son **arité** est son nombre n d'entrées.

Composer deux opérateurs x et y consiste à

1. choisir une entrée de x identifiée par sa position i ;
2. greffer la sortie de y sur cette entrée.

Ceci produit un nouvel opérateur $x \circ_i y$ d'arité $n + m - 1$:



Opérades

Les opérades sont des structures algébriques formalisant la notion d'opérateur (munis de leur composition).

Opérades

Les opérades sont des structures algébriques formalisant la notion d'opérateur (munis de leur composition).

Une **opérade** (ensembliste non symétrique) est un triplet $(\mathcal{O}, \circ_i, \mathbb{1})$ où

1. $\mathcal{O}$ est un **ensemble gradué**

$$\mathcal{O} := \bigsqcup_{n \geq 1} \mathcal{O}(n) ;$$

Opérades

Les opérades sont des structures algébriques formalisant la notion d'opérateur (munis de leur composition).

Une **opérade** (ensembliste non symétrique) est un triplet $(\mathcal{O}, \circ_i, \mathbb{1})$ où

1. $\mathcal{O}$ est un **ensemble gradué**

$$\mathcal{O} := \bigsqcup_{n \geq 1} \mathcal{O}(n) ;$$

2. $\circ_i$ est une application de **composition partielle**,

$$\circ_i : \mathcal{O}(n) \times \mathcal{O}(m) \rightarrow \mathcal{O}(n + m - 1), \quad n, m \geq 1, i \in [n] ;$$

Opérades

Les opérades sont des structures algébriques formalisant la notion d'opérateur (munis de leur composition).

Une **opérade** (ensembliste non symétrique) est un triplet $(\mathcal{O}, \circ_i, \mathbb{1})$ où

1. $\mathcal{O}$ est un **ensemble gradué**

$$\mathcal{O} := \bigsqcup_{n \geq 1} \mathcal{O}(n) ;$$

2. $\circ_i$ est une application de **composition partielle**,

$$\circ_i : \mathcal{O}(n) \times \mathcal{O}(m) \rightarrow \mathcal{O}(n + m - 1), \quad n, m \geq 1, i \in [n] ;$$

3. $\mathbb{1}$ est un élément de $\mathcal{O}(1)$, appelé **unité**.

Opérades

Les opérades sont des structures algébriques formalisant la notion d'opérateur (munis de leur composition).

Une **opérade** (ensembliste non symétrique) est un triplet $(\mathcal{O}, \circ_i, \mathbb{1})$ où

1. $\mathcal{O}$ est un **ensemble gradué**

$$\mathcal{O} := \bigsqcup_{n \geq 1} \mathcal{O}(n) ;$$

2. $\circ_i$ est une application de **composition partielle**,

$$\circ_i : \mathcal{O}(n) \times \mathcal{O}(m) \rightarrow \mathcal{O}(n + m - 1), \quad n, m \geq 1, i \in [n] ;$$

3. $\mathbb{1}$ est un élément de $\mathcal{O}(1)$, appelé **unité**.

Ces objets doivent vérifier des axiomes.

Axiomes des opérades

Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$

$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$

$$i \in [n], j \in [m]$$

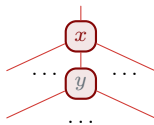
Axiomes des opérades

Associativité :

$$(x \circ_i y)$$

$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$

$$i \in [n], j \in [m]$$



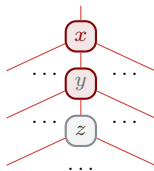
Axiomes des opérades

Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z$$

$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$

$$i \in [n], j \in [m]$$



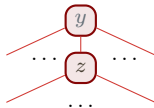
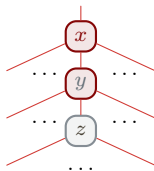
Axiomes des opérades

Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z \quad (y \circ_j z)$$

$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$

$$i \in [n], j \in [m]$$



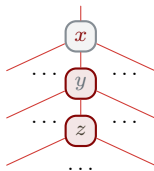
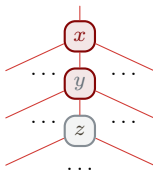
Axiomes des opérades

Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$

$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$

$$i \in [n], j \in [m]$$



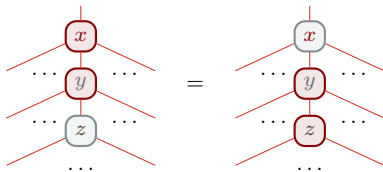
Axiomes des opérades

Associativité :

$$(\mathbf{x} \circ_i \mathbf{y}) \circ_{i+j-1} \mathbf{z} = \mathbf{x} \circ_i (\mathbf{y} \circ_j \mathbf{z})$$

$$\mathbf{x} \in \mathcal{O}(n), \mathbf{y} \in \mathcal{O}(m), \mathbf{z} \in \mathcal{O}$$

$$i \in [n], j \in [m]$$



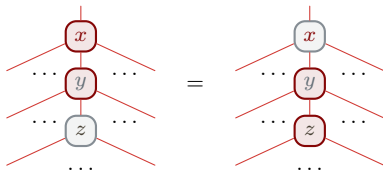
Axiomes des opérades

Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$

$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$

$$i \in [n], j \in [m]$$



Commutativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{j+m-1} z = (x \circ_j z) \circ_i y$$

$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$

$$1 \leq i < j \leq n$$

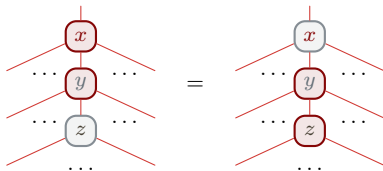
Axiomes des opérades

Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$

$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$

$$i \in [n], j \in [m]$$

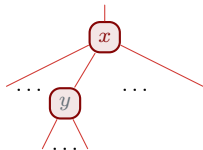


Commutativité :

$$(x \circ_i y)$$

$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$

$$1 \leq i < j \leq n$$



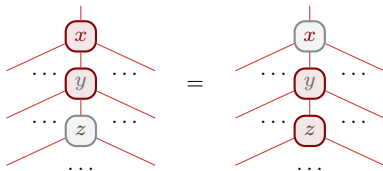
Axiomes des opérades

Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$

$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$

$$i \in [n], j \in [m]$$

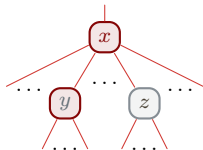


Commutativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{j+m-1} z$$

$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$

$$1 \leq i < j \leq n$$



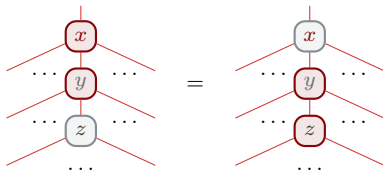
Axiomes des opérades

Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$

$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$

$$i \in [n], j \in [m]$$



Commutativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{j+m-1} z = (x \circ_j z)$$

$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$

$$1 \leq i < j \leq n$$



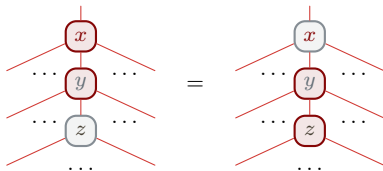
Axiomes des opérades

Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$

$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$

$$i \in [n], j \in [m]$$

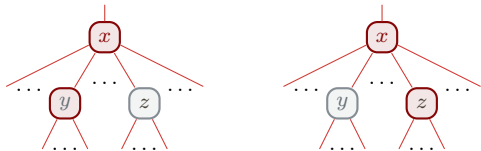


Commutativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{j+m-1} z = (x \circ_j z) \circ_i y$$

$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$

$$1 \leq i < j \leq n$$



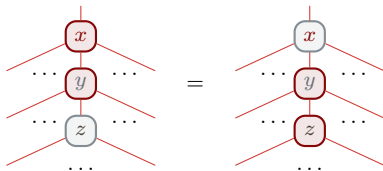
Axiomes des opérades

Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$

$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$

$$i \in [n], j \in [m]$$

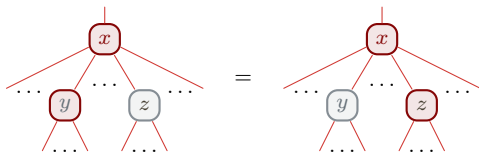


Commutativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{j+m-1} z = (x \circ_j z) \circ_i y$$

$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$

$$1 \leq i < j \leq n$$



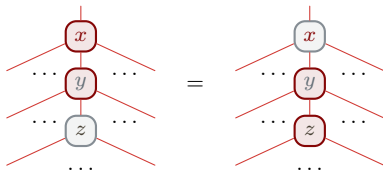
Axiomes des opérades

Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$

$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$

$$i \in [n], j \in [m]$$

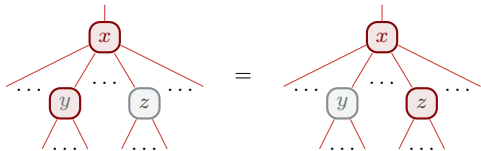


Commutativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{j+m-1} z = (x \circ_j z) \circ_i y$$

$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$

$$1 \leq i < j \leq n$$



Unitalité :

$$1 \circ_1 x = x = x \circ_i 1$$

$$x \in \mathcal{O}(n)$$

$$i \in [n]$$

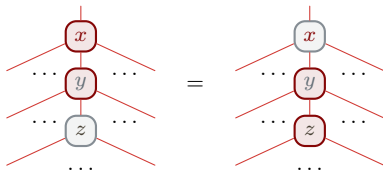
Axiomes des opérades

Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$

$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$

$$i \in [n], j \in [m]$$

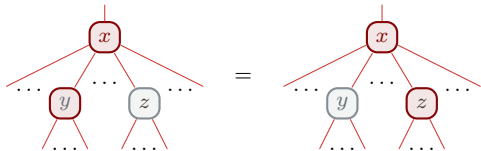


Commutativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{j+m-1} z = (x \circ_j z) \circ_i y$$

$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$

$$1 \leq i < j \leq n$$

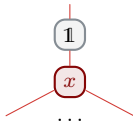


Unitalité :

$$1 \circ_1 x$$

$$x \in \mathcal{O}(n)$$

$$i \in [n]$$



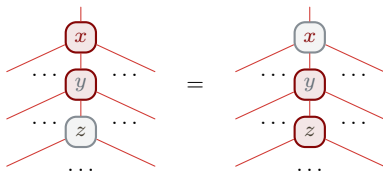
Axiomes des opérades

Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$

$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$

$$i \in [n], j \in [m]$$

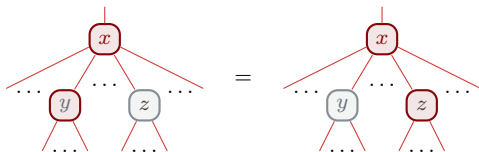


Commutativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{j+m-1} z = (x \circ_j z) \circ_i y$$

$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$

$$1 \leq i < j \leq n$$



Unitalité :

$$1 \circ_1 x = x$$

$$x \in \mathcal{O}(n)$$

$$i \in [n]$$



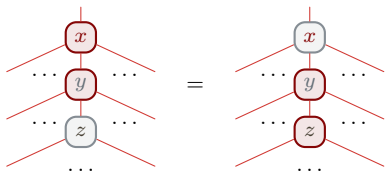
Axiomes des opérades

Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$

$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$

$$i \in [n], j \in [m]$$

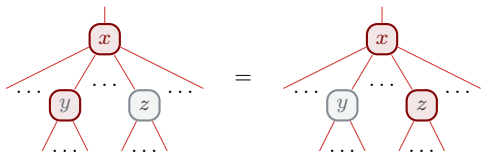


Commutativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{j+m-1} z = (x \circ_j z) \circ_i y$$

$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$

$$1 \leq i < j \leq n$$

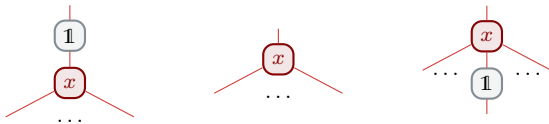


Unitalité :

$$1 \circ_1 x = x = x \circ_i 1$$

$$x \in \mathcal{O}(n)$$

$$i \in [n]$$



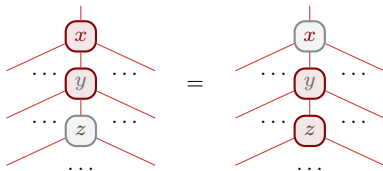
Axiomes des opérades

Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$

$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$

$$i \in [n], j \in [m]$$

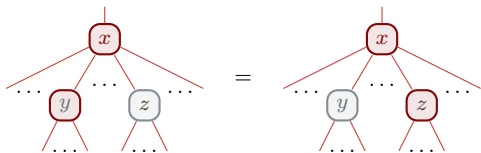


Commutativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{j+m-1} z = (x \circ_j z) \circ_i y$$

$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$

$$1 \leq i < j \leq n$$

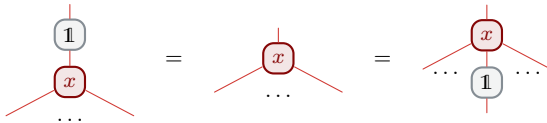


Unitalité :

$$1 \circ_1 x = x = x \circ_i 1$$

$$x \in \mathcal{O}(n)$$

$$i \in [n]$$



Composition complète

Soit $\mathcal{O}$ une opérade.

L'application de **composition complète** de $\mathcal{O}$ est l'application

$$\circ : \mathcal{O}(n) \times \mathcal{O}(m_1) \times \cdots \times \mathcal{O}(m_n) \rightarrow \mathcal{O}((m_1 + \cdots + m_n))$$

définie par

$$x \circ [y_1, \dots, y_n] := (\dots ((x \circ_n y_n) \circ_{n-1} y_{n-1}) \dots) \circ_1 y_1.$$

Composition complète

Soit $\mathcal{O}$ une opérade.

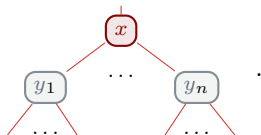
L'application de **composition complète** de $\mathcal{O}$ est l'application

$$\circ : \mathcal{O}(n) \times \mathcal{O}(m_1) \times \cdots \times \mathcal{O}(m_n) \rightarrow \mathcal{O}((m_1 + \cdots + m_n))$$

définie par

$$x \circ [y_1, \dots, y_n] := (\dots ((x \circ_n y_n) \circ_{n-1} y_{n-1}) \dots) \circ_1 y_1.$$

Ainsi, $x \circ [y_1, \dots, y_n]$ est l'opérateur

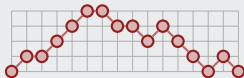


Une opérade de chemins de Motzkin

Soit **Motz** l'opérade dans laquelle :

- **Motz**(n) est l'ensemble des chemins de Motzkin de taille $n - 1$.

Exemple



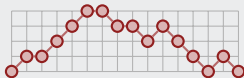
chemin de Motzkin d'arité 16.

Une opérade de chemins de Motzkin

Soit **Motz** l'opérade dans laquelle :

- **Motz**(n) est l'ensemble des chemins de Motzkin de taille $n - 1$.

Exemple



chemin de Motzkin d'arité 16.

- La composition partielle $x \circ_i y$ se calcule en remplaçant le i^{e} point de x par une copie de y .

Exemple

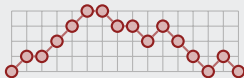


Une opérade de chemins de Motzkin

Soit **Motz** l'opérade dans laquelle :

- **Motz**(n) est l'ensemble des chemins de Motzkin de taille $n - 1$.

Exemple



chemin de Motzkin d'arité 16.

- La composition partielle $x \circ_i y$ se calcule en remplaçant le i^{e} point de x par une copie de y .

Exemple



- L'unité est $\circ$.

Opérades libres

Soit $\mathfrak{G} := \sqcup_{n \geq 1} \mathfrak{G}(n)$ un ensemble gradué.

Opérades libres

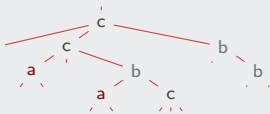
Soit $\mathfrak{G} := \sqcup_{n \geq 1} \mathfrak{G}(n)$ un ensemble gradué.

L'opérade libre sur $\mathfrak{G}$ est l'opérade $\mathbf{FO}(\mathfrak{G})$ dans laquelle :

- $\mathbf{FO}(\mathfrak{G})(n)$ est l'ensemble des arbres syntaxiques sur $\mathfrak{G}$ avec n feuilles.

Exemple

Soit $\mathfrak{G} := \mathfrak{G}(2) \sqcup \mathfrak{G}(3)$ avec $\mathfrak{G}(2) := \{a, b\}$ et $\mathfrak{G}(3) := \{c\}$.



arbre syntaxique sur $\mathfrak{G}$ d'arité 12.

Opérades libres

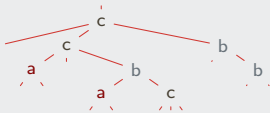
Soit $\mathfrak{G} := \sqcup_{n \geq 1} \mathfrak{G}(n)$ un ensemble gradué.

L'opérade libre sur $\mathfrak{G}$ est l'opérade $\mathbf{FO}(\mathfrak{G})$ dans laquelle :

- $\mathbf{FO}(\mathfrak{G})(n)$ est l'ensemble des arbres syntaxiques sur $\mathfrak{G}$ avec n feuilles.

Exemple

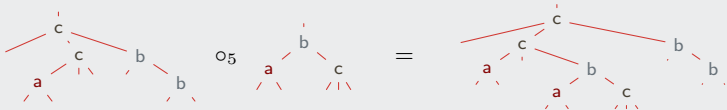
Soit $\mathfrak{G} := \mathfrak{G}(2) \sqcup \mathfrak{G}(3)$ avec $\mathfrak{G}(2) := \{a, b\}$ et $\mathfrak{G}(3) := \{c\}$.



arbre syntaxique sur $\mathfrak{G}$ d'arité 12.

- La composition partielle est une greffe d'arbres.

Exemple



Opérades libres

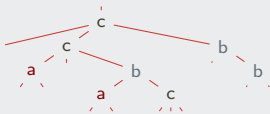
Soit $\mathfrak{G} := \sqcup_{n \geq 1} \mathfrak{G}(n)$ un ensemble gradué.

L'opérade libre sur $\mathfrak{G}$ est l'opérade $\mathbf{FO}(\mathfrak{G})$ dans laquelle :

- $\mathbf{FO}(\mathfrak{G})(n)$ est l'ensemble des arbres syntaxiques sur $\mathfrak{G}$ avec n feuilles.

Exemple

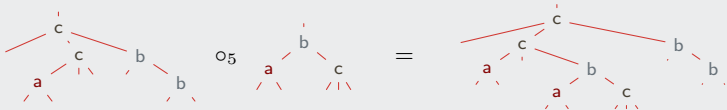
Soit $\mathfrak{G} := \mathfrak{G}(2) \sqcup \mathfrak{G}(3)$ avec $\mathfrak{G}(2) := \{a, b\}$ et $\mathfrak{G}(3) := \{c\}$.



arbre syntaxique sur $\mathfrak{G}$ d'arité 12.

- La composition partielle est une greffe d'arbres.

Exemple



- L'unité est l'arbre $\cdot$ réduit à une feuille.

Séries sur opérades

Il existe plusieurs sortes de séries sur les opérades en fonction des spécificités des opérades considérées :

- ▶ opérades algébriques (et symétriques) [Chapoton, 2002, 2009];
- ▶ opérades algébriques non symétriques [van der Laan, 2004];
- ▶ opérades ensemblistes non symétriques $\mathcal{O}$ avec $\mathcal{O}(1) := \{1\}$ [Frabetti, 2008];
- ▶ opérades algébriques (et symétriques) [Loday, Nikolov, 2013].

Séries sur opérades

Il existe plusieurs sortes de séries sur les opérades en fonction des spécificités des opérades considérées :

- ▶ opérades algébriques (et symétriques) [Chapoton, 2002, 2009];
- ▶ opérades algébriques non symétriques [van der Laan, 2004];
- ▶ opérades ensemblistes non symétriques $\mathcal{O}$ avec $\mathcal{O}(1) := \{1\}$ [Frabetti, 2008];
- ▶ opérades algébriques (et symétriques) [Loday, Nikolov, 2013].

Ici, on considère des séries sur opérades non symétriques (colorées) ensemblistes $\mathcal{O}$ sans condition particulière pour $\mathcal{O}(1)$.

Séries sur opérades

Il existe plusieurs sortes de séries sur les opérades en fonction des spécificités des opérades considérées :

- ▶ opérades algébriques (et symétriques) [Chapoton, 2002, 2009];
- ▶ opérades algébriques non symétriques [van der Laan, 2004];
- ▶ opérades ensemblistes non symétriques $\mathcal{O}$ avec $\mathcal{O}(1) := \{1\}$ [Frabetti, 2008];
- ▶ opérades algébriques (et symétriques) [Loday, Nikolov, 2013].

Ici, on considère des séries sur opérades non symétriques (colorées) ensemblistes $\mathcal{O}$ sans condition particulière pour $\mathcal{O}(1)$.

En plus des $\bar{\sigma}_i$, on considère d'autres opérations sur les séries formelles de $\mathbb{K} \langle\langle \mathcal{O} \rangle\rangle$.

Produit pré-Lie

Soit $\mathcal{O}$ une opérade.

Produit pré-Lie

Soit $\mathcal{O}$ une opérade.

Le **produit pré-Lie** $\mathbf{f} \curvearrowright \mathbf{g}$ de deux séries $\mathbf{f}$ et $\mathbf{g}$ de $\mathbb{K} \langle\langle \mathcal{O} \rangle\rangle$ est défini par

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{f} \curvearrowright \mathbf{g} \rangle := \sum_{\substack{y, z \in \mathcal{O} \\ 1 \leq i \leq |y| \\ \mathbf{x} = y \circ_i z}} \langle y, \mathbf{f} \rangle \langle z, \mathbf{g} \rangle .$$

Produit pré-Lie

Soit $\mathcal{O}$ une opérade.

Le **produit pré-Lie** $\mathbf{f} \curvearrowright \mathbf{g}$ de deux séries $\mathbf{f}$ et $\mathbf{g}$ de $\mathbb{K} \langle\langle \mathcal{O} \rangle\rangle$ est défini par

$$\langle x, \mathbf{f} \curvearrowright \mathbf{g} \rangle := \sum_{\substack{y, z \in \mathcal{O} \\ 1 \leq i \leq |y| \\ x = y \circ_i z}} \langle y, \mathbf{f} \rangle \langle z, \mathbf{g} \rangle.$$

Exemple

Voici un calcul sur des **Mag**-séries, où $\mathbf{Mag} := \mathbf{FO}(\{a\})$, $|a| := 2$:

Propriétés du produit pré-Lie

Le produit pré-Lie $\curvearrowright$ est

- ▶ bilinéaire;
- ▶ défini totalement si les $\mathcal{O}(n)$ sont finis;
- ▶ admet la série $\mathbf{u} := \mathbb{1}$ comme unité à gauche (mais pas à droite).

Propriétés du produit pré-Lie

Le produit pré-Lie $\curvearrowright$ est

- ▶ bilinéaire;
- ▶ défini totalement si les $\mathcal{O}(n)$ sont finis;
- ▶ admet la série $\mathbf{u} := \mathbb{1}$ comme unité à gauche (mais pas à droite).

Proposition [G., 2017]

Le produit pré-Lie vérifie

$$(\mathbf{f} \curvearrowright \mathbf{g}) \curvearrowright \mathbf{h} - \mathbf{f} \curvearrowright (\mathbf{g} \curvearrowright \mathbf{h}) = (\mathbf{f} \curvearrowright \mathbf{h}) \curvearrowright \mathbf{g} - \mathbf{f} \curvearrowright (\mathbf{h} \curvearrowright \mathbf{g}).$$

Ainsi, $(\mathbb{K} \langle \langle \mathcal{O} \rangle \rangle, \curvearrowright)$ est une algèbre pré-Lie.

Étoile pré-Lie

Pour tout $\ell \geq 0$, soit

$$\mathbf{f}^{\curvearrowright \ell} := \begin{cases} \mathbf{u} & \text{si } \ell = 0, \\ \mathbf{f}^{\curvearrowright \ell-1} \curvearrowright \mathbf{f} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Étoile pré-Lie

Pour tout $\ell \geq 0$, soit

$$\mathbf{f}^{\curvearrowright \ell} := \begin{cases} \mathbf{u} & \text{si } \ell = 0, \\ \mathbf{f}^{\curvearrowright \ell-1} \curvearrowright \mathbf{f} & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'étoile pré-Lie de $\mathbf{f}$ est la série sur $\mathcal{C}$

$$\mathbf{f}^{\curvearrowright *} := \sum_{\ell \geq 0} \mathbf{f}^{\curvearrowright \ell}.$$

Étoile pré-Lie

Pour tout $\ell \geq 0$, soit

$$\mathbf{f}^{\curvearrowright \ell} := \begin{cases} \mathbf{u} & \text{si } \ell = 0, \\ \mathbf{f}^{\curvearrowright \ell-1} \curvearrowright \mathbf{f} & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'«étoile pré-Lie» de $\mathbf{f}$ est la série sur $\mathcal{C}$

$$\mathbf{f}^{\curvearrowright *} := \sum_{\ell \geq 0} \mathbf{f}^{\curvearrowright \ell}.$$

Exemple

Voici un calcul sur des **Mag**-séries :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^{\curvearrowright *} &= \mathbf{a} + \mathbf{a} + \mathbf{a} + \mathbf{a} + \mathbf{a} + 2 \mathbf{a} + \mathbf{a} + \mathbf{a} + \mathbf{a} \\ &+ \mathbf{a} + 3 \mathbf{a} + 2 \mathbf{a} + 3 \mathbf{a} + 3 \mathbf{a} + \mathbf{a} + \dots \end{aligned}$$

Les coefficients de cette série se calculent par la **formule des équerres** sur les arbres binaires [Knuth, 1973].

Propriétés de l'étoile pré-Lie

Proposition [G., 2017]

Lorsque $\mathbf{f}$ est une série sur $\mathcal{O}$ telle que $\mathbf{f}^{\curvearrowright*}$ est bien définie, l'équation

$$\mathbf{x} - \mathbf{x} \curvearrowright \mathbf{f} = \mathbf{u}$$

admet comme solution unique $\mathbf{x} = \mathbf{f}^{\curvearrowright*}$ et

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{f}^{\curvearrowright*} \rangle = \delta_{\mathbf{x}, \mathbf{1}} + \sum_{\substack{y, z \in \mathcal{O} \\ i \in [|y|] \\ \mathbf{x} = y \circ_i z}} \langle y, \mathbf{f}^{\curvearrowright*} \rangle \langle z, \mathbf{f} \rangle.$$

Propriétés de l'étoile pré-Lie

Proposition [G., 2017]

Lorsque $\mathbf{f}$ est une série sur $\mathcal{O}$ telle que $\mathbf{f}^{\curvearrowright*}$ est bien définie, l'équation

$$\mathbf{x} - \mathbf{x} \curvearrowright \mathbf{f} = \mathbf{u}$$

admet comme solution unique $\mathbf{x} = \mathbf{f}^{\curvearrowright*}$ et

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{f}^{\curvearrowright*} \rangle = \delta_{\mathbf{x}, \mathbf{1}} + \sum_{\substack{y, z \in \mathcal{O} \\ i \in [|y|] \\ \mathbf{x} = y \circ_i z}} \langle y, \mathbf{f}^{\curvearrowright*} \rangle \langle z, \mathbf{f} \rangle.$$

Théorème [G., 2017]

Lorsque $\mathbf{f}$ est une série sur $\mathcal{O}$ telle que $\mathbf{f}^{\curvearrowright*}$ est bien définie,

$$\mathbf{f}^{\curvearrowright*} = \sum_{\mathbf{t} \in \mathbf{FO}(\text{Supp}(\mathbf{f}))} \frac{\deg(\mathbf{t})!}{\prod_{v \in \mathcal{N}_{\bullet}(\mathbf{t})} \deg(\mathbf{t}_v)} \text{ev}(\mathbf{t}).$$

Ici, $\deg(\mathbf{t})$ est le nombre de nœuds internes de $\mathbf{t}$ et $\text{ev} : \mathbf{FO}(\mathcal{O}) \rightarrow \mathcal{O}$ est le morphisme surjectif d'évaluation.

Analogues de la statistique des équerres

Soient $\mathcal{O}$ une opérade et $\mathfrak{G} \subseteq \mathcal{O}$ une partie génératrice de $\mathcal{O}$.

Soit

$$\mathbf{f}_{\mathfrak{G}} := \sum_{x \in \mathfrak{G}} x.$$

D'après les résultats précédents, le support de $\mathbf{f}_{\mathfrak{G}}^{\curvearrowright*}$ est l'ensemble $\mathcal{O}$.

Analogues de la statistique des équerres

Soient $\mathcal{O}$ une opérade et $\mathfrak{G} \subseteq \mathcal{O}$ une partie génératrice de $\mathcal{O}$.

Soit

$$\mathbf{f}_{\mathfrak{G}} := \sum_{x \in \mathfrak{G}} x.$$

D'après les résultats précédents, le support de $\mathbf{f}_{\mathfrak{G}}^*$ est l'ensemble $\mathcal{O}$.

Les coefficients $\langle x, \mathbf{f}_{\mathfrak{G}}^* \rangle$ définissent une statistique sur les éléments de $\mathcal{O}$ analogues à celle des équerres propre aux arbres.

Analogues de la statistique des équerres

Soient $\mathcal{O}$ une opérade et $\mathfrak{G} \subseteq \mathcal{O}$ une partie génératrice de $\mathcal{O}$.

Soit

$$\mathbf{f}_{\mathfrak{G}} := \sum_{x \in \mathfrak{G}} x.$$

D'après les résultats précédents, le support de $\mathbf{f}_{\mathfrak{G}}^{\curvearrowright*}$ est l'ensemble $\mathcal{O}$.

Les coefficients $\langle x, \mathbf{f}_{\mathfrak{G}}^{\curvearrowright*} \rangle$ définissent une statistique sur les éléments de $\mathcal{O}$ analogues à celle des équerres propre aux arbres.

Exemple

En prenant l'opérade **Motz** des chemins de Motzkin et la partie génératrice $\mathfrak{G} := \{ \text{○} \text{---} \text{○}, \text{○} \text{---} \text{○} \text{---} \text{○} \}$, nous obtenons une statistique type équerres pour les chemins de Motzkin. En effet,

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{\mathfrak{G}}^{\curvearrowright*} = & \text{○} + \text{○} \text{---} \text{○} + 2 \text{○} \text{---} \text{○} \text{---} \text{○} + \text{○} \text{---} \text{○} \text{---} \text{○} \text{---} \text{○} + 6 \text{○} \text{---} \text{○} \text{---} \text{○} \text{---} \text{○} \text{---} \text{○} + 2 \text{○} \text{---} \text{○} \text{---} \text{○} \text{---} \text{○} \text{---} \text{○} + 2 \text{○} \text{---} \text{○} \text{---} \text{○} \text{---} \text{○} \text{---} \text{○} \\ & + \text{○} \text{---} \text{○} \text{---} \text{○} \text{---} \text{○} \text{---} \text{○} + 24 \text{○} \text{---} \text{○} \text{---} \text{○} \text{---} \text{○} \text{---} \text{○} \text{---} \text{○} + 6 \text{○} \text{---} \text{○} \text{---} \text{○} \text{---} \text{○} \text{---} \text{○} \text{---} \text{○} + 6 \text{○} \text{---} \text{○} \text{---} \text{○} \text{---} \text{○} \text{---} \text{○} \text{---} \text{○} + 3 \text{○} \text{---} \text{○} \text{---} \text{○} \text{---} \text{○} \text{---} \text{○} \text{---} \text{○} \\ & + 6 \text{○} \text{---} \text{○} \text{---} \text{○} \text{---} \text{○} \text{---} \text{○} \text{---} \text{○} + 2 \text{○} \text{---} \text{○} \text{---} \text{○} \text{---} \text{○} \text{---} \text{○} \text{---} \text{○} + 3 \text{○} \text{---} \text{○} \text{---} \text{○} \text{---} \text{○} \text{---} \text{○} \text{---} \text{○} + 2 \text{○} \text{---} \text{○} \text{---} \text{○} \text{---} \text{○} \text{---} \text{○} \text{---} \text{○} + \text{○} \text{---} \text{○} \text{---} \text{○} \text{---} \text{○} \text{---} \text{○} \text{---} \text{○} + \dots \end{aligned}$$

Produit de composition

Le produit de composition $\mathbf{f} \odot \mathbf{g}$ de deux séries $\mathbf{f}$ et $\mathbf{g}$ sur $\mathcal{O}$ est défini par

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{f} \odot \mathbf{g} \rangle := \sum_{\substack{y, z_1, \dots, z_{|y|} \in \mathcal{O} \\ \mathbf{x} = y \circ [z_1, \dots, z_{|y|}]}} \langle y, \mathbf{f} \rangle \prod_{1 \leq i \leq |y|} \langle z_i, \mathbf{g} \rangle.$$

Produit de composition

Le **produit de composition** $\mathbf{f} \odot \mathbf{g}$ de deux séries $\mathbf{f}$ et $\mathbf{g}$ sur $\mathcal{O}$ est défini par

$$\langle x, \mathbf{f} \odot \mathbf{g} \rangle := \sum_{\substack{y, z_1, \dots, z_{|y|} \in \mathcal{O} \\ x = y \circ [z_1, \dots, z_{|y|}]}} \langle y, \mathbf{f} \rangle \prod_{1 \leq i \leq |y|} \langle z_i, \mathbf{g} \rangle.$$

Exemple

Voici un calcul sur des **Mag-séries** :

$$\begin{array}{c} \text{a} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{ } \end{array} \odot \left(\begin{array}{c} \text{a} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{ } \end{array} + \begin{array}{c} \text{a} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{ } \quad \text{a} \end{array} \right) = \begin{array}{c} \text{a} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{a} \quad \text{a} \end{array} + \begin{array}{c} \text{a} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{a} \quad \text{a} \quad \text{a} \end{array} \\ + \begin{array}{c} \text{a} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{a} \quad \text{a} \quad \text{a} \end{array} + \begin{array}{c} \text{a} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{a} \quad \text{a} \quad \text{a} \quad \text{a} \end{array}.$$

Propriétés du produit de composition

Le produit de composition $\odot$ est

- ▶ linéaire à gauche (mais pas à droite);
- ▶ défini totalement si les $\mathcal{O}(n)$ sont finis;
- ▶ admet **u** comme unité à gauche et à droite.

Propriétés du produit de composition

Le produit de composition $\odot$ est

- ▶ linéaire à gauche (mais pas à droite);
- ▶ défini totalement si les $\mathcal{O}(n)$ sont finis;
- ▶ admet **u** comme unité à gauche et à droite.

Proposition [G., 2017]

Le produit de composition est associatif.

Ainsi, $(\mathbb{K} \langle \langle \mathcal{O} \rangle \rangle, \odot, \mathbf{u})$ est un monoïde.

Éléments inversibles pour $\odot$

Théorème [G., 2017]

Lorsque $\mathbf{f}$ est une série sur $\mathcal{O}$, les équations

$$\mathbf{f} \odot \mathbf{x} = \mathbf{u} = \mathbf{x} \odot \mathbf{f}$$

admettent toutes deux au plus une solution notée $\mathbf{x} = \mathbf{f}^{\odot -1}$ et, quand celle-ci existe, elle vérifie

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{f}^{\odot -1} \rangle = \sum_{\substack{\mathbf{t} \in \mathbf{FO}(\text{Supp}(\mathbf{f}) \setminus \{1\}) \\ \text{ev}(\mathbf{t}) = \mathbf{x}}} \frac{(-1)^{\deg(\mathbf{t})}}{\langle 1, \mathbf{f} \rangle^{e(\mathbf{t})}} \prod_{v \in \mathcal{N}_{\bullet}(\mathbf{t})} \langle \mathbf{t}(v), \mathbf{f} \rangle.$$

Ici, $e(\mathbf{t})$ est le nombre d'arêtes de $\mathbf{t}$ (en comptant l'arête sortante et les arêtes entrantes).

Éléments inversibles pour $\odot$

Théorème [G., 2017]

Lorsque $\mathbf{f}$ est une série sur $\mathcal{O}$, les équations

$$\mathbf{f} \odot \mathbf{x} = \mathbf{u} = \mathbf{x} \odot \mathbf{f}$$

admettent toutes deux au plus une solution notée $\mathbf{x} = \mathbf{f}^{\odot-1}$ et, quand celle-ci existe, elle vérifie

$$\langle x, \mathbf{f}^{\odot-1} \rangle = \sum_{\substack{\mathbf{t} \in \mathbf{FO}(\text{Supp}(\mathbf{f}) \setminus \{1\}) \\ \text{ev}(\mathbf{t}) = x}} \frac{(-1)^{\deg(\mathbf{t})}}{\langle 1, \mathbf{f} \rangle^{e(\mathbf{t})}} \prod_{v \in \mathcal{N}_{\bullet}(\mathbf{t})} \langle \mathbf{t}(v), \mathbf{f} \rangle.$$

Ici, $e(\mathbf{t})$ est le nombre d'arêtes de $\mathbf{t}$ (en comptant l'arête sortante et les arêtes entrantes).

On appelle $\mathbf{f}^{\odot-1}$ le $\odot$ -inverse de $\mathbf{f}$.

Éléments inversibles pour $\odot$

Théorème [G., 2017]

Lorsque $\mathbf{f}$ est une série sur $\mathcal{O}$, les équations

$$\mathbf{f} \odot \mathbf{x} = \mathbf{u} = \mathbf{x} \odot \mathbf{f}$$

admettent toutes deux au plus une solution notée $\mathbf{x} = \mathbf{f}^{\odot-1}$ et, quand celle-ci existe, elle vérifie

$$\langle x, \mathbf{f}^{\odot-1} \rangle = \sum_{\substack{\mathbf{t} \in \mathbf{FO}(\text{Supp}(\mathbf{f}) \setminus \{\mathbf{1}\}) \\ \text{ev}(\mathbf{t}) = x}} \frac{(-1)^{\deg(\mathbf{t})}}{\langle \mathbf{1}, \mathbf{f} \rangle^{e(\mathbf{t})}} \prod_{v \in \mathcal{N}_{\bullet}(\mathbf{t})} \langle \mathbf{t}(v), \mathbf{f} \rangle.$$

Ici, $e(\mathbf{t})$ est le nombre d'arêtes de $\mathbf{t}$ (en comptant l'arête sortante et les arêtes entrantes).

On appelle $\mathbf{f}^{\odot-1}$ le $\odot$ -inverse de $\mathbf{f}$.

Ainsi, le monoïde $(\mathbb{K} \langle \langle \mathcal{O} \rangle \rangle, \odot)$ contient un sous-groupe (souvent non trivial) formé par les séries qui admettent un $\odot$ -inverse.

Plan

Grammaires à bourgeons

Grammaires de mots

Soit A un alphabet fini partitionné en deux parts

- ▶ V , un ensemble de **variables**;
- ▶ T , un ensemble de **symboles terminaux**.

Grammaires de mots

Soit A un alphabet fini partitionné en deux parts

- ▶ V , un ensemble de **variables**;
- ▶ T , un ensemble de **symboles terminaux**.

Une **règle de production** est un élément (x, u) de $V \times A^*$.

Grammaires de mots

Soit A un alphabet fini partitionné en deux parts

- ▶ V , un ensemble de **variables**;
- ▶ T , un ensemble de **symboles terminaux**.

Une **règle de production** est un élément (x, u) de $V \times A^*$.

Un ensemble P de règles de production se comporte comme une règle de réécriture sur A^* . Si $v, w \in A^*$ et $(x, u) \in P$,

$$v \ x \ w \rightarrow v \ u \ w.$$

Grammaires de mots

Soit A un alphabet fini partitionné en deux parts

- ▶ V , un ensemble de **variables**;
- ▶ T , un ensemble de **symboles terminaux**.

Une **règle de production** est un élément (x, u) de $V \times A^*$.

Un ensemble P de règles de production se comporte comme une règle de réécriture sur A^* . Si $v, w \in A^*$ et $(x, u) \in P$,

$$v \ x \ w \rightarrow v \ u \ w.$$

La clôture réflexive et transitive de $\rightarrow$ est la **relation de dérivation**.

Grammaires de mots

Soit A un alphabet fini partitionné en deux parts

- ▶ V , un ensemble de **variables**;
- ▶ T , un ensemble de **symboles terminaux**.

Une **règle de production** est un élément (x, u) de $V \times A^*$.

Un ensemble P de règles de production se comporte comme une règle de réécriture sur A^* . Si $v, w \in A^*$ et $(x, u) \in P$,

$$v \ x \ w \rightarrow v \ u \ w.$$

La clôture réflexive et transitive de $\rightarrow$ est la **relation de dérivation**.

Exemple

Soient $V := \{x, y\}$, $T := \{a, b, c\}$ et $P := \{(x, b), (x, xay), (y, ac)\}$.

Comme

$$bxx \rightarrow bxayx \rightarrow bbayx \rightarrow bbaacx,$$

le mot $bbaacx$ est dérivable depuis bxx .

Grammaires de mots

Une grammaire non contextuelle G est un quadruplet (V, T, P, s) où

- ▶ V est un ensemble fini de variables;
- ▶ T est un ensemble fini de symboles terminaux;
- ▶ P est un ensemble de règles de production;
- ▶ s est la variable de départ.

Grammaires de mots

Une **grammaire non contextuelle** G est un quadruplet (V, T, P, s) où

- ▶ V est un ensemble fini de **variables**;
- ▶ T est un ensemble fini de **symboles terminaux**;
- ▶ P est un ensemble de **règles de production**;
- ▶ s est la **variable de départ**.

Un mot $u \in (V \sqcup T)^*$ est **engendré** par G si

$$s \rightarrow \cdots \rightarrow u$$

et u ne possède aucune occurrence de variable ($u \in T^*$).

Grammaires de mots

Une **grammaire non contextuelle** G est un quadruplet (V, T, P, s) où

- ▶ V est un ensemble fini de **variables**;
- ▶ T est un ensemble fini de **symboles terminaux**;
- ▶ P est un ensemble de **règles de production**;
- ▶ s est la **variable de départ**.

Un mot $u \in (V \sqcup T)^*$ est **engendré** par G si

$$s \rightarrow \dots \rightarrow u$$

et u ne possède aucune occurrence de variable ($u \in T^*$).

Exemple

Soit G la grammaire non contextuelle où $V := \{x, y\}$, $T := \{a, b, c\}$,
 $P := \{(x, b), (x, xay), (y, ac)\}$ et $s := x$. Comme

$$x \rightarrow xay \rightarrow bay \rightarrow baac,$$

le mot **baac** est engendré par G .

Objectifs

Objectifs :

- ▶ développer des grammaires pour toutes sortes d'objets combinatoires;

Objectifs

Objectifs :

- ▶ développer des grammaires pour toutes sortes d'objets combinatoires;
- ▶ retrouver les grammaires de mots et d'arbres comme cas particuliers;

Objectifs

Objectifs :

- ▶ développer des grammaires pour toutes sortes d'objets combinatoires;
- ▶ retrouver les grammaires de mots et d'arbres comme cas particuliers;
- ▶ considérer des séries formelles pour dénombrer les objets engendrés.

Objectifs

Objectifs :

- ▶ développer des grammaires pour toutes sortes d'objets combinatoires;
- ▶ retrouver les grammaires de mots et d'arbres comme cas particuliers;
- ▶ considérer des séries formelles pour dénombrer les objets engendrés.

Clé

Utiliser les opérades colorées.

Objectifs

Objectifs :

- ▶ développer des grammaires pour toutes sortes d'objets combinatoires;
- ▶ retrouver les grammaires de mots et d'arbres comme cas particuliers;
- ▶ considérer des séries formelles pour dénombrer les objets engendrés.

Clé

Utiliser les **opérades colorées**.

- ▶ Les couleurs jouent le rôle des variables et des symboles terminaux.

Objectifs

Objectifs :

- ▶ développer des grammaires pour toutes sortes d'objets combinatoires;
- ▶ retrouver les grammaires de mots et d'arbres comme cas particuliers;
- ▶ considérer des séries formelles pour dénombrer les objets engendrés.

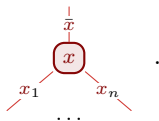
Clé

Utiliser les **opérades colorées**.

- ▶ Les couleurs jouent le rôle des variables et des symboles terminaux.
- ▶ Les séries sur opérades colorées et les produits naturels qu'il est possible de définir forment un outil pour le dénombrement.

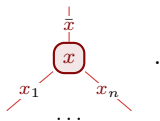
Opérades colorées

Dans une **opérade colorée**, tout élément x d'arité n possède une couleur de sortie $\bar{x}$ et des couleurs d'entrée $x_i, i \in [n]$, prises dans un ensemble $\mathfrak{C}$ de **couleurs** :

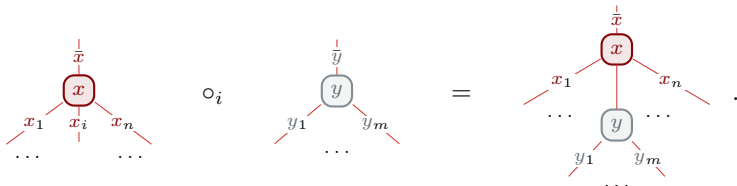


Opérades colorées

Dans une **opérade colorée**, tout élément x d'arité n possède une couleur de sortie $\bar{x}$ et des couleurs d'entrée $x_i, i \in [n]$, prises dans un ensemble $\mathfrak{C}$ de couleurs :

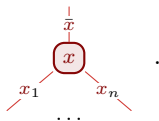


La composition partielle est partiellement définie dans une opérade colorée : $x \circ_i y$ est définie ssi $\bar{y} = x_i$:

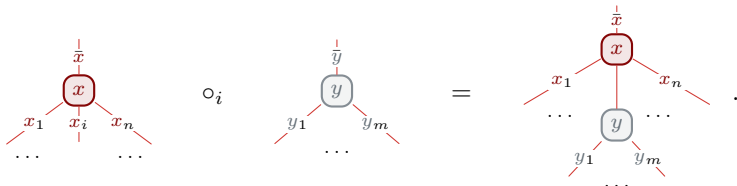


Opérades colorées

Dans une **opérade colorée**, tout élément x d'arité n possède une couleur de sortie $\bar{x}$ et des couleurs d'entrée $x_i, i \in [n]$, prises dans un ensemble $\mathfrak{C}$ de couleurs :



La composition partielle est partiellement définie dans une opérade colorée : $x \circ_i y$ est définie ssi $\bar{y} = x_i$:



Une opérade colorée possède une unité $\mathbb{1}_c$ pour chaque couleur $c \in \mathfrak{C}$.

Opérades à bourgeons

Soient $\mathcal{O}$ une opérade non colorée et $\mathfrak{C}$ un ensemble fini.

L'opérade à bourgeons de $\mathcal{O}$ est l'opérade colorée $B_{\mathfrak{C}}(\mathcal{O})$ telle que

$$B_{\mathfrak{C}}(\mathcal{O})(n) := \mathfrak{C} \times \mathcal{O}(n) \times \mathfrak{C}^n, \quad n \geq 1,$$

telle que

Opérades à bourgeons

Soient $\mathcal{O}$ une opérade non colorée et $\mathfrak{C}$ un ensemble fini.

L'opérade à bourgeons de $\mathcal{O}$ est l'opérade colorée $B_{\mathfrak{C}}(\mathcal{O})$ telle que

$$B_{\mathfrak{C}}(\mathcal{O})(n) := \mathfrak{C} \times \mathcal{O}(n) \times \mathfrak{C}^n, \quad n \geq 1,$$

telle que

- si $(\mathbf{a}, x, u)$ est un élément de $B_{\mathfrak{C}}(\mathcal{O})$, sa couleur de sortie est $\mathbf{a}$ et sa i^{e} couleur d'entrée est u_i ;

Opérades à bourgeons

Soient $\mathcal{O}$ une opérade non colorée et $\mathfrak{C}$ un ensemble fini.

L'opérade à bourgeons de $\mathcal{O}$ est l'opérade colorée $B_{\mathfrak{C}}(\mathcal{O})$ telle que

$$B_{\mathfrak{C}}(\mathcal{O})(n) := \mathfrak{C} \times \mathcal{O}(n) \times \mathfrak{C}^n, \quad n \geq 1,$$

telle que

- ▶ si (a, x, u) est un élément de $B_{\mathfrak{C}}(\mathcal{O})$, sa couleur de sortie est a et sa i^{e} couleur d'entrée est u_i ;
- ▶ si (a, x, u) et (b, y, v) sont deux éléments de $B_{\mathfrak{C}}(\mathcal{O})$ tels que $u_i = b$,

$$(a, x, u) \circ_i (b, y, v) := (a, x \circ_i y, u \leftarrowtail_i v),$$

où $u \leftarrowtail_i v$ est le mot obtenu en remplaçant la i^{e} lettre de u par v .

Opérades à bourgeons

Soient $\mathcal{O}$ une opérade non colorée et $\mathfrak{C}$ un ensemble fini.

L'opérade à bourgeons de $\mathcal{O}$ est l'opérade colorée $B_{\mathfrak{C}}(\mathcal{O})$ telle que

$$B_{\mathfrak{C}}(\mathcal{O})(n) := \mathfrak{C} \times \mathcal{O}(n) \times \mathfrak{C}^n, \quad n \geq 1,$$

telle que

- ▶ si (a, x, u) est un élément de $B_{\mathfrak{C}}(\mathcal{O})$, sa couleur de sortie est a et sa i^{e} couleur d'entrée est u_i ;
- ▶ si (a, x, u) et (b, y, v) sont deux éléments de $B_{\mathfrak{C}}(\mathcal{O})$ tels que $u_i = b$,

$$(a, x, u) \circ_i (b, y, v) := (a, x \circ_i y, u \leftarrowtail_i v),$$

où $u \leftarrowtail_i v$ est le mot obtenu en remplaçant la i^{e} lettre de u par v .

Proposition [G., 2017]

La construction $\mathcal{O} \mapsto B_{\mathfrak{C}}(\mathcal{O})$ est un foncteur de la catégorie des opérades non colorées vers la catégorie des opérades $\mathfrak{C}$ -colorées.

L'opérade à bourgeons de Motz

Pour tout ensemble $\mathfrak{C}$ de couleurs, les éléments de $B_{\mathfrak{C}}(\text{Motz})$ sont des triplets

$$(\mathbf{a}, x, u_1 \dots u_n)$$

avec $\mathbf{a}, u_1, \dots, u_n \in \mathfrak{C}$ et $x \in \text{Motz}(n)$.

L'opérade à bourgeons de Motz

Pour tout ensemble $\mathfrak{C}$ de couleurs, les éléments de $\mathbf{B}_{\mathfrak{C}}(\text{Motz})$ sont des triplets

$$(\mathbf{a}, x, u_1 \dots u_n)$$

avec $\mathbf{a}, u_1, \dots, u_n \in \mathfrak{C}$ et $x \in \text{Motz}(n)$.

Les éléments de $B_c(\text{Motz})$ sont dessinés comme des chemins de Motzkin ayant une couleur de sortie globale et où chaque point possède une couleur d'entrée.

Exemple

L'élément $(1, \text{diagram}, 2212211)$ est représenté par diagram

L'opérade à bourgeons de Motz

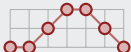
Pour tout ensemble $\mathfrak{C}$ de couleurs, les éléments de $B_{\mathfrak{C}}(\text{Motz})$ sont des triplets

$$(a, x, u_1 \dots u_n)$$

avec $a, u_1, \dots, u_n \in \mathfrak{C}$ et $x \in \text{Motz}(n)$.

Les éléments de $B_{\mathfrak{C}}(\text{Motz})$ sont dessinés comme des chemins de Motzkin ayant une couleur de sortie globale et où chaque point possède une couleur d'entrée.

Exemple

L'élément $\left(1, \text{chemin}, 2212211\right)$ est représenté par .

Exemple

$$\begin{array}{c} 1 \\ \text{chemin} \\ 2 \ 2 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \end{array} \circ_4 \begin{array}{c} 1 \\ \text{chemin} \\ 2 \ 2 \end{array} = \begin{array}{c} 1 \\ \text{chemin} \\ 2 \ 2 \ 1 \ 2 \ 2 \ 1 \ 1 \end{array}$$

Grammaires à bourgeons

Une **grammaire à bourgeons** $\mathcal{B}$ est un quintuplet $(\mathcal{O}, \mathfrak{C}, \mathfrak{R}, I, T)$ où

Grammaires à bourgeons

Une **grammaire à bourgeons** $\mathcal{B}$ est un quintuplet $(\mathcal{O}, \mathfrak{C}, \mathfrak{R}, I, T)$ où

- ▶ $\mathcal{O}$ est une opérade non colorée;

Grammaires à bourgeons

Une **grammaire à bourgeons** $\mathcal{B}$ est un quintuplet $(\mathcal{O}, \mathfrak{C}, \mathfrak{R}, I, T)$ où

- ▶ $\mathcal{O}$ est une opérade non colorée;
- ▶ $\mathfrak{C}$ est un ensemble fini de **couleurs**;

Grammaires à bourgeons

Une **grammaire à bourgeons** $\mathcal{B}$ est un quintuplet $(\mathcal{O}, \mathfrak{C}, \mathfrak{R}, I, T)$ où

- ▶ $\mathcal{O}$ est une opérade non colorée;
- ▶ $\mathfrak{C}$ est un ensemble fini de **couleurs**;
- ▶ $\mathfrak{R}$ est un sous-ensemble fini de $\mathbf{B}_{\mathfrak{C}}(\mathcal{O})$ de **règles de production**;

Grammaires à bourgeons

Une **grammaire à bourgeons** $\mathcal{B}$ est un quintuplet $(\mathcal{O}, \mathfrak{C}, \mathfrak{R}, I, T)$ où

- ▶ $\mathcal{O}$ est une opérade non colorée;
- ▶ $\mathfrak{C}$ est un ensemble fini de **couleurs**;
- ▶ $\mathfrak{R}$ est un sous-ensemble fini de $\mathbf{B}_{\mathfrak{C}}(\mathcal{O})$ de **règles de production**;
- ▶ I est un sous-ensemble de **couleurs initiales** de $\mathfrak{C}$;

Grammaires à bourgeons

Une **grammaire à bourgeons** $\mathcal{B}$ est un quintuplet $(\mathcal{O}, \mathfrak{C}, \mathfrak{R}, I, T)$ où

- ▶ $\mathcal{O}$ est une opérade non colorée;
- ▶ $\mathfrak{C}$ est un ensemble fini de **couleurs**;
- ▶ $\mathfrak{R}$ est un sous-ensemble fini de $\mathbf{B}_{\mathfrak{C}}(\mathcal{O})$ de **règles de production**;
- ▶ I est un sous-ensemble de **couleurs initiales** de $\mathfrak{C}$;
- ▶ T est un sous-ensemble de **couleurs terminales** de $\mathfrak{C}$.

Grammaires à bourgeons

Une **grammaire à bourgeons** $\mathcal{B}$ est un quintuplet $(\mathcal{O}, \mathfrak{C}, \mathfrak{R}, I, T)$ où

- ▶ $\mathcal{O}$ est une opérade non colorée;
- ▶ $\mathfrak{C}$ est un ensemble fini de **couleurs**;
- ▶ $\mathfrak{R}$ est un sous-ensemble fini de $B_{\mathfrak{C}}(\mathcal{O})$ de **règles de production**;
- ▶ I est un sous-ensemble de **couleurs initiales** de $\mathfrak{C}$;
- ▶ T est un sous-ensemble de **couleurs terminales** de $\mathfrak{C}$.

Les grammaires à bourgeons servent à spécifier des ensembles d'éléments de $B_{\mathfrak{C}}(\mathcal{O})$.

Langages

Un ensemble $\mathfrak{R}$ de règles de production décrit une règle de réécriture sur $B_{\mathfrak{C}}(\mathcal{O})$. Pour tous $x, x' \in B_{\mathfrak{C}}(\mathcal{O})$, on pose

$$x \rightarrow x'$$

à condition qu'il existe $i \in \mathbb{N}$ et $r \in \mathfrak{R}$ tels que $x' = x \circ_i r$.

Langages

Un ensemble $\mathfrak{R}$ de règles de production décrit une règle de réécriture sur $B_{\mathfrak{C}}(\mathcal{O})$. Pour tous $x, x' \in B_{\mathfrak{C}}(\mathcal{O})$, on pose

$$x \rightarrow x'$$

à condition qu'il existe $i \in \mathbb{N}$ et $r \in \mathfrak{R}$ tels que $x' = x \circ_i r$.

La clôture réflexive et transitive de $\rightarrow$ est la **relation de dérivation**.

Langages

Un ensemble $\mathfrak{R}$ de règles de production décrit une règle de réécriture sur $B_c(\mathcal{O})$. Pour tous $x, x' \in B_c(\mathcal{O})$, on pose

$$x \rightarrow x'$$

à condition qu'il existe $i \in \mathbb{N}$ et $r \in \mathfrak{R}$ tels que $x' = x \circ_i r$.

La clôture réflexive et transitive de $\rightarrow$ est la **relation de dérivation**.

Un élément $x \in B_c(\mathcal{O})$ est **engendré** par $\mathcal{B}$ si

$$1_c \rightarrow \cdots \rightarrow x$$

où $c \in I$ et toutes les couleurs d'entrée de x sont dans T .

Langages

Un ensemble $\mathfrak{R}$ de règles de production décrit une règle de réécriture sur $B_c(\mathcal{O})$. Pour tous $x, x' \in B_c(\mathcal{O})$, on pose

$$x \rightarrow x'$$

à condition qu'il existe $i \in \mathbb{N}$ et $r \in \mathfrak{R}$ tels que $x' = x \circ_i r$.

La clôture réflexive et transitive de $\rightarrow$ est la **relation de dérivation**.

Un élément $x \in B_c(\mathcal{O})$ est **engendré** par $\mathcal{B}$ si

$$1_c \rightarrow \cdots \rightarrow x$$

où $c \in I$ et toutes les couleurs d'entrée de x sont dans T .

Le **langage** de $\mathcal{B}$ est l'ensemble $L(\mathcal{B})$ des éléments engendrés par $\mathcal{B}$.

Génération de chemins de Motzkin particuliers

Soit la grammaire à bourgeons $\mathcal{B} := (\text{Motz}, \{1, 2\}, \mathfrak{R}, \{1\}, \{1, 2\})$ où

$$\mathfrak{R} := \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ \bullet \text{---} \bullet \\ 2 \quad 2 \end{array}, \begin{array}{c} 1 \\ \bullet \diagup \bullet \diagdown \bullet \\ 1 \quad 1 \quad 1 \end{array} \right\}.$$

Génération de chemins de Motzkin particuliers

Soit la grammaire à bourgeons $\mathcal{B} := (\text{Motz}, \{1, 2\}, \mathfrak{R}, \{1\}, \{1, 2\})$ où

$$\mathfrak{R} := \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ \circ \circ \\ 2 \ 2 \end{array}, \begin{array}{c} 1 \\ \circ \diagup \diagdown \circ \\ 1 \ 1 \ 1 \end{array} \right\}.$$

Exemple

Il y a dans $\mathcal{B}$ les dérivations



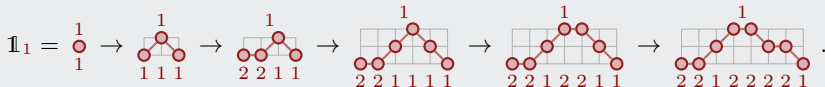
Génération de chemins de Motzkin particuliers

Soit la grammaire à bourgeons $\mathcal{B} := (\text{Motz}, \{1, 2\}, \mathfrak{R}, \{1\}, \{1, 2\})$ où

$$\mathfrak{R} := \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ \circ - \circ \\ 2 \quad 2 \end{array}, \begin{array}{c} 1 \\ \circ - \circ - \circ \\ 1 \quad 1 \quad 1 \end{array} \right\}.$$

Exemple

Il y a dans $\mathcal{B}$ les dérivations



Proposition [G., 2017]

$L(\mathcal{B})$ est en bijection avec l'ensemble des chemins de Motzkin sans pas horizontaux consécutifs.

Ces chemins sont dénombrés par la suite **A104545** :

1, 1, 1, 3, 5, 11, 25, 55, 129, 303, 721, 1743.

Émulation des grammaires non contextuelles

Soit $G := (V, T, P, s)$ une grammaire non contextuelle propre, c.-à-d., telle que pour tout $(x, u) \in P$, $|u| \geq 1$.

Émulation des grammaires non contextuelles

Soit $G := (V, T, P, s)$ une grammaire non contextuelle propre, c.-à-d., telle que pour tout $(x, u) \in P$, $|u| \geq 1$.

Soit la grammaire à bourgeons

$$\mathcal{B} := (As, V \sqcup T, \mathfrak{R}, \{s\}, T)$$

où

$$\mathfrak{R} := \{ (x, \star_{|u|}, u) : (x, u) \in P \}.$$

Émulation des grammaires non contextuelles

Soit $G := (V, T, P, s)$ une grammaire non contextuelle propre, c.-à-d., telle que pour tout $(x, u) \in P$, $|u| \geq 1$.

Soit la grammaire à bourgeons

$$\mathcal{B} := (As, V \sqcup T, \mathfrak{R}, \{s\}, T)$$

où

$$\mathfrak{R} := \{(x, \star_{|u|}, u) : (x, u) \in P\}.$$

Proposition [G., 2017]

L'application $i : L(\mathcal{B}) \rightarrow L(G)$, où $L(G)$ est l'ensemble des mots engendrés par G et i est l'application qui envoie $(x, \star_{|u|}, u)$ sur u , est une bijection.

Ainsi, toute grammaire non contextuelle propre peut être émulée par une grammaire à bourgeons reposant sur l'**opérade associative** As .

Émulation des grammaires non contextuelles

Exemple

Soit $G := (\{x, y\}, \{a, b\}, P, x)$ une grammaire non contextuelle propre où

$$P := \{(x, a), (x, by), (y, b), (y, xy)\}.$$

La grammaire à bourgeons $\mathcal{B} := (As, \{x, y, a, b\}, \mathfrak{R}, \{x\}, \{a, b\})$ où

$$\mathfrak{R} := \{(x, \star_1, a), (x, \star_2, by), (y, \star_1, b), (y, \star_2, xy)\}$$

émule G .

Émulation des grammaires non contextuelles

Exemple

Soit $G := (\{x, y\}, \{a, b\}, P, x)$ une grammaire non contextuelle propre où

$$P := \{(x, a), (x, by), (y, b), (y, xy)\}.$$

La grammaire à bourgeons $\mathcal{B} := (As, \{x, y, a, b\}, \mathfrak{R}, \{x\}, \{a, b\})$ où

$$\mathfrak{R} := \{(x, \star_1, a), (x, \star_2, by), (y, \star_1, b), (y, \star_2, xy)\}$$

émule G .

La suite de dérivations

$$x \rightarrow by \rightarrow bxy \rightarrow bbyy \rightarrow bbb y \rightarrow bbb xy \rightarrow bbb ay \rightarrow bbb ab$$

dans G donne lieu à la suite de dérivations

$$\begin{aligned} 1_x &\rightarrow (x, \star_2, by) \rightarrow (x, \star_3, bxy) \rightarrow (x, \star_4, bbyy) \rightarrow (x, \star_4, bbb y) \\ &\rightarrow (x, \star_5, bbb xy) \rightarrow (x, \star_5, bbb ay) \rightarrow (x, \star_5, bbb ab) \end{aligned}$$

dans $\mathcal{B}$.

Séries sur opérades colorées

Les opérations $\curvearrowright$, $\curvearrowright_*$, $\odot$ et $\odot_{-1}$ s'étendent aux séries sur opérades colorées.

Séries sur opérades colorées

Les opérations $\curvearrowright$, $\curvearrowright_*$, $\odot$ et $\odot_{-1}$ s'étendent aux séries sur opérades colorées.

Exemple

Voici un calcul sur des $B_{\{1,2\}}$ (Mag)-séries :

The diagram illustrates a calculation in the theory of colored operads. On the left, a tree with root 'a' and two children '1' and '2' is multiplied (indicated by $\curvearrowright$) by the sum of two trees. The first tree in the sum has root 'a' with children '2' and '1', where '2' has children '1' and '1'. The second tree has root 'a' with children '1' and '2', where '2' has children '2' and '1'. The result is the sum of three trees: 1) root 'a' with children '1' and '2', where '1' has children '1' and '1'; 2) root 'a' with children '2' and '1', where '2' has children '1' and '1', and '1' has children '1' and '1'; 3) root 'a' with children '2' and '1', where '2' has children '1' and '2', and '1' has children '2' and '1'.

Séries sur opérades colorées

Les opérations $\curvearrowright$, $\curvearrowright_*$, $\odot$ et $\odot_{-1}$ s'étendent aux séries sur opérades colorées.

Exemple

Voici un calcul sur des $B_{\{1,2\}}$ (Mag)-séries :

$$\begin{array}{c} 1 \\ \swarrow \downarrow \searrow \\ a \quad a \quad 2 \\ \swarrow \searrow \\ 2 \quad 1 \end{array} \curvearrowright \left(\begin{array}{c} 2 \\ \swarrow \searrow \\ a \quad a \\ \swarrow \searrow \\ 1 \quad 1 \quad 1 \end{array} + \begin{array}{c} 1 \\ \swarrow \searrow \\ a \quad a \\ \swarrow \searrow \\ 1 \quad 2 \quad 2 \quad 1 \end{array} \right) = \begin{array}{c} 1 \\ \swarrow \searrow \\ a \quad a \\ \swarrow \searrow \\ 1 \quad 1 \quad 2 \end{array} + \begin{array}{c} 1 \\ \swarrow \searrow \\ a \quad a \\ \swarrow \searrow \\ 2 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \end{array} + \begin{array}{c} 1 \\ \swarrow \searrow \\ a \quad a \\ \swarrow \searrow \\ 2 \quad 1 \quad 2 \quad 1 \end{array} .$$

Exemple

Voici un calcul sur des $B_{\{1,2\}}$ (Mag)-séries :

$$\begin{array}{c} 1 \\ \swarrow \downarrow \searrow \\ a \quad a \quad 2 \\ \swarrow \searrow \\ 2 \quad 1 \end{array} \odot \left(\begin{array}{c} 1 \\ \swarrow \searrow \\ a \quad a \\ \swarrow \searrow \\ 1 \quad 1 \end{array} + \begin{array}{c} 1 \\ \swarrow \searrow \\ a \quad a \\ \swarrow \searrow \\ 2 \quad 2 \quad 2 \end{array} + \begin{array}{c} 2 \\ \swarrow \searrow \\ a \quad a \\ \swarrow \searrow \\ 2 \quad 1 \end{array} \right) = \begin{array}{c} 1 \\ \swarrow \searrow \\ a \quad a \\ \swarrow \searrow \\ 2 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \end{array} + \begin{array}{c} 1 \\ \swarrow \searrow \\ a \quad a \\ \swarrow \searrow \\ 2 \quad 1 \quad 2 \quad 2 \end{array} .$$

Séries des grammaires à bourgeons

Soit $\mathcal{B} := (\mathcal{O}, \mathfrak{C}, \mathfrak{R}, I, T)$ une grammaire à bourgeons.

Soient les trois polynômes de $\mathbb{K} \langle \langle \mathbf{B}_{\mathfrak{C}}(\mathcal{O}) \rangle \rangle$

$$\mathbf{i} := \sum_{c \in I} \mathbb{1}_c, \quad \mathbf{r} := \sum_{r \in \mathfrak{R}} r, \quad \mathbf{t} := \sum_{c \in T} \mathbb{1}_c.$$

Séries des grammaires à bourgeons

Soit $\mathcal{B} := (\mathcal{O}, \mathfrak{C}, \mathfrak{R}, I, T)$ une grammaire à bourgeons.

Soient les trois polynômes de $\mathbb{K} \langle \langle \mathbf{B}_{\mathfrak{C}}(\mathcal{O}) \rangle \rangle$

$$\mathbf{i} := \sum_{c \in I} \mathbb{1}_c, \quad \mathbf{r} := \sum_{r \in \mathfrak{R}} r, \quad \mathbf{t} := \sum_{c \in T} \mathbb{1}_c.$$

La série des équerres de $\mathcal{B}$ est

$$\text{hook}(\mathcal{B}) := \mathbf{i} \odot \mathbf{r}^{\curvearrowright*} \odot \mathbf{t}.$$

La série syntaxique de $\mathcal{B}$ est

$$\text{synt}(\mathcal{B}) := \mathbf{i} \odot (\mathbf{u} - \mathbf{r})^{\odot-1} \odot \mathbf{t}.$$

Séries des grammaires à bourgeons

Soit $\mathcal{B} := (\mathcal{O}, \mathfrak{C}, \mathfrak{R}, I, T)$ une grammaire à bourgeons.

Soient les trois polynômes de $\mathbb{K} \langle \langle \mathbf{B}_{\mathfrak{C}}(\mathcal{O}) \rangle \rangle$

$$\mathbf{i} := \sum_{c \in I} \mathbb{1}_c, \quad \mathbf{r} := \sum_{r \in \mathfrak{R}} r, \quad \mathbf{t} := \sum_{c \in T} \mathbb{1}_c.$$

La série des équerres de $\mathcal{B}$ est

$$\text{hook}(\mathcal{B}) := \mathbf{i} \odot \mathbf{r}^{\curvearrowright*} \odot \mathbf{t}.$$

La série syntaxique de $\mathcal{B}$ est

$$\text{synt}(\mathcal{B}) := \mathbf{i} \odot (\mathbf{u} - \mathbf{r})^{\odot-1} \odot \mathbf{t}.$$

Proposition [G., 2017]

Quand $\text{hook}(\mathcal{B})$ et $\text{synt}(\mathcal{B})$ sont bien définies,

$$\text{Supp}(\text{hook}(\mathcal{B})) = \text{L}(\mathcal{B}) = \text{Supp}(\text{synt}(\mathcal{B})).$$

Un outil pour le dénombrement

Soit X un ensemble d'objets combinatoires qu'on souhaite dénombrer et $\mathcal{B} := (\mathcal{O}, \mathfrak{C}, \mathfrak{A}, I, T)$ une grammaire à bourgeons telle que

1. $L(\mathcal{B}) = X$;
2. la série $\text{synt}(\mathcal{B})$ ne possède que des coefficients 0 ou 1 ($\mathcal{B}$ est **non ambiguë**).

Un outil pour le dénombrement

Soit X un ensemble d'objets combinatoires qu'on souhaite dénombrer et $\mathcal{B} := (\mathcal{O}, \mathfrak{C}, \mathfrak{A}, I, T)$ une grammaire à bourgeons telle que

1. $L(\mathcal{B}) = X$;
2. la série $\text{synt}(\mathcal{B})$ ne possède que des coefficients 0 ou 1 ($\mathcal{B}$ est **non ambiguë**).

Dans ce cas, $\text{synt}(\mathcal{B})$ est la série caractéristique de X .

Un outil pour le dénombrement

Soit X un ensemble d'objets combinatoires qu'on souhaite dénombrer et $\mathcal{B} := (\mathcal{O}, \mathfrak{C}, \mathfrak{A}, I, T)$ une grammaire à bourgeons telle que

1. $L(\mathcal{B}) = X$;
2. la série $\text{synt}(\mathcal{B})$ ne possède que des coefficients 0 ou 1 ($\mathcal{B}$ est **non ambiguë**).

Dans ce cas, $\text{synt}(\mathcal{B})$ est la série caractéristique de X .

L'évaluation $\text{ev}(\text{synt}(\mathcal{B}))$ de $\text{synt}(\mathcal{B})$ est ainsi la série génératrice de X .

Un outil pour le dénombrement

Soit X un ensemble d'objets combinatoires qu'on souhaite dénombrer et $\mathcal{B} := (\mathcal{O}, \mathfrak{C}, \mathfrak{A}, I, T)$ une grammaire à bourgeons telle que

1. $L(\mathcal{B}) = X$;
2. la série $\text{synt}(\mathcal{B})$ ne possède que des coefficients 0 ou 1 ($\mathcal{B}$ est **non ambiguë**).

Dans ce cas, $\text{synt}(\mathcal{B})$ est la série caractéristique de X .

L'évaluation $\text{ev}(\text{synt}(\mathcal{B}))$ de $\text{synt}(\mathcal{B})$ est ainsi la série génératrice de X .

En utilisant les propriétés des $\odot$ -inverse de séries sur $\mathbf{B}_{\mathfrak{C}}(\mathcal{O})$, on peut en déduire des expressions pour $\text{synt}(\mathcal{B})$.

Un outil pour le dénombrement

Soit X un ensemble d'objets combinatoires qu'on souhaite dénombrer et $\mathcal{B} := (\mathcal{O}, \mathfrak{C}, \mathfrak{A}, I, T)$ une grammaire à bourgeons telle que

1. $L(\mathcal{B}) = X$;
2. la série $\text{synt}(\mathcal{B})$ ne possède que des coefficients 0 ou 1 ($\mathcal{B}$ est **non ambiguë**).

Dans ce cas, $\text{synt}(\mathcal{B})$ est la série caractéristique de X .

L'évaluation $\text{ev}(\text{synt}(\mathcal{B}))$ de $\text{synt}(\mathcal{B})$ est ainsi la série génératrice de X .

En utilisant les propriétés des $\odot$ -inverse de séries sur $\mathbf{B}_{\mathfrak{C}}(\mathcal{O})$, on peut en déduire des expressions pour $\text{synt}(\mathcal{B})$.

En résumé, il est possible d'utiliser $\mathcal{B}$ pour dénombrer les éléments de X .