Opérades pluriassocatives et polydendriformes

Samuele Giraudo, LIGM, Université Paris-Est Marne-la-Vallée

LIX

21 mai 2014

Plan

Séparer une opération

Soit

$$\cdot : E \times E \to E$$

une opération binaire associative qui agit sur un certain ensemble E.

Séparer une opération

Soit

$$\cdot : E \times E \to E$$

une opération binaire associative qui agit sur un certain ensemble E.

Séparer $\cdot$ signifie l'exprimer comme une somme

$$\cdot = \prec + \succ$$

où $\prec$ et $\succ$ sont des opérations binaires.

Séparer une opération

Soit

$$\cdot : E \times E \to E$$

une opération binaire associative qui agit sur un certain ensemble E.

Séparer $\cdot$ signifie l'exprimer comme une somme

$$\cdot = \prec + \succ$$

où $\prec$ et $\succ$ sont des opérations binaires.

Le produit de deux éléments $x, y \in E$ s'exprime ainsi par

$$x \cdot y = (x \prec y) + (x \succ y).$$

Séparer une opération

Soit

$$\cdot : E \times E \to E$$

une opération binaire associative qui agit sur un certain ensemble E.

Séparer $\cdot$ signifie l'exprimer comme une somme

$$\cdot = \prec + \succ$$

où $\prec$ et $\succ$ sont des opérations binaires.

Le produit de deux éléments $x, y \in E$ s'exprime ainsi par

$$x \cdot y = (x \prec y) + (x \succ y).$$

Les opérations $\prec$ et $\succ$ doivent vérifier certaines relations.

Exemple : l'algèbre de mélange

Considérons l'espace vectoriel $\mathbb{Q}\langle \mathtt{a}, \mathtt{b} \rangle$.

Exemple

$$2\mathtt{aaba} - 5\mathtt{b} \in \mathbb{Q}\langle \mathtt{a}, \mathtt{b} \rangle$$

Exemple : l'algèbre de mélange

Considérons l'espace vectoriel $\mathbb{Q}\langle \mathtt{a}, \mathtt{b} \rangle$.

Exemple

$$2\mathtt{aaba} - 5\mathtt{b} \in \mathbb{Q}\langle \mathtt{a}, \mathtt{b} \rangle$$

Munissons-le du produit de mélange $\sqcup\!\sqcup$.

Exemple

$$\mathtt{ab} \sqcup\!\sqcup \mathtt{ba} = \mathtt{abba} + \mathtt{abba} + \mathtt{abab} + \mathtt{baba} + \mathtt{baab} + \mathtt{baab}$$

Exemple : l'algèbre de mélange

Considérons l'espace vectoriel $\mathbb{Q}\langle \mathtt{a}, \mathtt{b} \rangle$.

Exemple

$$2\mathtt{aaba} - 5\mathtt{b} \in \mathbb{Q}\langle \mathtt{a}, \mathtt{b} \rangle$$

Munissons-le du produit de mélange $\sqcup\!\sqcup$.

Exemple

$$\begin{aligned} \mathtt{ab} \sqcup\!\sqcup \mathtt{ba} &= \mathtt{abba} + \mathtt{abba} + \mathtt{abab} + \mathtt{baba} + \mathtt{baab} + \mathtt{baab} \\ &= 2\mathtt{abba} + \mathtt{abab} + \mathtt{baba} + 2\mathtt{baab} \end{aligned}$$

Exemple : l'algèbre de mélange

Considérons l'espace vectoriel $\mathbb{Q}\langle \mathtt{a}, \mathtt{b} \rangle$.

Exemple

$$2\mathtt{aaba} - 5\mathtt{b} \in \mathbb{Q}\langle \mathtt{a}, \mathtt{b} \rangle$$

Munissons-le du produit de mélange $\sqcup\!\sqcup$.

Exemple

$$\begin{aligned} \mathtt{ab} \sqcup\!\sqcup \mathtt{ba} &= \mathtt{abba} + \mathtt{abba} + \mathtt{abab} + \mathtt{baba} + \mathtt{baab} + \mathtt{baab} \\ &= 2\mathtt{abba} + \mathtt{abab} + \mathtt{baba} + 2\mathtt{baab} \end{aligned}$$

$\sqcup\!\sqcup$ se sépare en deux parties $\prec$ et $\succ$ selon la provenance de la dernière lettre des mots formés.

Exemple

$$\mathtt{ab} \prec \mathtt{ba} = \mathtt{abab} + \mathtt{baab} + \mathtt{baab}$$

$$\mathtt{ab} \succ \mathtt{ba} = \mathtt{abba} + \mathtt{abba} + \mathtt{baba}$$

Exemple : le produit polynomial

Soit $A := \{\mathtt{a}_0, \mathtt{a}_1, \mathtt{a}_2, \ldots\}$ un alphabet ordonné par $\mathtt{a}_i \leqslant \mathtt{a}_j$ si $i \leqslant j$.

Exemple : le produit polynomial

Soit $A := \{\mathtt{a}_0, \mathtt{a}_1, \mathtt{a}_2, \dots\}$ un alphabet ordonné par $\mathtt{a}_i \leqslant \mathtt{a}_j$ si $i \leqslant j$.

L'ensemble des polynômes non commutatifs $\mathbb{Q}\langle A \rangle$ est muni de son produit habituel $\cdot$.

Exemple

$$\mathtt{a}_0\mathtt{a}_2\mathtt{a}_0 \cdot \mathtt{a}_1\mathtt{a}_2 = \mathtt{a}_0\mathtt{a}_2\mathtt{a}_0\mathtt{a}_1\mathtt{a}_2$$

Exemple : le produit polynomial

Soit $A := \{\mathtt{a}_0, \mathtt{a}_1, \mathtt{a}_2, \ldots\}$ un alphabet ordonné par $\mathtt{a}_i \leqslant \mathtt{a}_j$ si $i \leqslant j$.

L'ensemble des polynômes non commutatifs $\mathbb{Q}\langle A\rangle$ est muni de son produit habituel $\cdot$.

Exemple

$$\mathtt{a}_0\mathtt{a}_2\mathtt{a}_0 \cdot \mathtt{a}_1\mathtt{a}_2 = \mathtt{a}_0\mathtt{a}_2\mathtt{a}_0\mathtt{a}_1\mathtt{a}_2$$

$\cdot$ se sépare en deux parties $\prec$ et $\succ$ selon la provenance de la plus grande lettre :

$$u \prec v = \begin{cases} uv & \text{si } \max(u) > \max(v), \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$u \succ v = \begin{cases} uv & \text{si } \max(u) \leqslant \max(v), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exemple : le produit polynomial

Soit $A := \{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$ un alphabet ordonné par $a_i \leqslant a_j$ si $i \leqslant j$.

L'ensemble des polynômes non commutatifs $\mathbb{Q}\langle A\rangle$ est muni de son produit habituel $\cdot$.

Exemple

$$a_0a_2a_0 \cdot a_1a_2 = a_0a_2a_0a_1a_2$$

$\cdot$ se sépare en deux parties $\prec$ et $\succ$ selon la provenance de la plus grande lettre :

$$u \prec v = \begin{cases} uv & \text{si } \max(u) > \max(v), \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$u \succ v = \begin{cases} uv & \text{si } \max(u) \leqslant \max(v), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exemple

$$a_0a_2 \prec a_1a_0 = a_0a_2a_1a_0 \qquad a_0a_2a_0 \prec a_1a_2 = 0$$

$$a_0a_2 \succ a_1a_0 = 0 \qquad a_0a_2a_0 \succ a_1a_2 = a_0a_2a_0a_1a_2$$

Algèbres dendriformes

Une algèbre dendriforme est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel V muni de deux opérations

$$\prec\, : V \otimes V \to V \qquad \text{et} \qquad \succ\, : V \otimes V \to V$$

qui vérifient, pour tous $x, y, z \in V$, les trois relations

$$\begin{aligned}
(x \prec y) \prec z &= x \prec (y \prec z) + x \prec (y \succ z), \\
(x \succ y) \prec z &= x \succ (y \prec z), \\
(x \prec y) \succ z + (x \succ y) \succ z &= x \succ (y \succ z).
\end{aligned}$$

Algèbres dendriformes

Une algèbre dendriforme est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel V muni de deux opérations

$$\prec \,:\, V \otimes V \to V \qquad \text{et} \qquad \succ \,:\, V \otimes V \to V$$

qui vérifient, pour tous $x, y, z \in V$, les trois relations

$$\begin{aligned}
(x \prec y) \prec z &= x \prec (y \prec z) + x \prec (y \succ z), \\
(x \succ y) \prec z &= x \succ (y \prec z), \\
(x \prec y) \succ z + (x \succ y) \succ z &= x \succ (y \succ z).
\end{aligned}$$

Proposition [**Loday**, 2001]

Soit $(V, \prec, \succ)$ une algèbre dendriforme. Alors, l'opération $\prec + \succ$ est associative.

Algèbres dendriformes

Quelques faits :

- la séparation du produit de mélange est connue depuis longtemps [**Ree**, 1957], [**Schützenberger**, 1958] ;

Algèbres dendriformes

Quelques faits :

- la séparation du produit de mélange est connue depuis longtemps [**Ree**, 1957], [**Schützenberger**, 1958] ;
- la formalisation de cette notion de séparation a été proposée bien plus tard [**Loday**, 2001] sous le nom d'algèbre dendriforme ;

Algèbres dendriformes

Quelques faits :

- la séparation du produit de mélange est connue depuis longtemps [**Ree**, 1957], [**Schützenberger**, 1958] ;
- la formalisation de cette notion de séparation a été proposée bien plus tard [**Loday**, 2001] sous le nom d'algèbre dendriforme ;
- séparer une opération associative (et donc munir une algèbre associative d'une structure d'algèbre dendriforme) permet de mieux la comprendre [**Foissy**, 2005] ;

Algèbres dendriformes

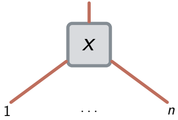
Quelques faits :

- la séparation du produit de mélange est connue depuis longtemps [Ree, 1957], [Schützenberger, 1958] ;
- la formalisation de cette notion de séparation a été proposée bien plus tard [Loday, 2001] sous le nom d'algèbre dendriforme ;
- séparer une opération associative (et donc munir une algèbre associative d'une structure d'algèbre dendriforme) permet de mieux la comprendre [Foissy, 2005] ;
- il existe une opérade, l'opérade dendriforme [Loday, 2001], qui permet de décrire toutes les algèbres dendriformes.

Plan

Opérateurs

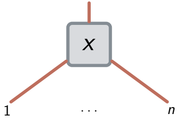
Un opérateur est un objet qui dispose de $n \geqslant 1$ entrées et d'une sortie.



Son nombre n d'entrées est son arité.

Opérateurs

Un opérateur est un objet qui dispose de $n \geqslant 1$ entrées et d'une sortie.

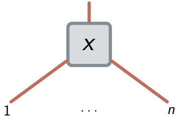


Son nombre n d'entrées est son arité.

Étant donnés deux opérateurs x et y, l'une des constructions les plus simples consiste à les composer :

Opérateurs

Un opérateur est un objet qui dispose de $n \geqslant 1$ entrées et d'une sortie.



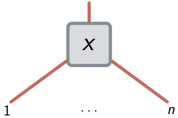
Son nombre n d'entrées est son arité.

Étant donnés deux opérateurs x et y, l'une des constructions les plus simples consiste à les composer :

1. on choisit une entrée de x, repérée par sa position i ;

Opérateurs

Un opérateur est un objet qui dispose de $n \geqslant 1$ entrées et d'une sortie.



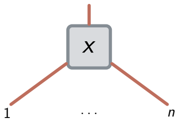
Son nombre n d'entrées est son arité.

Étant donnés deux opérateurs x et y, l'une des constructions les plus simples consiste à les composer :

1. on choisit une entrée de x, repérée par sa position i ;
2. on attache la sortie de y à cette dernière.

Opérateurs

Un opérateur est un objet qui dispose de $n \geqslant 1$ entrées et d'une sortie.

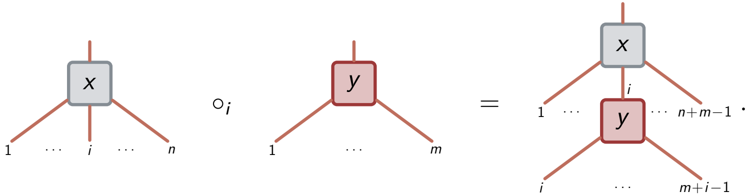


Son nombre n d'entrées est son arité.

Étant donnés deux opérateurs x et y, l'une des constructions les plus simples consiste à les composer :

1. on choisit une entrée de x, repérée par sa position i ;
2. on attache la sortie de y à cette dernière.

On obtient ainsi un nouvel opérateur $x \circ_i y$:



Opérades

Les opérades sont les structures algébriques qui formalisent la notion d'opérateurs et de leur composition.

Opérades

Les opérades sont les structures algébriques qui formalisent la notion d'opérateurs et de leur composition.

Une opérade est un triplet $(\mathcal{O}, \circ_i, \mathbb{1})$ où

1. $\mathcal{O}$ est une collection graduée

$$\mathcal{O} := \bigsqcup_{n \geqslant 1} \mathcal{O}(n) \ ;$$

Opérades

Les opérades sont les structures algébriques qui formalisent la notion d'opérateurs et de leur composition.

Une opérade est un triplet $(\mathcal{O}, \circ_i, \mathbb{1})$ où

1. $\mathcal{O}$ est une collection graduée

$$\mathcal{O} := \bigsqcup_{n \geqslant 1} \mathcal{O}(n) \ ;$$

2. $\circ_i$ est une application de composition

$$\circ_i : \mathcal{O}(n) \times \mathcal{O}(m) \to \mathcal{O}(n+m-1), \qquad n, m \geqslant 1, i \in [n] \ ;$$

Opérades

Les opérades sont les structures algébriques qui formalisent la notion d'opérateurs et de leur composition.

Une opérade est un triplet $(\mathcal{O}, \circ_i, \mathbb{1})$ où

1. $\mathcal{O}$ est une collection graduée

$$\mathcal{O} := \bigsqcup_{n \geqslant 1} \mathcal{O}(n) \;;$$

2. $\circ_i$ est une application de composition

$$\circ_i : \mathcal{O}(n) \times \mathcal{O}(m) \to \mathcal{O}(n+m-1), \qquad n, m \geqslant 1, i \in [n] \;;$$

3. $\mathbb{1}$ est un élément de $\mathcal{O}(1)$, appelé unité.

Opérades

Les opérades sont les structures algébriques qui formalisent la notion d'opérateurs et de leur composition.

Une opérade est un triplet $(\mathcal{O}, \circ_i, \mathbb{1})$ où

1. $\mathcal{O}$ est une collection graduée

$$\mathcal{O} := \bigsqcup_{n \geqslant 1} \mathcal{O}(n) \; ;$$

2. $\circ_i$ est une application de composition

$$\circ_i : \mathcal{O}(n) \times \mathcal{O}(m) \to \mathcal{O}(n + m - 1), \qquad n, m \geqslant 1, i \in [n] \; ;$$

3. $\mathbb{1}$ est un élément de $\mathcal{O}(1)$, appelé unité.

Ces données doivent vérifier des axiomes.

Axiomes des opérades

Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$
$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$
$$i \in [n], j \in [m]$$

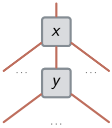
Axiomes des opérades

Associativité :

$(x \circ_i y)$

$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$

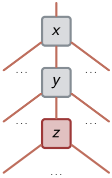
$i \in [n], j \in [m]$



Axiomes des opérades

Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z$$
$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$
$$i \in [n], j \in [m]$$



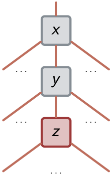
Axiomes des opérades

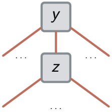
Associativité :

$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z \qquad\qquad (y \circ_j z)$

$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$

$i \in [n], j \in [m]$





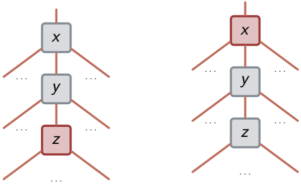
Axiomes des opérades

Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z \qquad x \circ_i (y \circ_j z)$$

$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$

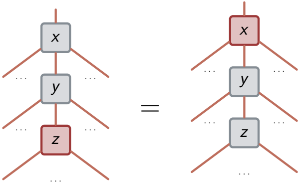
$$i \in [n], j \in [m]$$



Axiomes des opérades

Associativité :

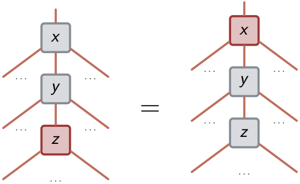
$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$
$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$
$$i \in [n], j \in [m]$$



Axiomes des opérades

Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$
$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$
$$i \in [n], j \in [m]$$



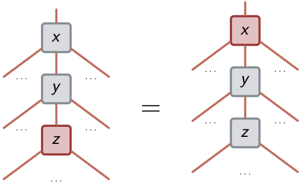
Commutativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{j+m-1} z = (x \circ_j z) \circ_i y$$
$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$
$$1 \leqslant i < j \leqslant n$$

Axiomes des opérades

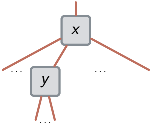
Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$
$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$
$$i \in [n], j \in [m]$$



Commutativité :

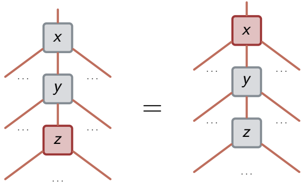
$$(x \circ_i y)$$
$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$
$$1 \leqslant i < j \leqslant n$$



Axiomes des opérades

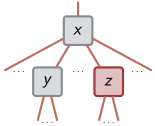
Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$
$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$
$$i \in [n], j \in [m]$$



Commutativité :

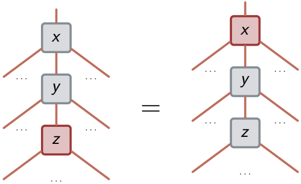
$$(x \circ_i y) \circ_{j+m-1} z$$
$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$
$$1 \leqslant i < j \leqslant n$$



Axiomes des opérades

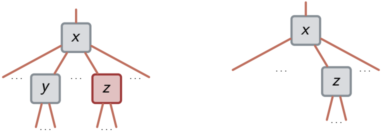
Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$
$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$
$$i \in [n], j \in [m]$$



Commutativité :

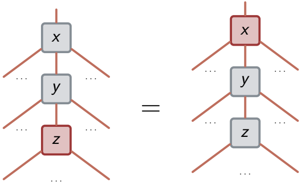
$$(x \circ_i y) \circ_{j+m-1} z \qquad (x \circ_j z)$$
$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$
$$1 \leqslant i < j \leqslant n$$



Axiomes des opérades

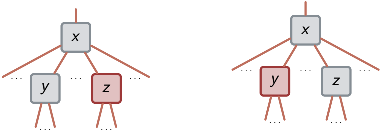
Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$
$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$
$$i \in [n], j \in [m]$$



Commutativité :

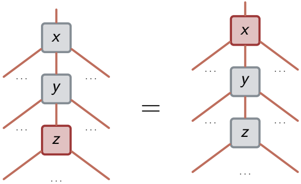
$$(x \circ_i y) \circ_{j+m-1} z \qquad (x \circ_j z) \circ_i y$$
$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$
$$1 \leqslant i < j \leqslant n$$



Axiomes des opérades

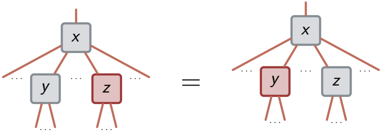
Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$
$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$
$$i \in [n], j \in [m]$$



Commutativité :

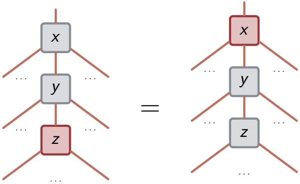
$$(x \circ_i y) \circ_{j+m-1} z = (x \circ_j z) \circ_i y$$
$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$
$$1 \leqslant i < j \leqslant n$$



Axiomes des opérades

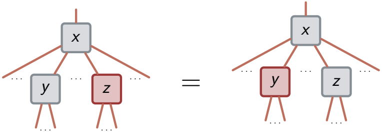
Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$
$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$
$$i \in [n], j \in [m]$$



Commutativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{j+m-1} z = (x \circ_j z) \circ_i y$$
$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$
$$1 \leqslant i < j \leqslant n$$



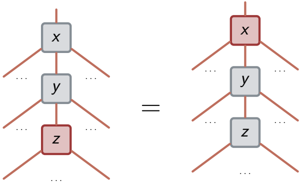
Unitarité :

$$\mathbb{1} \circ_1 x = x = x \circ_i \mathbb{1}$$
$$x \in \mathcal{O}(n)$$
$$i \in [n]$$

Axiomes des opérades

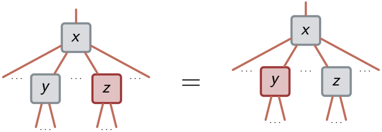
Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$
$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$
$$i \in [n], j \in [m]$$



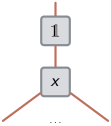
Commutativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{j+m-1} z = (x \circ_j z) \circ_i y$$
$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$
$$1 \leqslant i < j \leqslant n$$



Unitarité :

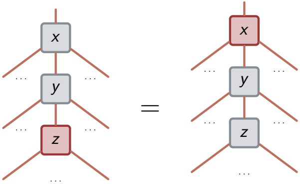
$$\mathbb{1} \circ_1 x$$
$$x \in \mathcal{O}(n)$$
$$i \in [n]$$



Axiomes des opérades

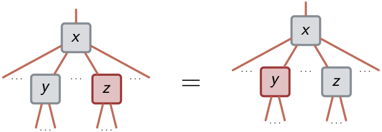
Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$
$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$
$$i \in [n], j \in [m]$$



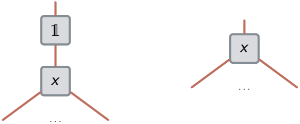
Commutativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{j+m-1} z = (x \circ_j z) \circ_i y$$
$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$
$$1 \leqslant i < j \leqslant n$$



Unitarité :

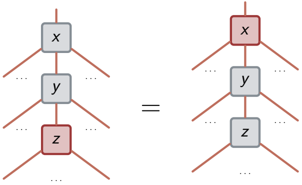
$$\mathbb{1} \circ_1 x \qquad x$$
$$x \in \mathcal{O}(n)$$
$$i \in [n]$$



Axiomes des opérades

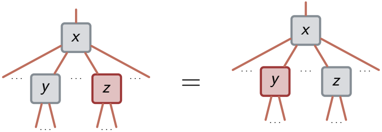
Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$
$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$
$$i \in [n], j \in [m]$$



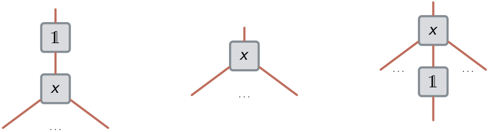
Commutativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{j+m-1} z = (x \circ_j z) \circ_i y$$
$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$
$$1 \leqslant i < j \leqslant n$$



Unitarité :

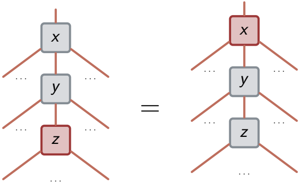
$$\mathbb{1} \circ_1 x \qquad x \qquad x \circ_i \mathbb{1}$$
$$x \in \mathcal{O}(n)$$
$$i \in [n]$$



Axiomes des opérades

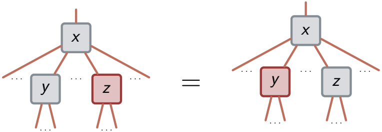
Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$
$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$
$$i \in [n], j \in [m]$$



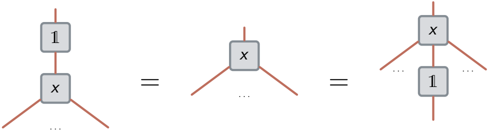
Commutativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{j+m-1} z = (x \circ_j z) \circ_i y$$
$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$
$$1 \leqslant i < j \leqslant n$$



Unitarité :

$$\mathbb{1} \circ_1 x = x = x \circ_i \mathbb{1}$$
$$x \in \mathcal{O}(n)$$
$$i \in [n]$$



Exemple : l'opérade associative

L'opérade associative Assoc est définie de la manière suivante :

- il y a un unique élément $\mathtt{a}_n$ d'arité 1 pour tout $n \geqslant 1$;
- la composition est définie par $\mathtt{a}_n \circ_i \mathtt{a}_m := \mathtt{a}_{n+m-1}$;
- l'unité est l'élément $\mathtt{a}_1$.

Exemple : l'opérade associative

L'opérade associative Assoc est définie de la manière suivante :

- il y a un unique élément $\mathtt{a}_n$ d'arité 1 pour tout $n \geqslant 1$;
- la composition est définie par $\mathtt{a}_n \circ_i \mathtt{a}_m := \mathtt{a}_{n+m-1}$;
- l'unité est l'élément $\mathtt{a}_1$.

Exemple

$$\mathtt{a}_4 \circ_2 \mathtt{a}_3 = \mathtt{a}_6$$

$$\mathtt{a}_1 \circ_1 \mathtt{a}_1 = \mathtt{a}_1$$

$$\mathtt{a}_4 \circ_4 \mathtt{a}_1 = \mathtt{a}_4$$

Exemple : l'opérade des chemins de Motzkin

L'opérade Motz est définie de la manière suivante :

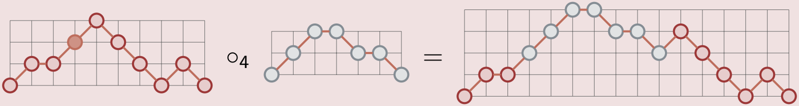
- ses éléments d'arité n sont les chemins de Motkzin à $n - 1$ pas ;
- la composition $x \circ_i y$ de deux chemins de Motzkin en position i revient à remplacer le i^{e} point de x par y ;
- l'unité est le chemin réduit à un point ○.

Exemple : l'opérade des chemins de Motzkin

L'opérade Motz est définie de la manière suivante :

- ses éléments d'arité n sont les chemins de Motkzin à $n - 1$ pas ;
- la composition $x \circ_i y$ de deux chemins de Motzkin en position i revient à remplacer le i^{e} point de x par y ;
- l'unité est le chemin réduit à un point .

Exemple

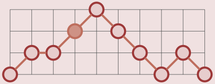
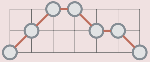
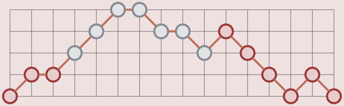


Exemple : l'opérade des chemins de Motzkin

L'opérade Motz est définie de la manière suivante :

- ses éléments d'arité n sont les chemins de Motkzin à $n-1$ pas ;
- la composition $x \circ_i y$ de deux chemins de Motzkin en position i revient à remplacer le i^{e} point de x par y ;
- l'unité est le chemin réduit à un point .

Exemple

 $\circ_4$  $=$ 

Exercice

Démontrer que Motz est bien une opérade.

Questions sur les opérades

L'étude d'une opérade $\mathcal{O}$ comprend la recherche de :

1. sa suite de dimensions $\#\mathcal{O}(1), \#\mathcal{O}(2), \dots, \#\mathcal{O}(n), \dots$;

Questions sur les opérades

L'étude d'une opérade $\mathcal{O}$ comprend la recherche de :

1. sa suite de dimensions $\#\mathcal{O}(1), \#\mathcal{O}(2), \ldots, \#\mathcal{O}(n), \ldots$;
2. son ensemble minimal de générateurs ;

Questions sur les opérades

L'étude d'une opérade $\mathcal{O}$ comprend la recherche de :

1. sa suite de dimensions $\#\mathcal{O}(1), \#\mathcal{O}(2), \ldots, \#\mathcal{O}(n), \ldots$;

2. son ensemble minimal de générateurs ;

3. les relations non triviales entre ses générateurs ;

Questions sur les opérades

L'étude d'une opérade $\mathcal{O}$ comprend la recherche de :

1. sa suite de dimensions $\#\mathcal{O}(1), \#\mathcal{O}(2), \dots, \#\mathcal{O}(n), \dots$;
2. son ensemble minimal de générateurs ;
3. les relations non triviales entre ses générateurs ;
4. ses symétries, c.-à-d., ses (anti)automorphismes ;

Questions sur les opérades

L'étude d'une opérade $\mathcal{O}$ comprend la recherche de :

1. sa suite de dimensions $\#\mathcal{O}(1), \#\mathcal{O}(2), \dots, \#\mathcal{O}(n), \dots$;
2. son ensemble minimal de générateurs ;
3. les relations non triviales entre ses générateurs ;
4. ses symétries, c.-à-d., ses (anti)automorphismes ;
5. ses sous-opérades et ses quotients.

Exemple : l'opérade associative

1. Suite de dimensions :

$$1, 1, \ldots$$

Exemple : l'opérade associative

1. Suite de dimensions :

$$1, 1, \ldots$$

2. Famille génératrice minimale : $\{\mathtt{a}_2\}$.

Exemple : l'opérade associative

1. Suite de dimensions :

$$1, 1, \ldots$$

2. Famille génératrice minimale : $\{\mathtt{a}_2\}$. En effet,

$$\mathtt{a}_3 = \mathtt{a}_2 \circ_1 \mathtt{a}_2,$$

Exemple : l'opérade associative

1. Suite de dimensions :

$$1, 1, \ldots$$

2. Famille génératrice minimale : $\{\mathtt{a}_2\}$. En effet,

$$\mathtt{a}_3 = \mathtt{a}_2 \circ_1 \mathtt{a}_2, \qquad \mathtt{a}_4 = \mathtt{a}_3 \circ_1 \mathtt{a}_2,$$

Exemple : l'opérade associative

1. Suite de dimensions :

$$1, 1, \ldots$$

2. Famille génératrice minimale : $\{\mathtt{a}_2\}$. En effet,

$$\mathtt{a}_3 = \mathtt{a}_2 \circ_1 \mathtt{a}_2, \qquad \mathtt{a}_4 = \mathtt{a}_3 \circ_1 \mathtt{a}_2, \qquad \mathtt{a}_5 = \mathtt{a}_4 \circ_1 \mathtt{a}_2, \qquad \textit{etc.}$$

Exemple : l'opérade associative

1. Suite de dimensions :

$$1, 1, \ldots$$

2. Famille génératrice minimale : $\{\mathtt{a}_2\}$. En effet,

$$\mathtt{a}_3 = \mathtt{a}_2 \circ_1 \mathtt{a}_2, \qquad \mathtt{a}_4 = \mathtt{a}_3 \circ_1 \mathtt{a}_2, \qquad \mathtt{a}_5 = \mathtt{a}_4 \circ_1 \mathtt{a}_2, \qquad \textit{etc.}$$

3. Relations non triviales :

$$\mathtt{a}_2 \circ_1 \mathtt{a}_2 = \mathtt{a}_2 \circ_2 \mathtt{a}_2.$$

Exemple : l'opérade associative

1. Suite de dimensions :

$$1, 1, \ldots$$

2. Famille génératrice minimale : $\{\mathtt{a}_2\}$. En effet,

$$\mathtt{a}_3 = \mathtt{a}_2 \circ_1 \mathtt{a}_2, \qquad \mathtt{a}_4 = \mathtt{a}_3 \circ_1 \mathtt{a}_2, \qquad \mathtt{a}_5 = \mathtt{a}_4 \circ_1 \mathtt{a}_2, \qquad \textit{etc.}$$

3. Relations non triviales :

$$\mathtt{a}_2 \circ_1 \mathtt{a}_2 = \mathtt{a}_2 \circ_2 \mathtt{a}_2.$$

4. Symétries : l'automorphisme trivial seulement.

Exemple : l'opérade des chemins de Motzkin

1. Suite de dimensions :

$$1, 1, 2, 4, 9, 21, 51, 127, 323, \ldots$$

(suite **A001006**).

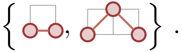
Exemple : l'opérade des chemins de Motzkin

1. Suite de dimensions :

$$1, 1, 2, 4, 9, 21, 51, 127, 323, \ldots$$

   (suite **A001006**).

2. Famille génératrice minimale :



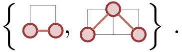
Exemple : l'opérade des chemins de Motzkin

1. Suite de dimensions :

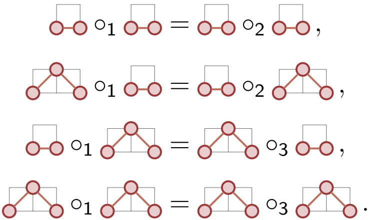
$$1, 1, 2, 4, 9, 21, 51, 127, 323, \ldots$$

(suite **A001006**).

2. Famille génératrice minimale :



3. Relations non triviales :



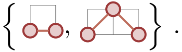
Exemple : l'opérade des chemins de Motzkin

1. Suite de dimensions :

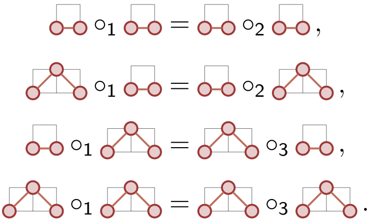
$$1, 1, 2, 4, 9, 21, 51, 127, 323, \ldots$$

(suite **A001006**).

2. Famille génératrice minimale :



3. Relations non triviales :



4. Symétries : l'automorphisme trivial seulement.

Plan

Opérades libres

Soit $G := \sqcup_{n \geqslant 1} G(n)$ une collection graduée.

Opérades libres

Soit $G := \sqcup_{n \geqslant 1} G(n)$ une collection graduée.

L'opérade libre engendrée par G est l'opérade $\mathbf{F}(G)$ telle que :

- les éléments d'arité n sont les arbres syntaxiques sur G à n feuilles (arbres plans dont chaque nœud interne étiqueté sur $G(\ell)$ a ℓ fils) ;
- la composition est la greffe d'arbres ;
- l'unité est l'arbre réduit à une feuille .

Opérades libres

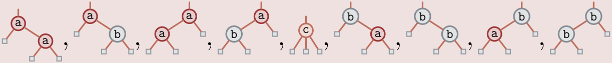
Soit $G := \sqcup_{n \geqslant 1} G(n)$ une collection graduée.

L'opérade libre engendrée par G est l'opérade $\mathbf{F}(G)$ telle que :

- les éléments d'arité n sont les arbres syntaxiques sur G à n feuilles (arbres plans dont chaque nœud interne étiqueté sur $G(\ell)$ a ℓ fils) ;
- la composition est la greffe d'arbres ;
- l'unité est l'arbre réduit à une feuille.

Exemple

Soit $G := G(2) \sqcup G(3)$ avec $G(2) := \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ et $G(3) := \{\mathtt{c}\}$.

$\mathbf{F}(G)(3) = \Big\{$  $\Big\}$

Opérades libres

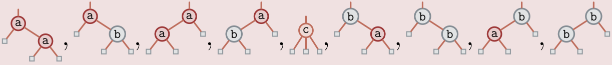
Soit $G := \sqcup_{n \geqslant 1} G(n)$ une collection graduée.

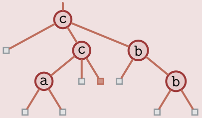
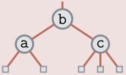
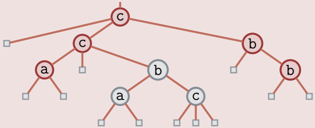
L'opérade libre engendrée par G est l'opérade $\mathbf{F}(G)$ telle que :

- les éléments d'arité n sont les arbres syntaxiques sur G à n feuilles (arbres plans dont chaque nœud interne étiqueté sur $G(\ell)$ a ℓ fils) ;
- la composition est la greffe d'arbres ;
- l'unité est l'arbre réduit à une feuille.

Exemple

Soit $G := G(2) \sqcup G(3)$ avec $G(2) := \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ et $G(3) := \{\mathtt{c}\}$.

$\mathbf{F}(G)(3) = \{$  $\}$

 $\circ_5$  $=$ 

Congruences d'opérades libres

Congruence de $\mathbf{F}(G)$: relation d'équivalence $\equiv$ sur $\mathbf{F}(G)$ telle que

$$x \equiv x' \quad \text{implique} \quad |x| = |x'|$$

et

$$x \equiv x' \text{ et } y \equiv y' \quad \text{impliquent} \quad x \circ_i y \equiv x' \circ_i y'.$$

Congruences d'opérades libres

Congruence de $\mathbf{F}(G)$: relation d'équivalence $\equiv$ sur $\mathbf{F}(G)$ telle que

$$x \equiv x' \quad \text{implique} \quad |x| = |x'|$$

et

$$x \equiv x' \text{ et } y \equiv y' \quad \text{impliquent} \quad x \circ_i y \equiv x' \circ_i y'.$$

Exemple

Soit $G := G(2) \sqcup G(3)$ avec $G(2) := \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ et $G(3) := \{\mathtt{c}\}$.

Soit $\equiv$ la plus fine congruence de $\mathbf{F}(G)$ qui vérifie

et

Congruences d'opérades libres

Congruence de $\mathbf{F}(G)$: relation d'équivalence $\equiv$ sur $\mathbf{F}(G)$ telle que

$$x \equiv x' \quad \text{implique} \quad |x| = |x'|$$

et

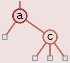
$$x \equiv x' \text{ et } y \equiv y' \quad \text{impliquent} \quad x \circ_i y \equiv x' \circ_i y'.$$

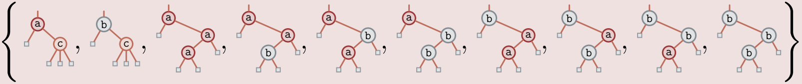
Exemple

Soit $G := G(2) \sqcup G(3)$ avec $G(2) := \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ et $G(3) := \{\mathtt{c}\}$.

Soit $\equiv$ la plus fine congruence de $\mathbf{F}(G)$ qui vérifie

 et .

Classe d'équivalence de  :

.

Quotients d'opérades libres

Le quotient de $\mathbf{F}(G)$ par $\equiv$ est l'opérade $\mathbf{F}(G)/_{\equiv}$ telle que :

- ses éléments sont les classes d'équivalence $[x]_{\equiv}$ de $\mathbf{F}(G)$ par $\equiv$;
- la composition est définie par $[x]_{\equiv} \circ_i [y]_{\equiv} := [x \circ_i y]_{\equiv}$ où x et y sont des éléments quelconques de $[x]_{\equiv}$ et de $[y]_{\equiv}$;
- l'unité est $[$  $]_{\equiv}$.

Quotients d'opérades libres

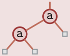
Le quotient de $\mathbf{F}(G)$ par $\equiv$ est l'opérade $\mathbf{F}(G)/_{\equiv}$ telle que :

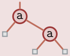
- ses éléments sont les classes d'équivalence $[x]_{\equiv}$ de $\mathbf{F}(G)$ par $\equiv$;
- la composition est définie par $[x]_{\equiv} \circ_i [y]_{\equiv} := [x \circ_i y]_{\equiv}$ où x et y sont des éléments quelconques de $[x]_{\equiv}$ et de $[y]_{\equiv}$;
- l'unité est $[$  $]_{\equiv}$.

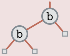
Exemple

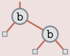
Soit $G := G(2)$ avec $G(2) := \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$.

Soit $\equiv$ la plus fine congruence de $\mathbf{F}(G)$ qui vérifie



$\equiv$


et


$\equiv$


.

$\mathbf{F}(G)/_{\equiv}$ est l'opérade 2as [Loday, Ronco, 2006].

Quotients d'opérades libres

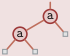
Le quotient de $\mathbf{F}(G)$ par $\equiv$ est l'opérade $\mathbf{F}(G)/_{\equiv}$ telle que :

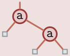
- ses éléments sont les classes d'équivalence $[x]_{\equiv}$ de $\mathbf{F}(G)$ par $\equiv$;
- la composition est définie par $[x]_{\equiv} \circ_i [y]_{\equiv} := [x \circ_i y]_{\equiv}$ où x et y sont des éléments quelconques de $[x]_{\equiv}$ et de $[y]_{\equiv}$;
- l'unité est $[$$]_{\equiv}$.

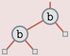
Exemple

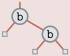
Soit $G := G(2)$ avec $G(2) := \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$.

Soit $\equiv$ la plus fine congruence de $\mathbf{F}(G)$ qui vérifie



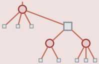
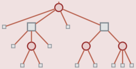
$\equiv$


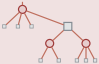
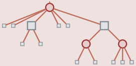
et


$\equiv$


.

$\mathbf{F}(G)/_{\equiv}$ est l'opérade 2as [Loday, Ronco, 2006].

 $\circ_2$  $=$ 

 $\circ_2$  $=$ 

Présentations par générateurs et relations

Soit $\mathcal{O}$ une opérade.

Une présentation de $\mathcal{O}$ est un couple $(G, \equiv)$ tel que

$$\mathcal{O} \simeq \mathbf{F}(G)/_{\equiv}.$$

Présentations par générateurs et relations

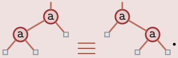
Soit $\mathcal{O}$ une opérade.

Une présentation de $\mathcal{O}$ est un couple $(G, \equiv)$ tel que

$$\mathcal{O} \simeq \mathbf{F}(G)/_{\equiv}.$$

Exemple

Assoc admet la présentation $(\{\mathtt{a}\}, \equiv)$ où $\mathtt{a}$ est binaire et $\equiv$ est la plus fine congruence de $\mathbf{F}(\{\mathtt{a}\})$ qui vérifie



Présentations par générateurs et relations

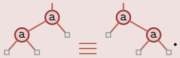
Soit $\mathcal{O}$ une opérade.

Une présentation de $\mathcal{O}$ est un couple $(G, \equiv)$ tel que

$$\mathcal{O} \simeq \mathbf{F}(G)/_{\equiv}.$$

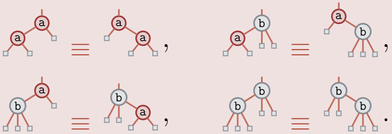
Exemple

Assoc admet la présentation $(\{\mathtt{a}\}, \equiv)$ où $\mathtt{a}$ est binaire et $\equiv$ est la plus fine congruence de $\mathbf{F}(\{\mathtt{a}\})$ qui vérifie



Exemple

Motz admet la présentation $(\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, \equiv)$ où $\mathtt{a}$ est binaire, $\mathtt{b}$ est ternaire et $\equiv$ est la plus fine congruence de $\mathbf{F}(\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\})$ qui vérifie



Plan

Opérades

- Des opérations sur des opérateurs
- Opérades libres et présentations
- Opérades linéaires

Opérades linéaires

Une opérade linéaire $\mathcal{O}$ est de la forme

$$\mathcal{O} := \bigoplus_{n \geqslant 1} \mathcal{O}(n),$$

où chaque $\mathcal{O}(n)$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel et où l'application de composition

$$\circ_i : \mathcal{O}(n) \otimes \mathcal{O}(m) \to \mathcal{O}(n + m - 1)$$

agit linéairement.

Opérades linéaires

Une opérade linéaire $\mathcal{O}$ est de la forme

$$\mathcal{O} := \bigoplus_{n \geqslant 1} \mathcal{O}(n),$$

où chaque $\mathcal{O}(n)$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel et où l'application de composition

$$\circ_i : \mathcal{O}(n) \otimes \mathcal{O}(m) \to \mathcal{O}(n + m - 1)$$

agit linéairement.

On peut construire, à partir d'une opérade $\mathcal{O}$, sa version linéarisée $\mathrm{Vect}(\mathcal{O})$.

Opérades linéaires

Une opérade linéaire $\mathcal{O}$ est de la forme

$$\mathcal{O} := \bigoplus_{n \geqslant 1} \mathcal{O}(n),$$

où chaque $\mathcal{O}(n)$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel et où l'application de composition

$$\circ_i : \mathcal{O}(n) \otimes \mathcal{O}(m) \to \mathcal{O}(n + m - 1)$$

agit linéairement.

On peut construire, à partir d'une opérade $\mathcal{O}$, sa version linéarisée $\mathrm{Vect}(\mathcal{O})$.

Une base de $\mathrm{Vect}(\mathcal{O})$ est formée par l'ensemble

$$\{\mathsf{B}_x : x \in \mathcal{O}\}$$

et sa composition vérifie, sur cette base,

$$\mathsf{B}_x \circ_i \mathsf{B}_y = \mathsf{B}_{x \circ_i y}.$$

Présentations d'opérades linéaires

Idéal d'une opérade linéaire libre $\mathrm{Vect}(\mathbf{F}(G))$: sous-espace vectoriel R de $\mathrm{Vect}(\mathbf{F}(G))$ tel que pour tout $x \in \mathrm{Vect}(\mathbf{F}(G))$ et $y \in R$,

$$x \circ_i y \in R \qquad \text{et} \qquad y \circ_j x \in R.$$

Présentations d'opérades linéaires

Idéal d'une opérade linéaire libre $\mathrm{Vect}(\mathbf{F}(G))$: sous-espace vectoriel R de $\mathrm{Vect}(\mathbf{F}(G))$ tel que pour tout $x \in \mathrm{Vect}(\mathbf{F}(G))$ et $y \in R$,

$$x \circ_i y \in R \qquad \text{et} \qquad y \circ_j x \in R.$$

Présentation d'une opérade linéaire $\mathcal{O}$: couple (G, R) tel que

$$\mathcal{O} \simeq \mathrm{Vect}(\mathbf{F}(G))/_R$$

où R est un idéal de $\mathrm{Vect}(\mathbf{F}(G))$.

Présentations d'opérades linéaires

Idéal d'une opérade linéaire libre $\mathrm{Vect}(\mathbf{F}(G))$: sous-espace vectoriel R de $\mathrm{Vect}(\mathbf{F}(G))$ tel que pour tout $x \in \mathrm{Vect}(\mathbf{F}(G))$ et $y \in R$,

$$x \circ_i y \in R \qquad \text{et} \qquad y \circ_j x \in R.$$

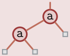
Présentation d'une opérade linéaire $\mathcal{O}$: couple (G, R) tel que

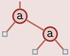
$$\mathcal{O} \simeq \mathrm{Vect}(\mathbf{F}(G))/_R$$

où R est un idéal de $\mathrm{Vect}(\mathbf{F}(G))$.

Exemple

L'opérade associative linéaire $\mathrm{Vect}(\mathsf{Assoc})$, admet la présentation $(\{\mathtt{a}\}, R)$ où $\mathtt{a}$ est binaire et R est l'idéal de $\mathrm{Vect}(\mathbf{F}(\{\mathtt{a}\}))$ engendré par



$-$


.

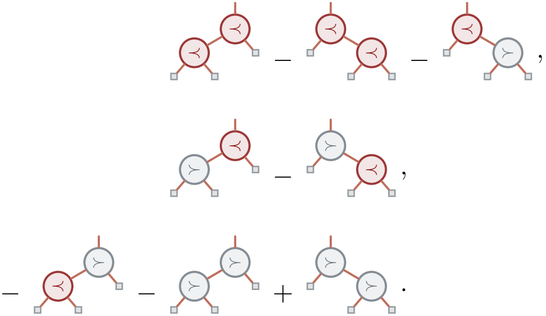
Plan

L'opérade dendriforme

L'opérade dendriforme Dendr est l'opérade linéaire admettant la présentation

$$(\{\prec, \succ\}, R),$$

où $\prec$ et $\succ$ sont binaires et R est l'idéal de $\mathrm{Vect}(\mathbf{F}(\{\prec, \succ\}))$ engendré par



Réalisation de l'opérade dendriforme

La définition précédente de Dendr par sa présentation n'est pas explicite.

Réalisation de l'opérade dendriforme

La définition précédente de Dendr par sa présentation n'est pas explicite.

On peut donner une réalisation de celle-ci (c.-à-d. une description de ses éléments et de sa composition) de la manière suivante :

Réalisation de l'opérade dendriforme

La définition précédente de Dendr par sa présentation n'est pas explicite.

On peut donner une réalisation de celle-ci (c.-à-d. une description de ses éléments et de sa composition) de la manière suivante :

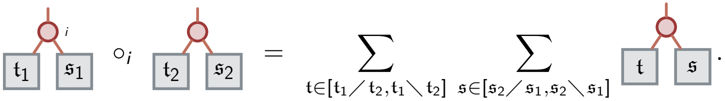
- les éléments d'arité n sont les arbres binaires à n nœuds internes ;

Réalisation de l'opérade dendriforme

La définition précédente de Dendr par sa présentation n'est pas explicite.

On peut donner une réalisation de celle-ci (c.-à-d. une description de ses éléments et de sa composition) de la manière suivante :

- les éléments d'arité n sont les arbres binaires à n nœuds internes ;
- la composition des arbres binaires en racine est définie par



Les intervalles sont ceux de l'ordre de Tamari [Tamari, 1962].

$\mathfrak{s} \diagup \mathfrak{t}$: greffe de la racine de $\mathfrak{s}$ sur la première feuille de $\mathfrak{t}$.

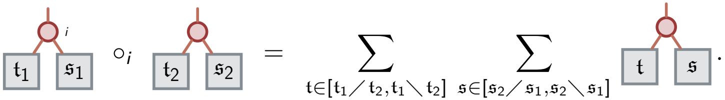
$\mathfrak{s} \diagdown \mathfrak{t}$: greffe de la racine de $\mathfrak{t}$ sur la dernière feuille de $\mathfrak{s}$.

Réalisation de l'opérade dendriforme

La définition précédente de Dendr par sa présentation n'est pas explicite.

On peut donner une réalisation de celle-ci (c.-à-d. une description de ses éléments et de sa composition) de la manière suivante :

- les éléments d'arité n sont les arbres binaires à n nœuds internes ;
- la composition des arbres binaires en racine est définie par



  Les intervalles sont ceux de l'ordre de Tamari [Tamari, 1962].

  $\mathfrak{s} \diagup \mathfrak{t}$: greffe de la racine de $\mathfrak{s}$ sur la première feuille de $\mathfrak{t}$.

  $\mathfrak{s} \diagdown \mathfrak{t}$: greffe de la racine de $\mathfrak{t}$ sur la dernière feuille de $\mathfrak{s}$.

- L'unité est l'arbre binaire qui possède un unique nœud interne .

Lien avec les algèbres dendriformes

Théorème - Définition [**Loday**, 2001]

Toute algèbre dendriforme est une représentation de l'opérade dendriforme.

Lien avec les algèbres dendriformes

Théorème - Définition [**Loday**, 2001]

Toute algèbre dendriforme est une représentation de l'opérade dendriforme.

En d'autres termes, toute algèbre dendriforme V est un espace vectoriel sur lequel Dendr agit de manière consistante.

Lien avec les algèbres dendriformes

Théorème - Définition [**Loday**, 2001]

Toute algèbre dendriforme est une représentation de l'opérade dendriforme.

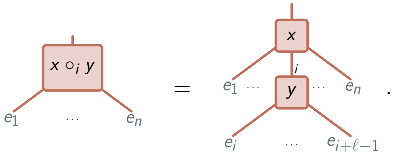
En d'autres termes, toute algèbre dendriforme V est un espace vectoriel sur lequel Dendr agit de manière consistante.

Cette action

$$\cdot : V^{\otimes n} \otimes \mathrm{Dendr}(n) \to V$$

vérifie

$$(e_1 \otimes \cdots \otimes e_n) \cdot (x \circ_i y) = (e_1 \otimes \cdots \otimes ((e_i \otimes \cdots \otimes e_{i+\ell-1}) \cdot y) \otimes \cdots \otimes e_n) \cdot x$$



Lien avec les algèbres dendriformes

Théorème - Définition [**Loday**, 2001]

Toute algèbre dendriforme est une représentation de l'opérade dendriforme.

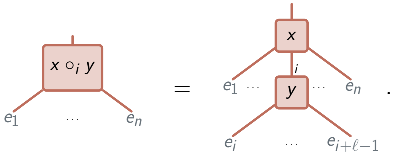
En d'autres termes, toute algèbre dendriforme V est un espace vectoriel sur lequel Dendr agit de manière consistante.

Cette action

$$\cdot : V^{\otimes n} \otimes \mathrm{Dendr}(n) \to V$$

vérifie

$$(e_1 \otimes \cdots \otimes e_n) \cdot (x \circ_i y) = (e_1 \otimes \cdots \otimes ((e_i \otimes \cdots \otimes e_{i+\ell-1}) \cdot y) \otimes \cdots \otimes e_n) \cdot x$$



Comme Dendr est engendrée par $\prec$ et $\succ$, il suffit de définir l'action de $\prec$ et de $\succ$ sur $V \otimes V$ pour la définir totalement.

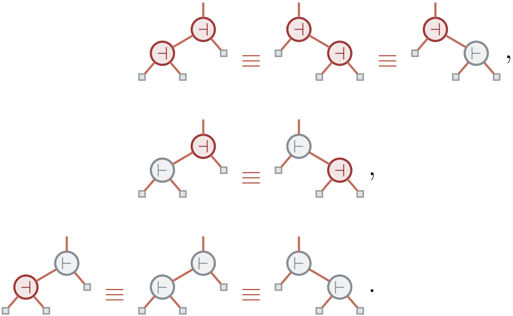
Plan

L'opérade diassociative

L'opérade diassociative [Loday, 2001] Dias est l'opérade qui admet la présentation

$$(\{\dashv, \vdash\}, \equiv)$$

où $\dashv$ et $\vdash$ sont binaires et $\equiv$ est la plus fine congruence de $\mathbf{F}(\{\dashv, \vdash\})$ qui vérifie



Réalisation de l'opérade diassociative

Dias admet la réalisation suivante :

Réalisation de l'opérade diassociative

Dias admet la réalisation suivante :

- ses éléments d'arité n sont les $\mathfrak{e}_{k,n}$ où $k \in [n]$;

Réalisation de l'opérade diassociative

Dias admet la réalisation suivante :

- ses éléments d'arité n sont les $\mathfrak{e}_{k,n}$ où $k \in [n]$;
- la composition est définie par

$$\mathfrak{e}_{k,n} \circ_i \mathfrak{e}_{\ell,m} := \begin{cases} \mathfrak{e}_{k+m-1,n+m-1} & \text{si } i < k, \\ \mathfrak{e}_{k+\ell-1,n+m-1} & \text{si } i = k, \\ \mathfrak{e}_{k,n+m-1} & \text{sinon } (i > k) \ ; \end{cases}$$

Réalisation de l'opérade diassociative

Dias admet la réalisation suivante :

- ses éléments d'arité n sont les $\mathfrak{e}_{k,n}$ où $k \in [n]$;
- la composition est définie par

$$\mathfrak{e}_{k,n} \circ_i \mathfrak{e}_{\ell,m} := \begin{cases} \mathfrak{e}_{k+m-1,n+m-1} & \text{si } i < k, \\ \mathfrak{e}_{k+\ell-1,n+m-1} & \text{si } i = k, \\ \mathfrak{e}_{k,n+m-1} & \text{sinon } (i > k) \text{ ;} \end{cases}$$

- l'unité est $\mathfrak{e}_{1,1}$.

Réalisation de l'opérade diassociative

Dias admet la réalisation suivante :

- ses éléments d'arité n sont les $\mathfrak{e}_{k,n}$ où $k \in [n]$;
- la composition est définie par

$$\mathfrak{e}_{k,n} \circ_i \mathfrak{e}_{\ell,m} := \begin{cases} \mathfrak{e}_{k+m-1,n+m-1} & \text{si } i < k, \\ \mathfrak{e}_{k+\ell-1,n+m-1} & \text{si } i = k, \\ \mathfrak{e}_{k,n+m-1} & \text{sinon } (i > k) \; ; \end{cases}$$

- l'unité est $\mathfrak{e}_{1,1}$.

Exemple

$\mathfrak{e}_{3,4} \circ_1 \mathfrak{e}_{2,3} = \mathfrak{e}_{5,6}$ $\mathfrak{e}_{3,4} \circ_3 \mathfrak{e}_{2,3} = \mathfrak{e}_{4,6}$ $\mathfrak{e}_{3,4} \circ_4 \mathfrak{e}_{2,3} = \mathfrak{e}_{3,6}$



Plan

L'opérade dendriforme

- Relations dendriformes
- L'opérade diassociative
- Dualité de Koszul

Dual de Koszul

Une opérade linéaire $\mathcal{O}$ est binaire quadratique si elle admet une présentation (G, R) où G est un ensemble de générateurs binaires et R est un idéal de $\mathrm{Vect}(\mathbf{F}(G))$ engendré des éléments de $\mathrm{Vect}(\mathbf{F}(G))(3)$.

Dual de Koszul

Une opérade linéaire $\mathcal{O}$ est binaire quadratique si elle admet une présentation (G, R) où G est un ensemble de générateurs binaires et R est un idéal de $\mathrm{Vect}(\mathbf{F}(G))$ engendré des éléments de $\mathrm{Vect}(\mathbf{F}(G))(3)$.

Le dual de Koszul [**Ginzburg, Kapranov**, 1994] d'une opérade linéaire binaire quadratique $\mathcal{O}$ admettant la présentation (G, R) est l'opérade $\mathcal{O}^!$.

Dual de Koszul

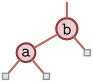
Une opérade linéaire $\mathcal{O}$ est binaire quadratique si elle admet une présentation (G, R) où G est un ensemble de générateurs binaires et R est un idéal de $\mathrm{Vect}(\mathbf{F}(G))$ engendré des éléments de $\mathrm{Vect}(\mathbf{F}(G))(3)$.

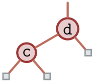
Le dual de Koszul [**Ginzburg**, **Kapranov**, 1994] d'une opérade linéaire binaire quadratique $\mathcal{O}$ admettant la présentation (G, R) est l'opérade $\mathcal{O}^!$.

Celle-ci admet la présentation $\left(G, R^\perp\right)$ où $R^\perp$ est l'orthogonal de R pour le produit scalaire

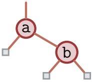
$$\langle -, - \rangle : \mathrm{Vect}(\mathbf{F}(G)) \otimes \mathrm{Vect}(\mathbf{F}(G)) \to \mathbb{Q}$$

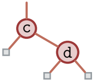
défini par

$\Big\langle$ 

, 

$\Big\rangle := \delta_{\mathtt{a},\mathtt{c}}\delta_{\mathtt{b},\mathtt{d}},$

$\Big\langle$ 

, 

$\Big\rangle := -\delta_{\mathtt{a},\mathtt{c}}\delta_{\mathtt{b},\mathtt{d}},$

$\langle -, - \rangle := 0$ dans les autres cas.

Propriété de la dualité de Koszul

Théorème [**Ginzburg**, **Kapranov**, 1994]

Pour toute opérade binaire quadratique $\mathcal{O}$,

$$\mathcal{O}^{!\,!} = \mathcal{O}.$$

Propriété de la dualité de Koszul

Théorème [**Ginzburg**, **Kapranov**, 1994]

Pour toute opérade binaire quadratique $\mathcal{O}$,

$$\mathcal{O}^{!^!} = \mathcal{O}.$$

Il y a un lien très étroit entre les dimensions de deux opérades duales l'une de l'autre, sous réserve qu'elles vérifient quelques propriétés supplémentaires (opérades dites de Koszul).

Propriété de la dualité de Koszul

Théorème [**Ginzburg**, **Kapranov**, 1994]

Pour toute opérade binaire quadratique $\mathcal{O}$,

$$\mathcal{O}^{!^!} = \mathcal{O}.$$

Il y a un lien très étroit entre les dimensions de deux opérades duales l'une de l'autre, sous réserve qu'elles vérifient quelques propriétés supplémentaires (opérades dites de Koszul).

En effet, en notant

$$P_{\mathcal{O}}(t) := \sum_{n \geqslant 1} (-1)^n \dim \mathcal{O}(n)\, t^n$$

la série de Poincaré d'une opérade de Koszul $\mathcal{O}$, on a

$$P_{\mathcal{O}}(P_{\mathcal{O}^!}(t)) = t.$$

Dual de Koszul de l'opérade dendriforme

Théoreme [**Loday**, 2001]

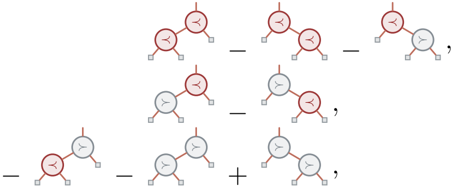
L'opérade dendriforme est le dual de Koszul de l'opérade diassociative.

Dual de Koszul de l'opérade dendriforme

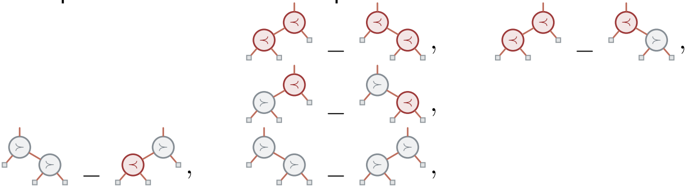
Théoreme [**Loday**, 2001]

L'opérade dendriforme est le dual de Koszul de l'opérade diassociative.

En effet, les relations de Dendr



produisent par dualité de Koszul respectivement les relations



qui sont celles de $\mathrm{Vect}($Dias$)$.

Motivations et objectifs

- Définir une généralisation $\mathcal{O}$ de l'opérade dendriforme.

Motivations et objectifs

- Définir une généralisation $\mathcal{O}$ de l'opérade dendriforme.

  Il y en a déjà un certain nombre :

  - l'opérade tridendriforme [**Loday, Ronco**, 2004] ;
  - l'opérade quadridendriforme [**Aguiar, Loday**, 2004] ;
  - l'opérade enneadendriforme [**Leroux**, 2004].

Motivations et objectifs

- Définir une généralisation $\mathcal{O}$ de l'opérade dendriforme.

  Il y en a déjà un certain nombre :
  - l'opérade tridendriforme [**Loday, Ronco**, 2004] ;
  - l'opérade quadridendriforme [**Aguiar, Loday**, 2004] ;
  - l'opérade enneadendriforme [**Leroux**, 2004].

- Étudier la manière dont $\mathcal{O}$ permet de séparer des produits associatifs.

Motivations et objectifs

- Définir une généralisation $\mathcal{O}$ de l'opérade dendriforme.

  Il y en a déjà un certain nombre :
  - l'opérade tridendriforme [**Loday, Ronco**, 2004] ;
  - l'opérade quadridendriforme [**Aguiar, Loday**, 2004] ;
  - l'opérade enneadendriforme [**Leroux**, 2004].

- Étudier la manière dont $\mathcal{O}$ permet de séparer des produits associatifs.

- Étudier $\mathcal{O}$ d'un point de vue combinatoire.

Motivations et objectifs

- Définir une généralisation $\mathcal{O}$ de l'opérade dendriforme.

  Il y en a déjà un certain nombre :
  - l'opérade tridendriforme [**Loday, Ronco**, 2004] ;
  - l'opérade quadridendriforme [**Aguiar, Loday**, 2004] ;
  - l'opérade enneadendriforme [**Leroux**, 2004].

- Étudier la manière dont $\mathcal{O}$ permet de séparer des produits associatifs.

- Étudier $\mathcal{O}$ d'un point de vue combinatoire.

Piste empruntée : proposer une généralisation de Dias puis en déduire par dualité de Koszul une généralisation de Dendr.

Motivations et objectifs

- Définir une généralisation $\mathcal{O}$ de l'opérade dendriforme.

  Il y en a déjà un certain nombre :

  - l'opérade tridendriforme [**Loday, Ronco**, 2004] ;
  - l'opérade quadridendriforme [**Aguiar, Loday**, 2004] ;
  - l'opérade enneadendriforme [**Leroux**, 2004].

- Étudier la manière dont $\mathcal{O}$ permet de séparer des produits associatifs.

- Étudier $\mathcal{O}$ d'un point de vue combinatoire.

Piste empruntée : proposer une généralisation de Dias puis en déduire par dualité de Koszul une généralisation de Dendr.

Résultat : généralisation à un paramètre entier $\gamma \geqslant 0$ de Dias et de Dendr.

Plan

La construction T

À partir d'un monoïde $(M, \bullet)$, on définit

La construction T

À partir d'un monoïde $(M, \bullet)$, on définit

- la collection graduée

$$\mathrm{T}M := \bigsqcup_{n \geqslant 1} \mathrm{T}M(n)$$

où

$$\mathrm{T}M(n) := \{x_1 \dots x_n : x_i \in M \text{ pour tout } i \in [n]\} \quad ;$$

La construction T

À partir d'un monoïde $(M, \bullet)$, on définit

- la collection graduée

$$\mathsf{T}M := \bigsqcup_{n \geqslant 1} \mathsf{T}M(n)$$

  où

$$\mathsf{T}M(n) := \{x_1 \dots x_n : x_i \in M \text{ pour tout } i \in [n]\} \enspace ;$$

- les compositions

$$\circ_i : \mathsf{T}M(n) \times \mathsf{T}M(m) \to \mathsf{T}M(n+m-1),$$

  définies pour tout $x \in \mathsf{T}M(n)$, $y \in \mathsf{T}M(m)$ et $i \in [n]$ par

$$x \circ_i y := x_1 \ \dots \ x_{i-1} \ (x_i \bullet y_1) \ \dots \ (x_i \bullet y_m) \ x_{i+1} \ \dots \ x_n.$$

La construction T

À partir d'un monoïde $(M, \bullet)$, on définit

- la collection graduée
$$\mathrm{T}M := \bigsqcup_{n \geqslant 1} \mathrm{T}M(n)$$
où
$$\mathrm{T}M(n) := \{x_1 \dots x_n : x_i \in M \text{ pour tout } i \in [n]\} \ ;$$

- les compositions
$$\circ_i : \mathrm{T}M(n) \times \mathrm{T}M(m) \to \mathrm{T}M(n+m-1),$$
définies pour tout $x \in \mathrm{T}M(n)$, $y \in \mathrm{T}M(m)$ et $i \in [n]$ par
$$x \circ_i y := x_1 \ \dots \ x_{i-1} \ \ (x_i \bullet y_1) \ \dots \ (x_i \bullet y_m) \ \ x_{i+1} \ \dots \ x_n.$$

Théorème

Pour tout monoïde M, $\mathrm{T}M$ est une opérade.

Exemples d'application de T

$\mathsf{T}(\mathbb{N}, +)$: opérade des mots d'entiers naturels.

Exemples d'application de T

$\mathsf{T}(\mathbb{N}, +)$: opérade des mots d'entiers naturels.

Exemple

$$2\mathbf{1}23 \circ_2 30313 = 24142423$$

Exemples d'application de T

$\mathsf{T}(\mathbb{N}, +)$: opérade des mots d'entiers naturels.

Exemple

$$2\mathbf{1}23 \circ_2 30313 = 24142423$$

$\mathsf{T}(\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*, \cdot)$: opérade des multimots sur l'alphabet$\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$.

Exemples d'application de T

$\mathsf{T}(\mathbb{N}, +)$: opérade des mots d'entiers naturels.

Exemple

$$2\mathbf{1}23 \circ_2 30313 = 24142423$$

$\mathsf{T}(\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*, \cdot)$: opérade des multimots sur l'alphabet$\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$.

Exemple

$$\begin{array}{ccccc} \mathtt{b} & \mathtt{a} & \mathbf{a} & \epsilon & \mathtt{b} \\ & \mathtt{b} & & & \mathtt{b} \\ & \mathtt{a} & & & \end{array} \circ_3 \begin{array}{cccc} \epsilon & \mathtt{a} & \epsilon & \mathtt{b} \\ & & & \mathtt{b} \end{array} = \begin{array}{cccccccc} \mathtt{b} & \mathtt{a} & \mathbf{a} & \mathbf{a} & \mathbf{a} & \mathbf{a} & \epsilon & \mathtt{b} \\ & \mathtt{b} & & \mathtt{a} & & \mathtt{b} & & \mathtt{b} \\ & \mathtt{a} & & & & \mathtt{b} & & \end{array}$$

Construction de Dias_γ

Soit $\gamma \geqslant 0$ un entier.

Soit Dias_γ la sous-opérade de $\mathsf{T}(\mathbb{N}, \max)$ engendrée par

$$\{0a, a0 : a \in [\gamma]\}.$$

Construction de Dias_γ

Soit $\gamma \geqslant 0$ un entier.

Soit Dias_γ la sous-opérade de $\mathsf{T}(\mathbb{N}, \max)$ engendrée par

$$\{0a, a0 : a \in [\gamma]\}.$$

Quelques exemples d'éléments des opérades Dias_γ :

Arité n	$\mathsf{Dias}_1(n)$
1	0
2	01, 10
3	011, 101, 110
4	0111, 1011, 1101, 1110

Construction de Dias_γ

Soit $\gamma \geqslant 0$ un entier.

Soit Dias_γ la sous-opérade de $\mathsf{T}(\mathbb{N}, \max)$ engendrée par

$$\{0a, a0 : a \in [\gamma]\}.$$

Quelques exemples d'éléments des opérades Dias_γ :

Arité n	$\mathsf{Dias}_1(n)$
1	0
2	01, 10
3	011, 101, 110
4	0111, 1011, 1101, 1110

Arité n	$\mathsf{Dias}_2(n)$
1	0
2	01, 02, 10, 20
3	011, 012, 021, 022, 101, 102, 110, 120, 201, 202, 210, 220
4	0111, 0112, 0121, 0122, 0211, 0212, 0221, 0222, 1011, 1012, 1021, 1022, 1101, 1102, 1110, 1120, 1201, 1202, 1210, 1220, 2011, 2012, 2021, 2022, 2101, 2102, 2110, 2120, 2201, 2202, 2210, 2220

Plan

Éléments de Dias_γ et dimensions

Proposition

Pour tout entier $\gamma \geqslant 0$, Dias_γ est l'ensemble des mots sur l'alphabet $\{0, \ldots, \gamma\}$ qui contiennent exactement un 0.

Éléments de Dias_γ et dimensions

Proposition

Pour tout entier $\gamma \geqslant 0$, Dias_γ est l'ensemble des mots sur l'alphabet $\{0, \ldots, \gamma\}$ qui contiennent exactement un 0.

Démonstration

Par récurrence sur l'arité.

Éléments de Dias_γ et dimensions

Proposition

Pour tout entier $\gamma \geqslant 0$, Dias_γ est l'ensemble des mots sur l'alphabet $\{0, \dots, \gamma\}$ qui contiennent exactement un 0.

Démonstration

Par récurrence sur l'arité.

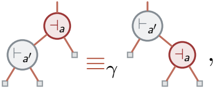
Conséquence :

$$\#\mathsf{Dias}_\gamma(n) = n\gamma^{n-1}.$$

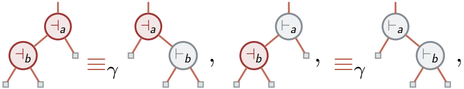
γ	Dimensions de Dias_γ
0	1, 0, 0, ...
1	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ...
2	1, 4, 12, 32, 80, 192, 448, 1024, ...
3	1, 6, 27, 108, 405, 1458, 5103, 17496, ...
4	1, 8, 48, 256, 1280, 6144, 28672, 131072, ...

Présentation de Dias$_\gamma$

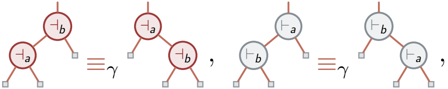
Soit $\equiv_\gamma$ la plus fine congruence de $\mathbf{F}(\{\dashv_a, \vdash_a : a \in [\gamma]\})$ qui vérifie



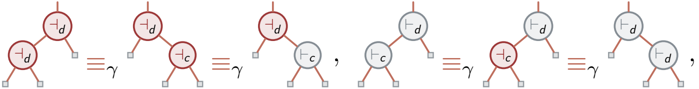
$a, a' \in [\gamma],$



$a < b \in [\gamma],$



$a < b \in [\gamma],$



$c \leqslant d \in [\gamma].$

Présentation de Dias_γ

Théorème

Pour tout entier $\gamma \geqslant 0$, Dias_γ admet la présentation

$$(\{\dashv_a, \vdash_a : a \in [\gamma]\}, \equiv_\gamma)\,.$$

Présentation de Dias_γ

La démonstration se base sur l'existence d'une application

$$\phi : \mathbf{F}(\{\dashv_a, \vdash_a : a \in [\gamma]\}) \to \mathsf{Dias}_\gamma$$

qui induit un isomorphisme d'opérades

$$\phi_{\equiv_\gamma} : \mathbf{F}(\{\dashv_a, \vdash_a : a \in [\gamma]\})/_{\equiv_\gamma} \to \mathsf{Dias}_\gamma.$$

Présentation de Dias$_\gamma$

La démonstration se base sur l'existence d'une application

$$\phi : \mathbf{F}(\{\dashv_a, \vdash_a : a \in [\gamma]\}) \to \mathrm{Dias}_\gamma$$

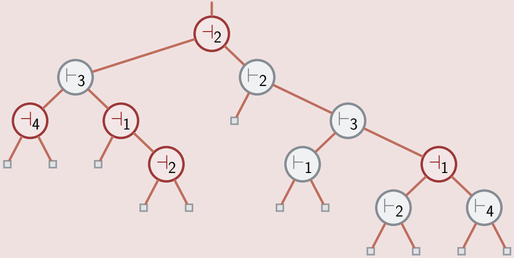
qui induit un isomorphisme d'opérades

$$\phi_{\equiv_\gamma} : \mathbf{F}(\{\dashv_a, \vdash_a : a \in [\gamma]\})/_{\equiv_\gamma} \to \mathrm{Dias}_\gamma.$$

Exemple

Dans $\mathbf{F}(\{\dashv_1, \vdash_1, \dashv_2, \vdash_2, \dashv_3, \vdash_3, \dashv_4, \vdash_4\})$,

$\mathfrak{t} :=$



Présentation de Dias_γ

La démonstration se base sur l'existence d'une application

$$\phi : \mathbf{F}(\{\dashv_a, \vdash_a : a \in [\gamma]\}) \to \mathrm{Dias}_\gamma$$

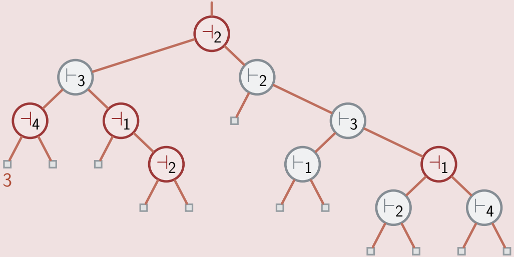
qui induit un isomorphisme d'opérades

$$\phi_{\equiv_\gamma} : \mathbf{F}(\{\dashv_a, \vdash_a : a \in [\gamma]\})/_{\equiv_\gamma} \to \mathrm{Dias}_\gamma.$$

Exemple

Dans $\mathbf{F}(\{\dashv_1, \vdash_1, \dashv_2, \vdash_2, \dashv_3, \vdash_3, \dashv_4, \vdash_4\})$,

$\mathfrak{t} :=$



Présentation de Dias_γ

La démonstration se base sur l'existence d'une application

$$\phi : \mathbf{F}(\{\dashv_a, \vdash_a : a \in [\gamma]\}) \to \mathsf{Dias}_\gamma$$

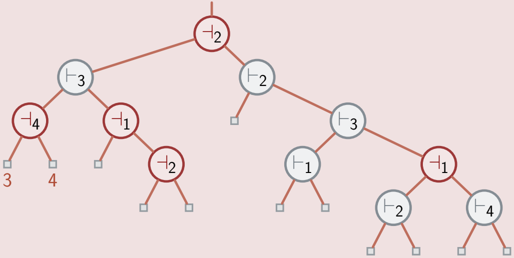
qui induit un isomorphisme d'opérades

$$\phi_{\equiv_\gamma} : \mathbf{F}(\{\dashv_a, \vdash_a : a \in [\gamma]\})/_{\equiv_\gamma} \to \mathsf{Dias}_\gamma.$$

Exemple

Dans $\mathbf{F}(\{\dashv_1, \vdash_1, \dashv_2, \vdash_2, \dashv_3, \vdash_3, \dashv_4, \vdash_4\})$,

$\mathfrak{t} :=$



Présentation de Dias_γ

La démonstration se base sur l'existence d'une application

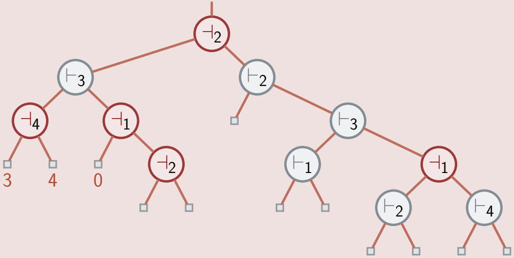
$$\phi : \mathbf{F}(\{\dashv_a, \vdash_a : a \in [\gamma]\}) \to \mathsf{Dias}_\gamma$$

qui induit un isomorphisme d'opérades

$$\phi_{\equiv_\gamma} : \mathbf{F}(\{\dashv_a, \vdash_a : a \in [\gamma]\})/_{\equiv_\gamma} \to \mathsf{Dias}_\gamma.$$

Exemple

Dans $\mathbf{F}(\{\dashv_1, \vdash_1, \dashv_2, \vdash_2, \dashv_3, \vdash_3, \dashv_4, \vdash_4\})$,

$\mathfrak{t} :=$ 

Présentation de Dias_γ

La démonstration se base sur l'existence d'une application

$$\phi : \mathbf{F}(\{\dashv_a, \vdash_a : a \in [\gamma]\}) \to \mathsf{Dias}_\gamma$$

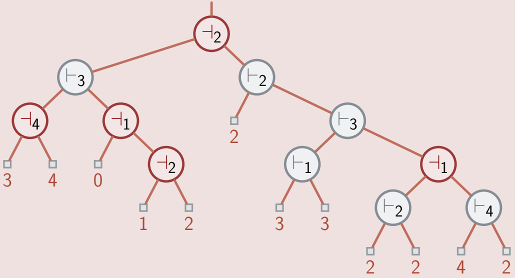
qui induit un isomorphisme d'opérades

$$\phi_{\equiv_\gamma} : \mathbf{F}(\{\dashv_a, \vdash_a : a \in [\gamma]\})/_{\equiv_\gamma} \to \mathsf{Dias}_\gamma.$$

Exemple

Dans $\mathbf{F}(\{\dashv_1, \vdash_1, \dashv_2, \vdash_2, \dashv_3, \vdash_3, \dashv_4, \vdash_4\})$,

$\mathfrak{t} :=$



Présentation de Dias_γ

La démonstration se base sur l'existence d'une application

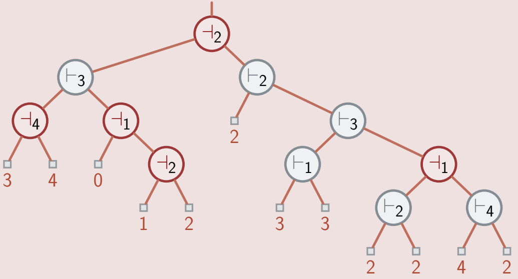
$$\phi : \mathbf{F}(\{\dashv_a, \vdash_a : a \in [\gamma]\}) \to \mathsf{Dias}_\gamma$$

qui induit un isomorphisme d'opérades

$$\phi_{\equiv_\gamma} : \mathbf{F}(\{\dashv_a, \vdash_a : a \in [\gamma]\})/_{\equiv_\gamma} \to \mathsf{Dias}_\gamma.$$

Exemple

Dans $\mathbf{F}(\{\dashv_1, \vdash_1, \dashv_2, \vdash_2, \dashv_3, \vdash_3, \dashv_4, \vdash_4\})$,

$\mathfrak{t} :=$ 

$$\phi(\mathfrak{t}) = 340122332242.$$

Généralisations de Dias

Les opérades Dias_1 et Dias admettent la même présentation.

Généralisations de Dias

Les opérades Dias_1 et Dias admettent la même présentation.

L'application $\phi : \mathsf{Dias}_1 \to \mathsf{Dias}$ définie par

$$\phi\left(1^{k-1}\ 0\ 1^{n-k}\right) := \mathfrak{e}_{k,n}$$

est un isomorphisme d'opérades.

Généralisations de Dias

Les opérades Dias_1 et Dias admettent la même présentation.

L'application $\phi : \mathsf{Dias}_1 \to \mathsf{Dias}$ définie par

$$\phi\left(1^{k-1}\ 0\ 1^{n-k}\right) := \mathfrak{e}_{k,n}$$

est un isomorphisme d'opérades.

Ainsi, et comme

$$\mathsf{Dias}_0 \subseteq \mathsf{Dias}_1 \subseteq \mathsf{Dias}_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathsf{Dias}_\gamma \subseteq \cdots,$$

les opérades Dias_γ, $\gamma \geqslant 2$ fournissent des généralisations de Dias.

Une autre base de Dias_γ

Soit $\preccurlyeq$ la relation d'ordre partielle sur $\mathsf{Dias}_\gamma(n)$ telle que $x \preccurlyeq y$ si $x_i \leqslant y_i$ pour tout $i \in [|x|]$.

Soit l'élément

$$\mathsf{K}_x := \sum_{x \preccurlyeq y} \mu(x, y) \mathsf{B}_y$$

de $\mathrm{Vect}(\mathsf{Dias}_\gamma)$, où μ est la fonction de Möbius du poset $(\mathsf{Dias}_\gamma(|x|), \preccurlyeq)$.

Une autre base de Dias_γ

Soit $\preccurlyeq$ la relation d'ordre partielle sur $\mathsf{Dias}_\gamma(n)$ telle que $x \preccurlyeq y$ si $x_i \leqslant y_i$ pour tout $i \in [|x|]$.

Soit l'élément

$$\mathsf{K}_x := \sum_{x \preccurlyeq y} \mu(x, y) \mathsf{B}_y$$

de $\mathrm{Vect}(\mathsf{Dias}_\gamma)$, où μ est la fonction de Möbius du poset $(\mathsf{Dias}_\gamma(|x|), \preccurlyeq)$.

Exemple

Dans $\mathrm{Vect}(\mathsf{Dias}_2)$,

$$\mathsf{K}_{102} = \mathsf{B}_{102} - \mathsf{B}_{202}.$$

Dans $\mathrm{Vect}(\mathsf{Dias}_3)$,

$$\mathsf{K}_{102} = \mathsf{B}_{102} - \mathsf{B}_{103} - \mathsf{B}_{202} + \mathsf{B}_{203}.$$

Une autre base de Dias_γ

Soit $\preccurlyeq$ la relation d'ordre partielle sur $\mathsf{Dias}_\gamma(n)$ telle que $x \preccurlyeq y$ si $x_i \leqslant y_i$ pour tout $i \in [|x|]$.

Soit l'élément

$$\mathsf{K}_x := \sum_{x \preccurlyeq y} \mu(x, y) \mathsf{B}_y$$

de $\mathrm{Vect}(\mathsf{Dias}_\gamma)$, où μ est la fonction de Möbius du poset $(\mathsf{Dias}_\gamma(|x|), \preccurlyeq)$.

Exemple

Dans $\mathrm{Vect}(\mathsf{Dias}_2)$,

$$\mathsf{K}_{102} = \mathsf{B}_{102} - \mathsf{B}_{202}.$$

Dans $\mathrm{Vect}(\mathsf{Dias}_3)$,

$$\mathsf{K}_{102} = \mathsf{B}_{102} - \mathsf{B}_{103} - \mathsf{B}_{202} + \mathsf{B}_{203}.$$

Par triangularité, les K_x forment une base de $\mathrm{Vect}(\mathsf{Dias}_\gamma)$ et par inversion de Möbius,

$$\mathsf{B}_x = \sum_{x \preccurlyeq y} \mathsf{K}_y.$$

Une autre base de Dias_γ

Proposition

Pour tout $\gamma \geqslant 0$, la composition de $\mathrm{Vect}(\mathsf{Dias}_\gamma)$ dans la base des K vérifie

$$\mathsf{K}_x \circ_i \mathsf{K}_y = \begin{cases} \mathsf{K}_{x \circ_i y} & \text{si } \min(y) > x_i, \\ \sum_{a = x_i}^{\gamma} \mathsf{K}_{\alpha_a(x \circ_i y)} & \text{si } \min(y) = x_i, \\ 0 & \text{sinon } (\min(y) < x_i), \end{cases}$$

où $\alpha_a(x \circ_i y)$ désigne le mot $x \circ_i y$ dans lequel le 0 provenant de y est remplacé par a.

Une autre base de Dias_γ

Proposition

Pour tout $\gamma \geqslant 0$, la composition de $\mathrm{Vect}(\mathsf{Dias}_\gamma)$ dans la base des K vérifie

$$\mathsf{K}_x \circ_i \mathsf{K}_y = \begin{cases} \mathsf{K}_{x \circ_i y} & \text{si } \min(y) > x_i, \\ \sum_{a = x_i}^{\gamma} \mathsf{K}_{\alpha_a(x \circ_i y)} & \text{si } \min(y) = x_i, \\ 0 & \text{sinon } (\min(y) < x_i), \end{cases}$$

où $\alpha_a(x \circ_i y)$ désigne le mot $x \circ_i y$ dans lequel le 0 provenant de y est remplacé par a.

Exemple

Dans $\mathrm{Vect}(\mathsf{Dias}_3)$,

$$\begin{aligned} \mathsf{K}_{012} \circ_1 \mathsf{K}_{120} &= \mathsf{K}_{12012}, \\ \mathsf{K}_{012} \circ_3 \mathsf{K}_{303} &= \mathsf{K}_{01323}, \\ \mathsf{K}_{012} \circ_2 \mathsf{K}_{210} &= \mathsf{K}_{02112} + \mathsf{K}_{02122} + \mathsf{K}_{02132}, \\ \mathsf{K}_{012} \circ_3 \mathsf{K}_{301} &= 0. \end{aligned}$$

Plan

Généralisations de Dendr

L'opérade $\mathrm{Vect}(\mathsf{Dias}_\gamma)$ est binaire quadratique. Elle admet donc un dual de Koszul.

Généralisations de Dendr

L'opérade $\mathrm{Vect}(\mathsf{Dias}_\gamma)$ est binaire quadratique. Elle admet donc un dual de Koszul.

Soit $\mathsf{Dendr}_\gamma := \mathrm{Vect}(\mathsf{Dias}_\gamma)^!$ l'opérade polydendriforme.

Généralisations de Dendr

L'opérade $\mathrm{Vect}(\mathsf{Dias}_\gamma)$ est binaire quadratique. Elle admet donc un dual de Koszul.

Soit $\mathsf{Dendr}_\gamma := \mathrm{Vect}(\mathsf{Dias}_\gamma)^!$ l'opérade polydendriforme.

Comme $\mathsf{Dias}_1 = \mathsf{Dias}$ et $\mathrm{Vect}(\mathsf{Dias})^! = \mathsf{Dendr}$,

$$\mathsf{Dendr}_1 = \mathsf{Dendr}.$$

Généralisations de Dendr

L'opérade $\mathrm{Vect}(\mathsf{Dias}_\gamma)$ est binaire quadratique. Elle admet donc un dual de Koszul.

Soit $\mathsf{Dendr}_\gamma := \mathrm{Vect}(\mathsf{Dias}_\gamma)^!$ l'opérade polydendriforme.

Comme $\mathsf{Dias}_1 = \mathsf{Dias}$ et $\mathrm{Vect}(\mathsf{Dias})^! = \mathsf{Dendr}$,

$$\mathsf{Dendr}_1 = \mathsf{Dendr}.$$

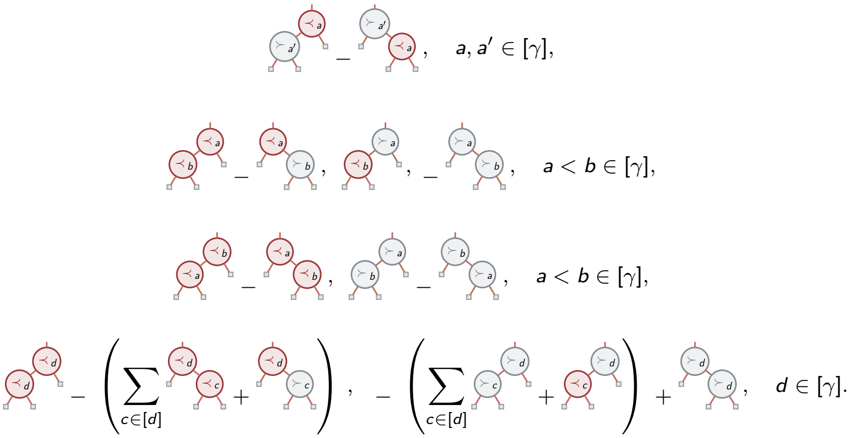
Ainsi, et comme

$$\mathsf{Dendr}_0 \subseteq \mathsf{Dendr}_1 \subseteq \mathsf{Dendr}_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathsf{Dendr}_\gamma \cdots ,$$

les opérades Dendr_γ, $\gamma \geqslant 2$ fournissent des généralisations de Dendr.

Présentation de Dendr_γ

Soit R_γ l'idéal de $\mathrm{Vect}(\mathbf{F}(\{\dashv_a, \vdash_a : a \in [\gamma]\}))$ engendré par



Présentation de Dendr_γ

Proposition

Pour tout $\gamma \geqslant 0$, l'opérade Dendr_γ admet la présentation

$$(\{\prec_a, \succ_a : a \in [\gamma]\}, R_\gamma).$$

Présentation de Dendr_γ

Proposition

Pour tout $\gamma \geqslant 0$, l'opérade Dendr_γ admet la présentation

$$(\{\prec_a, \succ_a : a \in [\gamma]\}, R_\gamma).$$

Démonstration

Les vecteurs qui engendrent R_γ en tant qu'il idéal sont obtenus en dualisant ceux qui engendrent l'idéal d'opérade induit par la congruence $\equiv_\gamma$.

Dimensions de Dendr$_\gamma$

Théorème

Pour tout $\gamma \geqslant 0$, l'opérade Dendr$_\gamma$ est de Koszul.

Dimensions de Dendr_γ

Théorème

Pour tout $\gamma \geqslant 0$, l'opérade Dendr_γ est de Koszul.

Ceci implique que la série de Poincaré $P_{\mathsf{Dendr}_\gamma}(t)$ de Dendr_γ vérifie

$$P_{\mathsf{Dendr}_\gamma}\left(-t + 2\gamma t^2 - 3\gamma^2 t^3 + \cdots\right) = t.$$

Dimensions de Dendr_γ

Théorème

Pour tout $\gamma \geqslant 0$, l'opérade Dendr_γ est de Koszul.

Ceci implique que la série de Poincaré $P_{\mathsf{Dendr}_\gamma}(t)$ de Dendr_γ vérifie

$$P_{\mathsf{Dendr}_\gamma}\left(-t + 2\gamma t^2 - 3\gamma^2 t^3 + \cdots\right) = t.$$

On en déduit

Proposition

Pour tous $\gamma \geqslant 0$ et $n \geqslant 1$,

$$\dim \mathsf{Dendr}_\gamma(n) = \gamma^{n-1} \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Dimensions de Dendr_γ

Théorème

Pour tout $\gamma \geqslant 0$, l'opérade Dendr_γ est de Koszul.

Ceci implique que la série de Poincaré $P_{\mathrm{Dendr}_\gamma}(t)$ de Dendr_γ vérifie

$$P_{\mathrm{Dendr}_\gamma}\left(-t + 2\gamma t^2 - 3\gamma^2 t^3 + \cdots\right) = t.$$

On en déduit

Proposition

Pour tous $\gamma \geqslant 0$ et $n \geqslant 1$,

$$\dim \mathrm{Dendr}_\gamma(n) = \gamma^{n-1} \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Les bases de $\mathrm{Dendr}_\gamma(n)$ sont ainsi indexées par les arbres binaires à n nœuds dont chaque arête est coloriée par un élément de $[\gamma]$.

Opérateurs associatifs dans Dendr_γ

Proposition

Pour tous $\gamma \geqslant 0$ et $\ell \in [\gamma] \cup \{0\}$, l'opérateur

$$\alpha_\ell := \sum_{a \in [\ell]} \prec_a + \succ_a$$

est associatif.

Opérateurs associatifs dans Dendr_γ

Proposition

Pour tous $\gamma \geqslant 0$ et $\ell \in [\gamma] \cup \{0\}$, l'opérateur

$$\alpha_\ell := \sum_{a \in [\ell]} \prec_a + \succ_a$$

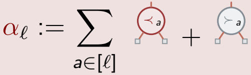
est associatif.

Démonstration

$\alpha_\ell \circ_1 \alpha_\ell - \alpha_\ell \circ_2 \alpha_\ell =$

Proposition

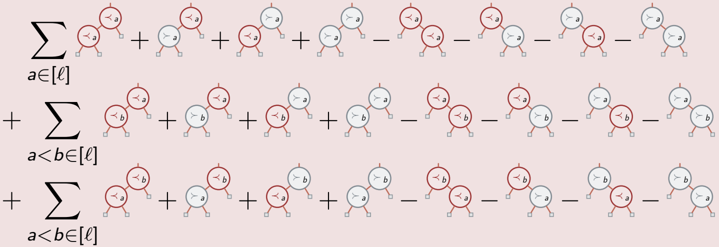
Pour tous $\gamma \geqslant 0$ et $\ell \in [\gamma] \cup \{0\}$, l'opérateur



est associatif.

Démonstration

$$\alpha_\ell \circ_1 \alpha_\ell - \alpha_\ell \circ_2 \alpha_\ell =$$



Opérateurs associatifs dans Dendr_γ

Proposition

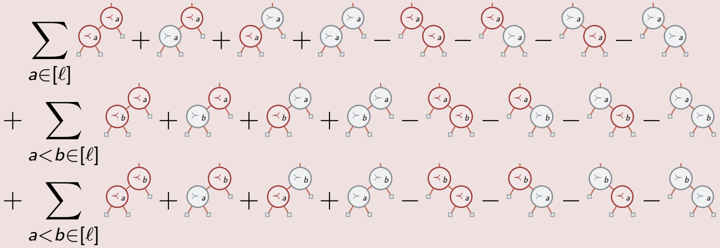
Pour tous $\gamma \geqslant 0$ et $\ell \in [\gamma] \cup \{0\}$, l'opérateur

$$\alpha_\ell := \sum_{a \in [\ell]}$$

est associatif.

Démonstration

$$\alpha_\ell \circ_1 \alpha_\ell - \alpha_\ell \circ_2 \alpha_\ell =$$



$$= 0$$

Algèbres polydendriformes

On peut maintenant définir la généralisation suivante des algèbres dendriformes.

Algèbres polydendriformes

On peut maintenant définir la généralisation suivante des algèbres dendriformes.

Une algèbre γ-polydendriforme est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel V muni de 2γ opérations

$$\prec_a : V \otimes V \to V \qquad \text{et} \qquad \succ_a : V \otimes V \to V, \qquad a \in [\gamma],$$

Algèbres polydendriformes

On peut maintenant définir la généralisation suivante des algèbres dendriformes.

Une algèbre γ-polydendriforme est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel V muni de 2γ opérations

$$\prec_a \,:\, V \otimes V \to V \qquad \text{et} \qquad \succ_a \,:\, V \otimes V \to V, \qquad a \in [\gamma],$$

qui vérifient, pour tous $x, y, z \in V$, les $3\gamma^2$ relations

$$(x \prec_d y) \prec_d z = \sum_{c \in [d]} x \prec_d (y \prec_c z) + x \prec_d (y \succ_c z), \quad d \in [\gamma],$$

$$(x \prec_a y) \prec_b z = x \prec_a (y \prec_b z), \quad a < b \in [\gamma],$$

$$(x \prec_b y) \prec_a z = x \prec_a (y \succ_b z), \quad a < b \in [\gamma],$$

$$(x \succ_{a'} y) \prec_a z = x \succ_{a'} (y \prec_a z), \quad a, a' \in [y],$$

$$(x \prec_b y) \succ_a z = x \succ_a (y \succ_b z), \quad a < b \in [\gamma],$$

$$(x \succ_b y) \succ_a z = x \succ_b (y \succ_a z), \quad a < b \in [\gamma],$$

$$\sum_{c \in [d]} (x \prec_c y) \succ_d z + (x \succ_c y) \succ_d z = x \succ_d (y \succ_d z), \quad d \in [\gamma].$$

γ-séparation d'une opération

Un produit

$$\cdot : V \otimes V \to V$$

se γ-sépare en 2γ opérations

$$\prec_a, \succ_a : V \otimes V \to V, \qquad a \in [\gamma],$$

si

$$\cdot = \sum_{a \in [\gamma]} \prec_a + \succ_a$$

et le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel V, muni des opérations $\prec_a$ et $\succ_a$, $a \in [\gamma]$, est une algèbre γ-dendriforme.

Conclusion et perspectives

On a obtenu une généralisation à un paramètre des opérades diassociatives et dendriformes.

Conclusion et perspectives

On a obtenu une généralisation à un paramètre des opérades diassociatives et dendriformes.

Il est possible de généraliser l'opérade triassociative et son dual de Koszul, l'opérade tridendriforme [**Loday, Ronco**, 2004] de la même manière (ajout du générateur $00 \in \mathsf{T}(\mathbb{N}, \max)$ lors de la construction).

Conclusion et perspectives

On a obtenu une généralisation à un paramètre des opérades diassociatives et dendriformes.

Il est possible de généraliser l'opérade triassociative et son dual de Koszul, l'opérade tridendriforme [**Loday, Ronco**, 2004] de la même manière (ajout du générateur 00 $\in \mathsf{T}(\mathbb{N}, \max)$ lors de la construction).

Il reste de nombreuses questions. Parmi celles-ci :

- donner une réalisation de l'opérade Dendr_γ ;

Conclusion et perspectives

On a obtenu une généralisation à un paramètre des opérades diassociatives et dendriformes.

Il est possible de généraliser l'opérade triassociative et son dual de Koszul, l'opérade tridendriforme [**Loday, Ronco**, 2004] de la même manière (ajout du générateur $00 \in \mathsf{T}(\mathbb{N}, \max)$ lors de la construction).

Il reste de nombreuses questions. Parmi celles-ci :

- donner une réalisation de l'opérade Dendr_γ ;
- trouver de bons exemples d'algèbres γ-dendriformes ;

Conclusion et perspectives

On a obtenu une généralisation à un paramètre des opérades diassociatives et dendriformes.

Il est possible de généraliser l'opérade triassociative et son dual de Koszul, l'opérade tridendriforme [**Loday, Ronco**, 2004] de la même manière (ajout du générateur $00 \in \mathsf{T}(\mathbb{N}, \max)$ lors de la construction).

Il reste de nombreuses questions. Parmi celles-ci :

- donner une réalisation de l'opérade Dendr_γ ;
- trouver de bons exemples d'algèbres γ-dendriformes ;
- utiliser la base des K pour obtenir une présentation alternative de Dias_γ et de Dendr_γ ;

Conclusion et perspectives

On a obtenu une généralisation à un paramètre des opérades diassociatives et dendriformes.

Il est possible de généraliser l'opérade triassociative et son dual de Koszul, l'opérade tridendriforme [**Loday, Ronco**, 2004] de la même manière (ajout du générateur $00 \in \mathsf{T}(\mathbb{N}, \max)$ lors de la construction).

Il reste de nombreuses questions. Parmi celles-ci :

- donner une réalisation de l'opérade Dendr_γ ;
- trouver de bons exemples d'algèbres γ-dendriformes ;
- utiliser la base des K pour obtenir une présentation alternative de Dias_γ et de Dendr_γ ;
- relier les opérades Dias_γ et Dendr_γ aux opérades connues (définition de morphismes).