Opérades colorées
et
configurations non croisées bicolorées

Samuele Giraudo, LIGM, Université Paris-Est Marne-la-Vallée

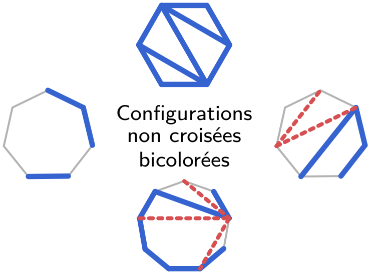
—

Travail en commun avec
Frédéric Chapoton, ICJ, Université Claude Bernard Lyon 1

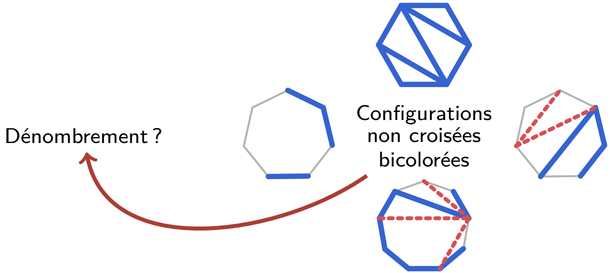
Séminaire de l'équipe Combinatoire et algorithmes du LITIS

23 mai 2013

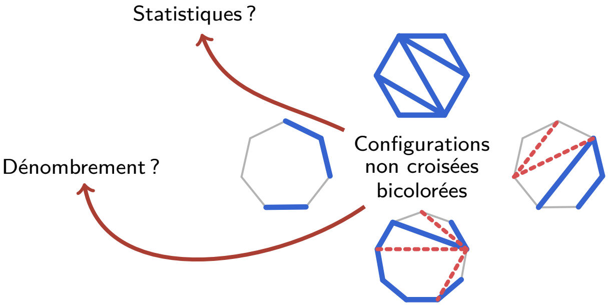
Vue d'ensemble



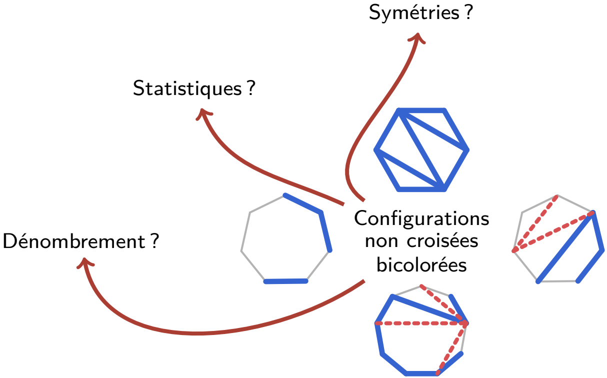
Vue d'ensemble



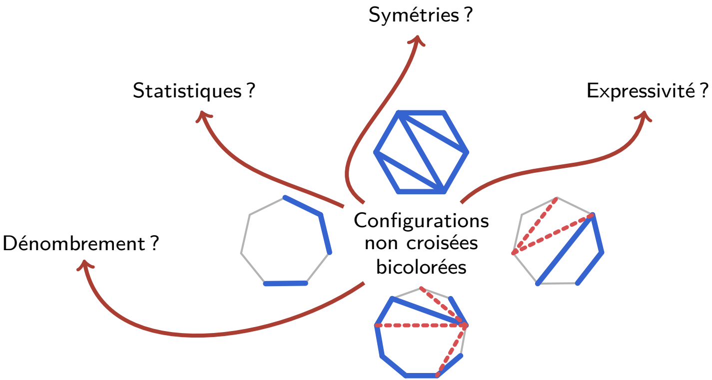
Vue d'ensemble



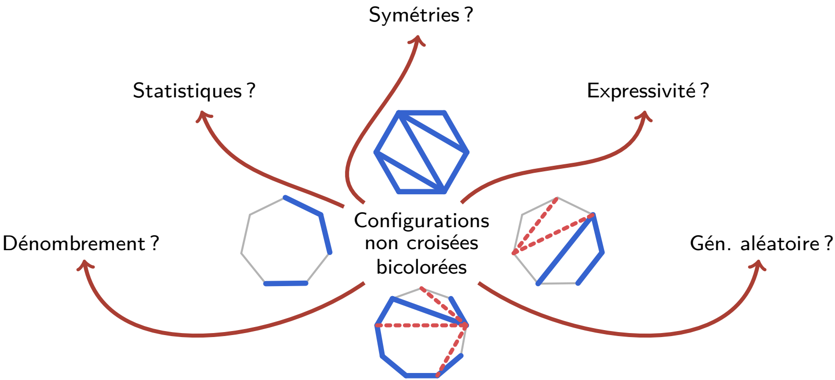
Vue d'ensemble



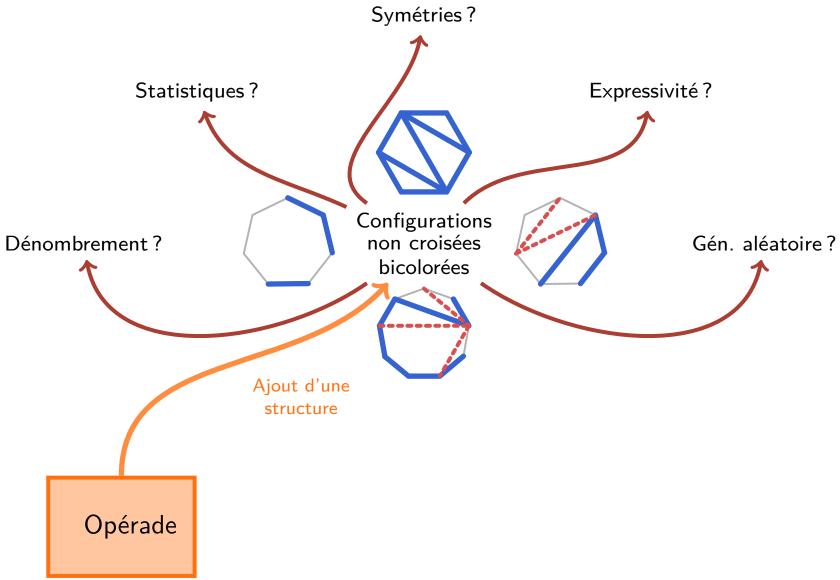
Vue d'ensemble



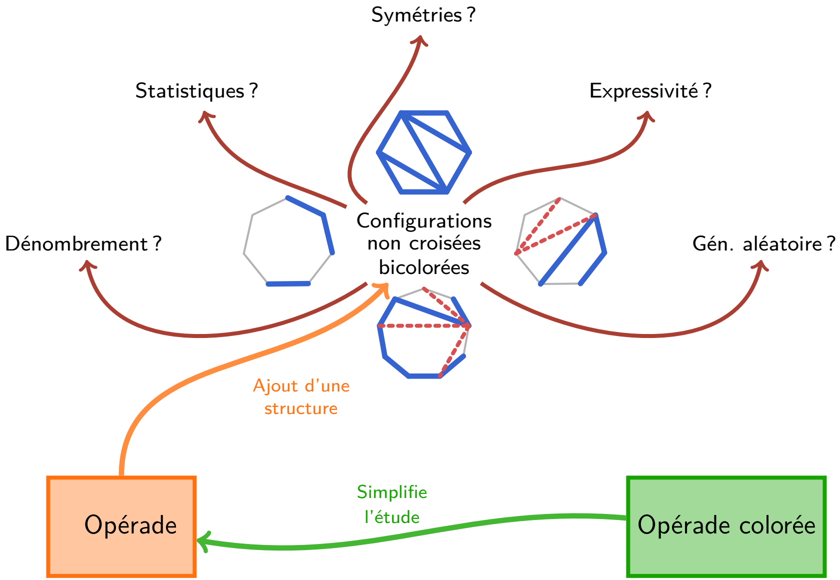
Vue d'ensemble



Vue d'ensemble



Vue d’ensemble



Plan

Configurations non croisées bicolorées
- Configurations non croisées bicolorées
- Motivations

Opérades
- Définitions et exemples
- Opérades libres, quotients et présentations

Opérades colorées et opérades enveloppantes
- Opérades colorées
- Opérades enveloppantes

Opérade des configurations non croisées bicolorées
- Structure d'opérade
- Propriétés de l'opérade
- Sous-opérades

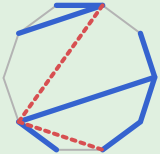
Annexe

Configurations non croisées bicolorées

Configuration non croisée bicolorée (CNCB) : polygone régulier muni d'arêtes bleues ▬ et d'arêtes rouges ---- vérifiant :

1. aucune arête ne croise une autre ;
2. aucune arête rouge n'est sur un côté.

Exemple



est une CNCB de taille 9 (nombre de côtés du polygone moins un).

Motivations

Généralisation des triangulations et des arbres non croisés [**Noy**, 1998].

Existence d'opérades sur des CNCBs particulières [**Chapoton**, 2007].

Liens avec la théorie des moules [**Ecalle**, XX^{e} siècle].

Question

Dénombrement des CNCBs ?

Question

Codage d'objets combinatoires par des CNCBs munis de contraintes ?

Question

Génération aléatoire et uniforme de CNCBs ?

Plan

Configurations non croisées bicolorées
- Configurations non croisées bicolorées
- Motivations

Opérades
- Définitions et exemples
- Opérades libres, quotients et présentations

Opérades colorées et opérades enveloppantes
- Opérades colorées
- Opérades enveloppantes

Opérade des configurations non croisées bicolorées
- Structure d'opérade
- Propriétés de l'opérade
- Sous-opérades

Annexe

Opérades

Opérade : triplet $(\mathcal{P}, \circ_i, \mathbf{1})$ où

1. $\mathcal{P}$ est un ensemble gradué

$$\mathcal{P} := \biguplus_{n \geqslant 1} \mathcal{P}(n) \ ;$$

2. $\circ_i$ est une application de greffe

$$\circ_i : \mathcal{P}(n) \times \mathcal{P}(m) \to \mathcal{P}(n+m-1), \qquad n, m \geqslant 1, i \in [n] \ ;$$

3. $\mathbf{1}$ est un élément de $\mathcal{P}(1)$, appelé unité.

Ces données doivent vérifier des axiomes.

Axiomes des opérades

Pour tous $x \in \mathcal{P}(n)$, $y \in \mathcal{P}(m)$ et $z \in \mathcal{P}(k)$, les relations suivantes doivent être vérifiées.

Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z), \qquad i \in [n], j \in [m].$$

Commutativité :

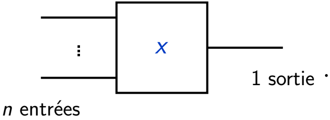
$$(x \circ_i y) \circ_{j+m-1} z = (x \circ_j z) \circ_i y, \qquad 1 \leqslant i < j \leqslant n.$$

Unitarité :

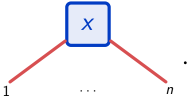
$$\mathbf{1} \circ_1 x = x = x \circ_i \mathbf{1}, \qquad i \in [n].$$

Arbres et éléments d'une opérade

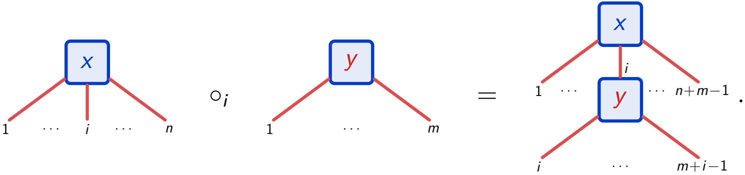
Élément de $\mathcal{P}(n) \rightsquigarrow$ opérateur d'arité n :



Opérateur à n entrées $\rightsquigarrow$ arbre plan enraciné à n feuilles :



Application de greffe $\rightsquigarrow$ greffe d'arbres :



Arbres et relations dans une opérade

Associativité :

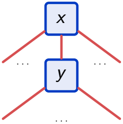
Commutativité :

Unitarité :

Arbres et relations dans une opérade

Associativité :

$(x \circ_i y)$



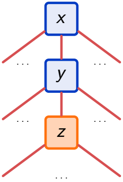
Commutativité :

Unitarité :

Arbres et relations dans une opérade

Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z$$



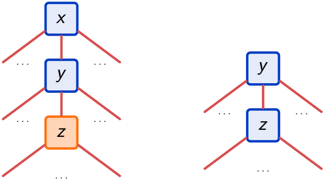
Commutativité :

Unitarité :

Arbres et relations dans une opérade

Associativité :

$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z \qquad (y \circ_j z)$



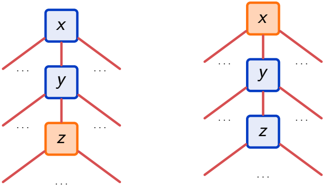
Commutativité :

Unitarité :

Arbres et relations dans une opérade

Associativité :

$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z \qquad x \circ_i (y \circ_j z)$



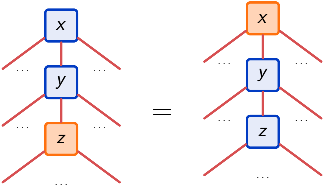
Commutativité :

Unitarité :

Arbres et relations dans une opérade

Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$



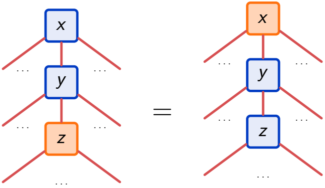
Commutativité :

Unitarité :

Arbres et relations dans une opérade

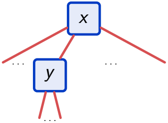
Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$



Commutativité :

$$(x \circ_i y)$$

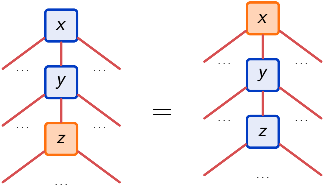


Unitarité :

Arbres et relations dans une opérade

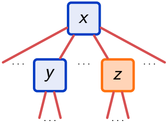
Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$



Commutativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{j+m-1} z$$

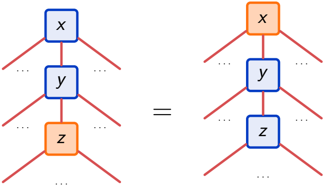


Unitarité :

Arbres et relations dans une opérade

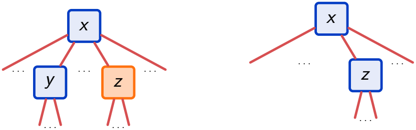
Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$



Commutativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{j+m-1} z \qquad (x \circ_j z)$$

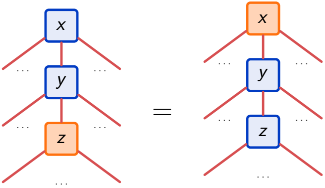


Unitarité :

Arbres et relations dans une opérade

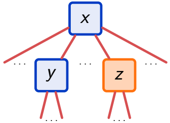
Associativité :

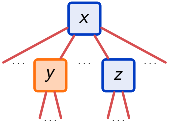
$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$



Commutativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{j+m-1} z \qquad (x \circ_j z) \circ_i y$$



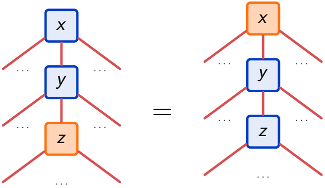


Unitarité :

Arbres et relations dans une opérade

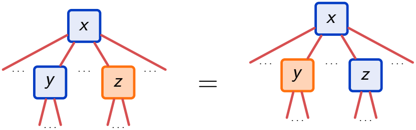
Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$



Commutativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{j+m-1} z = (x \circ_j z) \circ_i y$$

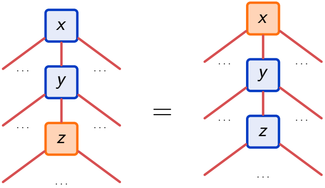


Unitarité :

Arbres et relations dans une opérade

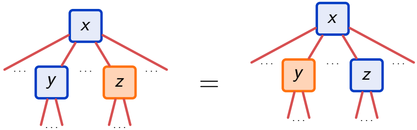
Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$



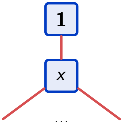
Commutativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{j+m-1} z = (x \circ_j z) \circ_i y$$



Unitarité :

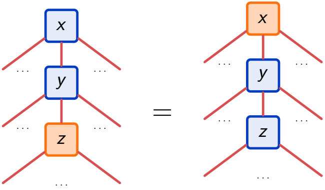
$$\mathbf{1} \circ_1 x$$



Arbres et relations dans une opérade

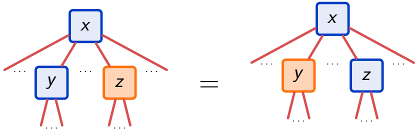
Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$



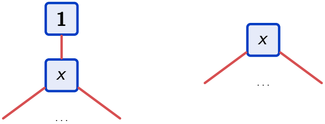
Commutativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{j+m-1} z = (x \circ_j z) \circ_i y$$



Unitarité :

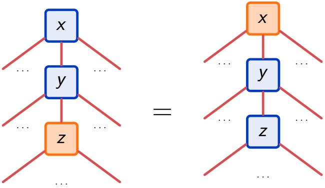
$\mathbf{1} \circ_1 x \qquad x$



Arbres et relations dans une opérade

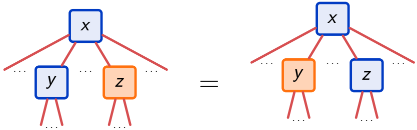
Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$



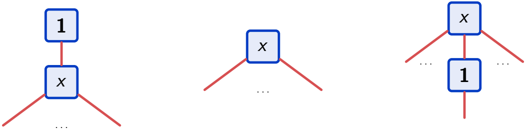
Commutativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{j+m-1} z = (x \circ_j z) \circ_i y$$



Unitarité :

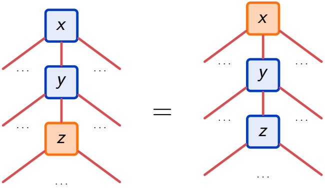
$$\mathbf{1} \circ_1 x \qquad x \qquad x \circ_i \mathbf{1}$$



Arbres et relations dans une opérade

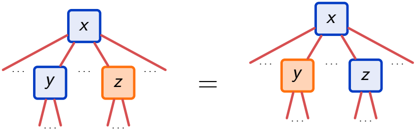
Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$



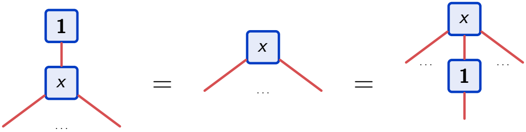
Commutativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{j+m-1} z = (x \circ_j z) \circ_i y$$



Unitarité :

$$\mathbf{1} \circ_1 x = x = x \circ_i \mathbf{1}$$



Exemple : l'opérade associative

Opérade associative $(\mathsf{Assoc}, \circ_i, \mathtt{a}_1)$ définie par

$$\mathsf{Assoc}(n) := \{\mathtt{a}_n\}, \qquad n \geqslant 1$$

et

$$\mathtt{a}_n \circ_i \mathtt{a}_m := \mathtt{a}_{n+m-1}, \qquad n, m \geqslant 1, i \in [n].$$

Exemple

$$\mathtt{a}_4 \circ_2 \mathtt{a}_3 = \mathtt{a}_6, \qquad \mathtt{a}_1 \circ_1 \mathtt{a}_1 = \mathtt{a}_1, \qquad \mathtt{a}_4 \circ_4 \mathtt{a}_1 = \mathtt{a}_4$$

Exemple : l'opérade des compositions d'entiers

Opérade des compositions d'entiers $(\mathrm{Comp}, \circ_i, \square)$ définie par

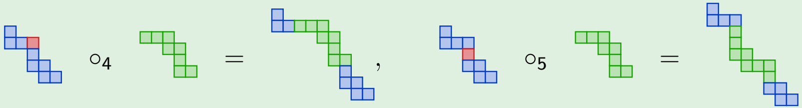
$$\mathrm{Comp}(n) := \{D : D \text{ ruban d'une composition de } n\}, \qquad n \geqslant 1$$

et

$$C \circ_i D := \begin{cases} C \leftarrow_i D & \text{si rien au dessus de la } i^{\text{e}} \text{ case de } C, \\ C \leftarrow_i D^t & \text{sinon,} \end{cases}$$

pour tous $n \geqslant 1$, $i \in [n]$, $C \in \mathrm{Comp}(n)$ et $D \in \mathrm{Comp}$.

Exemple



Questions sur les opérades

L'étude d'une opérade $\mathcal{P}$ comprend la recherche de :

1. sa série de Hilbert $\mathrm{F}(t) := \sum_{n \geqslant 1} \# \mathcal{P}(n)\, t^n$;
2. son ensemble de générateurs ;
3. les relations non triviales entre ses générateurs ;
4. ses symétries, *i.e.*, ses automorphismes et ses antiautomorphismes ;
5. ses sous-opérades et ses quotients.

Exemple : l'opérade associative

1. Série de Hilbert :

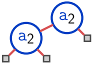
$$\mathsf{F}(t) = t + t^2 + t^3 + t^4 + \cdots = \frac{t}{1-t}.$$

2. Famille génératrice : $\{\mathsf{a}_2\}$. En effet,

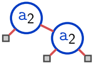
$$\mathsf{a}_3 = \mathsf{a}_2 \circ_1 \mathsf{a}_2, \qquad \mathsf{a}_4 = \mathsf{a}_3 \circ_1 \mathsf{a}_2, \qquad \mathsf{a}_5 = \mathsf{a}_4 \circ_1 \mathsf{a}_2, \qquad \textit{etc.}$$

3. Relations non triviales :

$$\mathsf{a}_2 \circ_1 \mathsf{a}_2 = \mathsf{a}_2 \circ_2 \mathsf{a}_2 \qquad \simeq$$



$=$



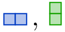
.

4. Symétries : l'automorphisme trivial seulement.

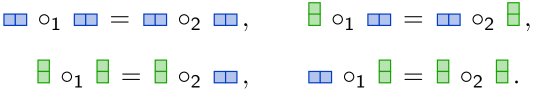
Exemple : l'opérade des compositions d'entiers

1. Série de Hilbert :

$$F(t) = t + 2t^2 + 4t^3 + 8t^4 + \cdots = \frac{t}{1-2t}.$$

2. Famille génératrice : $\{$  $\}$.

3. Relations non triviales :



4. Symétries : l'automorphisme trivial seulement.

Opérades libres

Opérade libre engendrée par $G := \uplus_{n \geqslant 2} G(n)$: opérade $\left(\mathcal{F}(G), \circ_i, \mathbb{1}\right)$ où

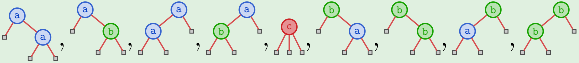
$$\mathcal{F}(G)(n) := \{T : T \text{ arb. plan enrac. } G\text{-étiqu. à } n \text{ feuilles}\}, \qquad n \geqslant 1$$

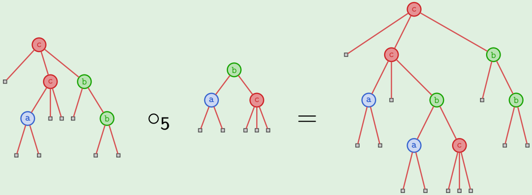
et

$$S \circ_i T := S \leftarrow_i T, \qquad n \geqslant 1, i \in [n], S \in \mathcal{F}(G)(n), T \in \mathcal{F}(G).$$

Exemple

Soit $G := G(2) \uplus G(3)$ avec $G(2) := \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ et $G(3) := \{\mathtt{c}\}$.

$\mathcal{F}(G)(3) = \Big\{$  $\Big\}$



Évaluations et expressions en arbre

Soit $\mathcal{P}$ une opérade.

Évaluation : application

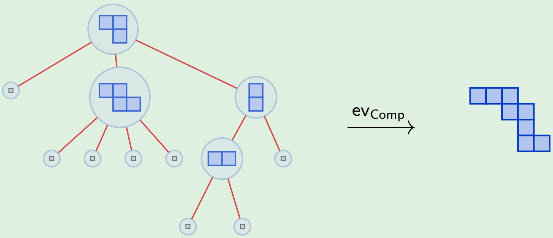
$$\mathrm{ev}_{\mathcal{P}} : \mathcal{F}(\mathcal{P}) \to \mathcal{P}.$$

$\mathrm{ev}_{\mathcal{P}}(x)$: évaluation dans $\mathcal{P}$ de l'arbre syntaxique $x \in \mathcal{F}(\mathcal{P})$.

L'arbre $x \in \mathcal{F}(\mathcal{P})$ est une expression en arbre de $\mathrm{ev}_{\mathcal{P}}(x) \in \mathcal{P}$.

Exemple

Dans Comp :



Congruences d'opérades libres

Congruence de $\mathcal{F}(G)$: relation d'équivalence $\equiv$ sur $\mathcal{F}(G)$ telle que

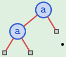
$$x \equiv x' \quad \text{implique} \quad |x| = |x'|$$

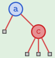
et

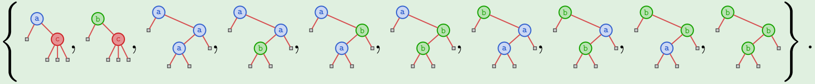
$$x \equiv x' \text{ et } y \equiv y' \quad \text{impliquent} \quad x \circ_i y \equiv x' \circ_i y', \qquad i \in [|x|].$$

Exemple

Soit $G := G(2) \uplus G(3)$ avec $G(2) := \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}$ et $G(3) := \{\mathsf{c}\}$. Soit $\equiv$ la plus fine congruence de $\mathcal{F}(G)$ qui vérifie

 $\equiv$  et  $\equiv$ .

Classe d'équivalence de  :



Quotients d'opérades libres

Quotient de $\mathcal{F}(G)$ par la congruence $\equiv$: opérade $\left(\mathcal{F}(G)/_{\equiv}, \circ_i^{\equiv}, [\;]_{\equiv}\right)$ où

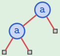
$$\mathcal{F}(G)/_{\equiv}(n) := \{[x]_{\equiv} : x \in \mathcal{F}(G)(n)\}, \qquad n \geqslant 1$$

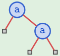
et

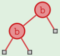
$$[x]_{\equiv} \circ_i^{\equiv} [y]_{\equiv} := [x \circ_i y]_{\equiv}, \qquad n \geqslant 1, i \in [n], x \in \mathcal{F}(G)(n), y \in \mathcal{F}(G).$$

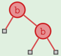
Exemple

Soit $G := G(2)$ avec $G(2) := \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$. Soit $\equiv$ la plus fine congruence de $\mathcal{F}(G)$ qui vérifie



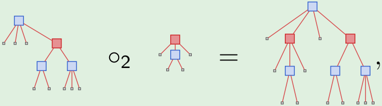
$\equiv$


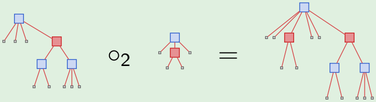
et


$\equiv$


.

$\mathcal{F}(G)/_{\equiv}$ est l'opérade $2as$ [**Loday**, **Ronco**, 2006].



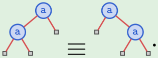
,


Présentations par générateurs et relations

Présentation d'une opérade $\mathcal{P}$: couple $(G, \equiv)$ tel que $\mathcal{P} \simeq \mathcal{F}(G)/_{\equiv}$.

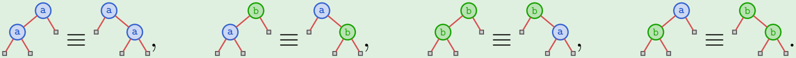
Exemple

Assoc $\simeq \mathcal{F}(\{\mathtt{a}\})/_{\equiv}$ où $\mathtt{a}$ est binaire et $\equiv$ vérifie



Exemple

Comp $\simeq \mathcal{F}(\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\})/_{\equiv}$ où $\mathtt{a}$ et $\mathtt{b}$ sont binaires et $\equiv$ vérifie



Plan

Configurations non croisées bicolorées
Configurations non croisées bicolorées
Motivations

Opérades
Définitions et exemples
Opérades libres, quotients et présentations

Opérades colorées et opérades enveloppantes
Opérades colorées
Opérades enveloppantes

Opérade des configurations non croisées bicolorées
Structure d'opérade
Propriétés de l'opérade
Sous-opérades

Annexe

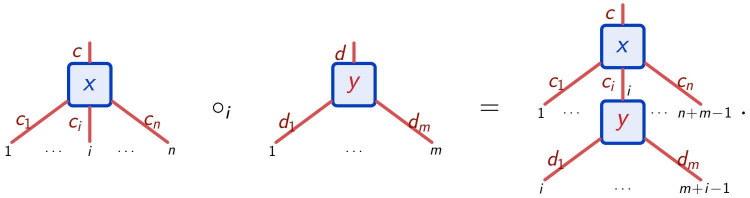
Opérades colorées

Opérade k-colorée : quintuplet $(\mathcal{C}, \circ_i, \mathbf{1}_c, \mathbf{in}, \mathbf{out})$ où $(\mathcal{C}, \circ_i, \mathbf{1}_c)$ est une opérade avec $\circ_i$ partiellement définie et

$$\mathbf{in} : \mathcal{C}(n) \to [k]^n \quad \text{et} \quad \mathbf{out} : \mathcal{C}(n) \to [k]$$

applications qui associent à tout $x \in \mathcal{C}$ des couleurs d'entrées ($\mathbf{in}$) et une couleur de sortie ($\mathbf{out}$).

Greffe $x \circ_i y$ définie ssi $\mathbf{out}(y) = \mathbf{in}(x)_i$ (*i.e.*, $d = c_i$) :



Remarque : toute opérade est une opérade 1-colorée.

Exemple : une version colorée de l'opérade associative

Soit $(\mathsf{Assoc}_C, \circ_i, \mathbf{1}_c)$ l'opérade 2-colorée définie par

$$\mathsf{Assoc}_C(n) := \{\mathtt{b}_n\}, \qquad n \geqslant 1$$

où

$$\mathbf{in}(\mathtt{b}_n) := 12^{n-1} \quad \text{et} \quad \mathbf{out}(\mathtt{b}_n) := 1$$

et

$$\mathtt{b}_n \circ_i \mathtt{b}_m := \mathtt{b}_{n+m-1}, \qquad n, m \geqslant 1, i \in [n]$$

lorsque les couleurs correspondent.

Exemple

$$\mathtt{b}_4 \circ_1 \mathtt{b}_3 = \mathtt{b}_6, \qquad \mathtt{b}_5 \circ_3 \mathbf{1}_2 = \mathtt{b}_5, \qquad \mathtt{b}_5 \circ_1 \mathbf{1}_1 = \mathtt{b}_5$$

$$\mathtt{b}_4 \circ_2 \mathtt{b}_3, \qquad \mathtt{b}_5 \circ_2 \mathbf{1}_1, \qquad \mathtt{b}_5 \circ_1 \mathbf{1}_2 \quad \text{non définies.}$$

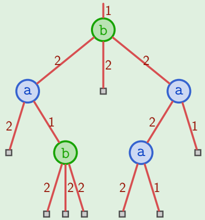
Opérades colorées

Les notions de liberté, d'évaluation, de congruence, de quotient et de présentation se généralisent de manière naturelle aux opérades colorées.

Opérade colorée libre engendrée par G : notée $\mathcal{F}_C(G)$.

Exemple

Soit $G := G(2) \uplus G(3)$ avec $G(2) := \{\mathtt{a}\}$, $G(3) := \{\mathtt{b}\}$ où $\mathbf{in}(\mathtt{a}) := 21$, $\mathbf{out}(\mathtt{a}) := 2$, $\mathbf{in}(\mathtt{b}) := 222$ et $\mathbf{out}(\mathtt{b}) := 1$. Alors,

$x :=$ 

est un élément d'arité 8 de $\mathcal{F}_C(G)$ vérifiant $\mathbf{in}(x) = 22222211$ et $\mathbf{out}(x) = 1$.

Opérade enveloppante d'une opérade colorée

Soit $\mathcal{C}$ une opérade colorée.

Opérade enveloppante $\mathcal{H}(\mathcal{C})$ de $\mathcal{C}$: plus petite opérade non colorée qui contient $\mathcal{C}$.

Plus formellement,

$$\mathcal{H}(\mathcal{C}) := \mathcal{F}(\mathcal{C}^+)/_{\equiv},$$

où

$$\mathcal{C}^+ := \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}(1)$$

et $\equiv$ est la plus fine congruence de $\mathcal{F}(\mathcal{C}^+)$ vérifiant

$$x \equiv y \quad \text{si} \quad \mathrm{ev}_{\mathcal{C}}(x) \text{ et } \mathrm{ev}_{\mathcal{C}}(y) \text{ sont définis dans } \mathcal{C} \text{ et } \mathrm{ev}_{\mathcal{C}}(x) = \mathrm{ev}_{\mathcal{C}}(y).$$

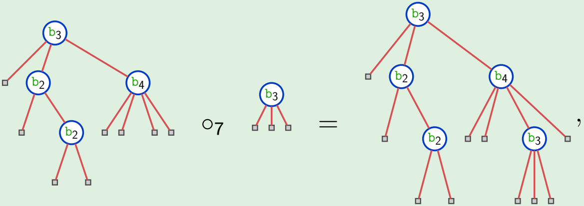
Opérade enveloppante d'une opérade colorée

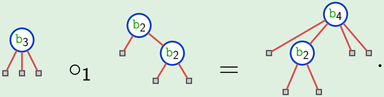
Intuitivement, tout élément $x \in \mathcal{H}(\mathcal{C})$ est un arbre de $\mathcal{F}(\mathcal{C}^+)$ sans aucune correspondance de couleurs. On les appelle arbres anticolorés.

Greffe : greffe d'arbres puis évaluation lorsque correspondance de couleurs.

Exemple

Dans $\mathcal{H}(\mathrm{Assoc}_C)$,





Décompositions en bulles

Soient $\mathcal{P}$ une opérade et $\mathcal{C}$ une opérade colorée.

$\mathcal{C}$ est une décomposition en bulles de $\mathcal{P}$ si $\mathcal{P} = \mathcal{H}(\mathcal{C})$.

Intérêts : l'étude de $\mathcal{P}$ est reportée sur l'étude en $\mathcal{C}$. En effet, on déduit de l'étude de $\mathcal{C}$:

1. la série de Hilbert de $\mathcal{P}$;
2. les générateurs de $\mathcal{P}$;
3. les relations entre générateurs de $\mathcal{P}$;
4. les symétries de $\mathcal{P}$.

La structure d'opérade colorée est plus contrainte que celle d'opérade.

De ce fait, l'étude de $\mathcal{C}$ est souvent beaucoup plus simple que celle de $\mathcal{P}$.

Conséquence sur les séries de Hilbert

Soit $\mathcal{C}$ une opérade k-colorée. On pose pour tout $c \in [k]$,

$$\mathrm{B}_c(z_1, \dots, z_k) := \sum_{\substack{x \in \mathcal{C}^+ \\ \mathbf{out}(x) = c}} z_1^{|\mathbf{in}(x)|_1} \dots z_k^{|\mathbf{in}(x)|_k}.$$

Exemple

Dans Assoc_C,

$$\mathrm{B}_1(z_1, z_2) = z_1 z_2 + z_1 z_2^2 + z_1 z_2^3 + \cdots \qquad \text{et} \qquad \mathrm{B}_2(z_1, z_2) = 0.$$

Proposition

La série de Hilbert $\mathrm{F}(t)$ d'une opérade $\mathcal{P}$ qui admet l'opérade k-colorée $\mathcal{C}$ comme décomposition en bulles est solution du système d'équations

$$\mathrm{F}(t) = t + \mathrm{F}_1 + \cdots + \mathrm{F}_k,$$
$$\mathrm{F}_c(t) = \mathrm{B}_c(\mathrm{F} - \mathrm{F}_1, \dots, \mathrm{F} - \mathrm{F}_k), \qquad c \in [k].$$

Plan

Configurations non croisées bicolorées

Configurations non croisées bicolorées

Motivations

Opérades

Définitions et exemples

Opérades libres, quotients et présentations

Opérades colorées et opérades enveloppantes

Opérades colorées

Opérades enveloppantes

Opérade des configurations non croisées bicolorées

Structure d'opérade

Propriétés de l'opérade

Sous-opérades

Annexe

Retour sur les CNCBs

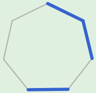
Base d'une CNCB : son côté le plus bas.

CNCB basée : si base bleue.

Autres côtés numérotés de 1 à n de gauche à droite à partir de la base.

Bulle : CNCB de taille supérieure à 2 sans diagonale.

Exemple

$\mathfrak{B}$:=  .

bord $\mathrm{b}(\mathfrak{C})$ d'une CNCB $\mathfrak{C}$: mot u tel $u_i = 2$ si le i^{e} côté de $\mathfrak{C}$ est bleu et $u_i = 1$ sinon.

Exemple

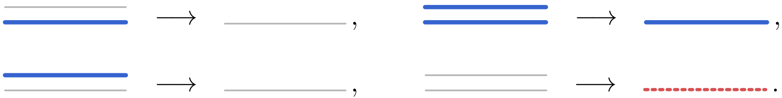
$$\mathrm{b}(\mathfrak{B}) = 111221$$

L'opérade des CNCBs

Opérade des CNCBs $(\mathbf{CNCB}, \circ_i, \_)$ définie par

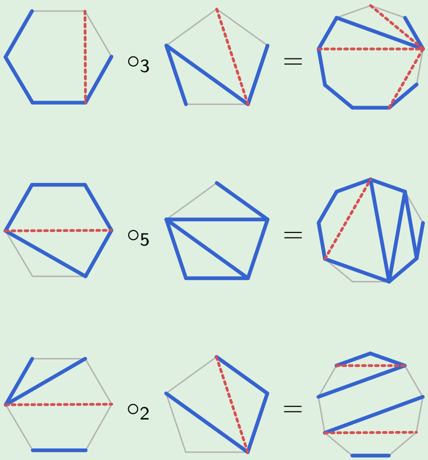
$$\mathbf{CNCB}(n) := \{\mathfrak{C} : \mathfrak{C} \text{ CNCB de taille } n\}, \qquad n \geqslant 1$$

et pour tous $n \geqslant 1$, $i \in [n]$, $\mathfrak{C} \in \mathbf{CNCB}(n)$ et $\mathfrak{D} \in \mathbf{CNCB}$, $\mathfrak{C} \circ_i \mathfrak{D}$ est la CNCB obtenue en collant la base de $\mathfrak{D}$ sur le i^{e} côté de $\mathfrak{C}$ puis en simplifiant les deux côtés qui se superposent selon les règles



L’opérade des CNCBs

Exemple



L'opérade colorée des bulles

Opérade 2-colorée des bulles $(\mathbf{CNCB}_C, \circ_i, \mathbf{1}_c, \mathbf{in}, \mathbf{out})$ définie par

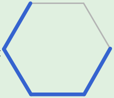
$$\mathbf{CNCB}_C(n) := \{\mathfrak{B} : \mathfrak{B} \text{ bulle de taille } n\}, \qquad n \geqslant 1$$

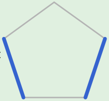
où

$$\mathbf{in}(\mathfrak{B}) := \mathrm{b}(\mathfrak{B}) \quad \text{et} \quad \mathbf{out}(\mathfrak{B}) := \begin{cases} 1 & \text{si } \mathfrak{B} \text{ basée,} \\ 2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Greffe : celle de **CNCB** lorsque définie.

Exemple

$\mathfrak{B}_1 :=$  , $\quad \mathbf{in}(\mathfrak{B}_1) = 22112, \quad \mathbf{out}(\mathfrak{B}_1) = 1$

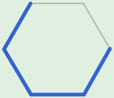
$\mathfrak{B}_2 :=$  , $\quad \mathbf{in}(\mathfrak{B}_2) = 2112, \quad \mathbf{out}(\mathfrak{B}_2) = 2$

Greffes définies : $\mathfrak{B}_1 \circ_1 \mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{B}_1 \circ_2 \mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{B}_1 \circ_5 \mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{B}_2 \circ_2 \mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2 \circ_3 \mathfrak{B}_1$.

L'opérade colorée des bulles

Toute bulle $\mathfrak{B}$ est entièrement spécifiée par le couple $(\mathbf{in}(\mathfrak{B}), \mathbf{out}(\mathfrak{B}))$.

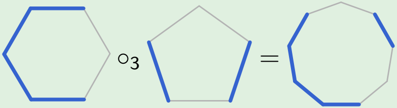
Exemple



$$\simeq \quad (22112, 1)$$

Ainsi, $\mathbf{CNCB}_C$ est l'opérade 2-colorée des couples de $[2]^n \times [2]$ dont la greffe est la substitution.

Exemple



$$(22211, 1) \circ_3 (2112, 2) = (22211211, 1)$$

Décomposition en bulles

Théorème

L'opérade **CNCB** est l'opérade enveloppante de $\mathbf{CNCB}_{\mathcal{C}}$.

Sa démonstration se base sur les deux lemmes suivants.

Lemme

L'application qui envoie une CNCB vers son arbre dual est une bijection.

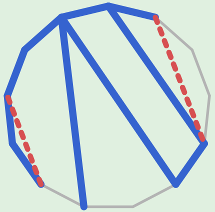
Lemme

Les éléments de $\mathcal{H}(\mathbf{CNCB}_{\mathcal{C}})$ sont des arbres duaux de CNCBs.

Décomposition en bulles

Arbre dual d'une CNCB $\mathfrak{C}$: arbre plan enraciné des faces de $\mathfrak{C}$ dont la relation de parenté est l'adjacence.

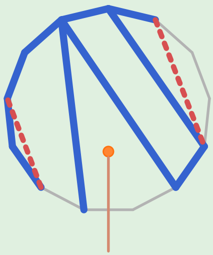
Exemple



Décomposition en bulles

Arbre dual d'une CNCB $\mathfrak{C}$: arbre plan enraciné des faces de $\mathfrak{C}$ dont la relation de parenté est l'adjacence.

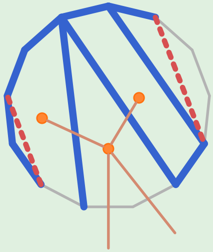
Exemple

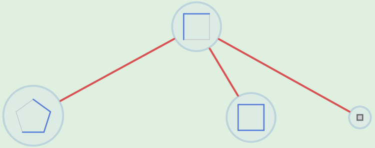


Décomposition en bulles

Arbre dual d'une CNCB $\mathfrak{C}$: arbre plan enraciné des faces de $\mathfrak{C}$ dont la relation de parenté est l'adjacence.

Exemple

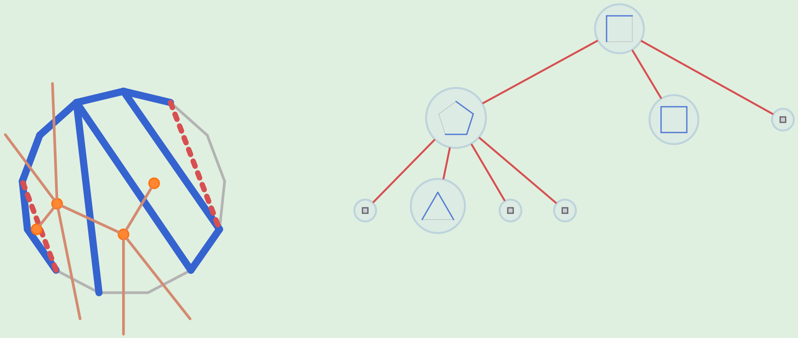




Décomposition en bulles

Arbre dual d'une CNCB $\mathfrak{C}$: arbre plan enraciné des faces de $\mathfrak{C}$ dont la relation de parenté est l'adjacence.

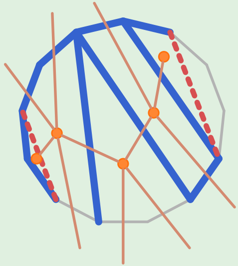
Exemple

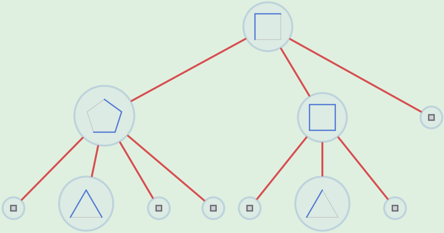


Décomposition en bulles

Arbre dual d'une CNCB $\mathfrak{C}$: arbre plan enraciné des faces de $\mathfrak{C}$ dont la relation de parenté est l'adjacence.

Exemple

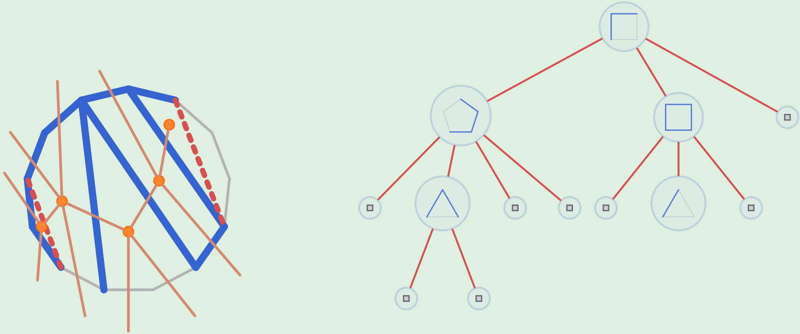




Décomposition en bulles

Arbre dual d'une CNCB $\mathfrak{C}$: arbre plan enraciné des faces de $\mathfrak{C}$ dont la relation de parenté est l'adjacence.

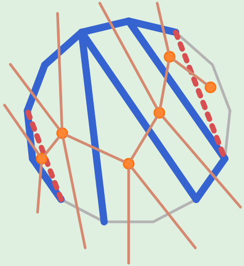
Exemple

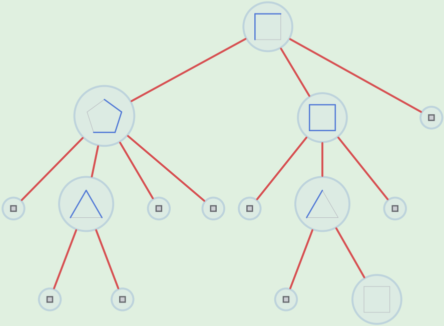


Décomposition en bulles

Arbre dual d'une CNCB $\mathfrak{C}$: arbre plan enraciné des faces de $\mathfrak{C}$ dont la relation de parenté est l'adjacence.

Exemple

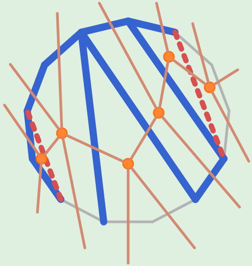


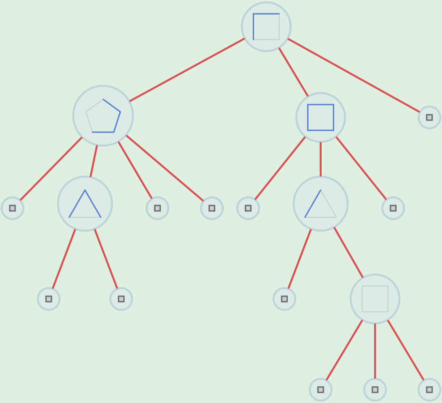


Décomposition en bulles

Arbre dual d'une CNCB $\mathfrak{C}$: arbre plan enraciné des faces de $\mathfrak{C}$ dont la relation de parenté est l'adjacence.

Exemple

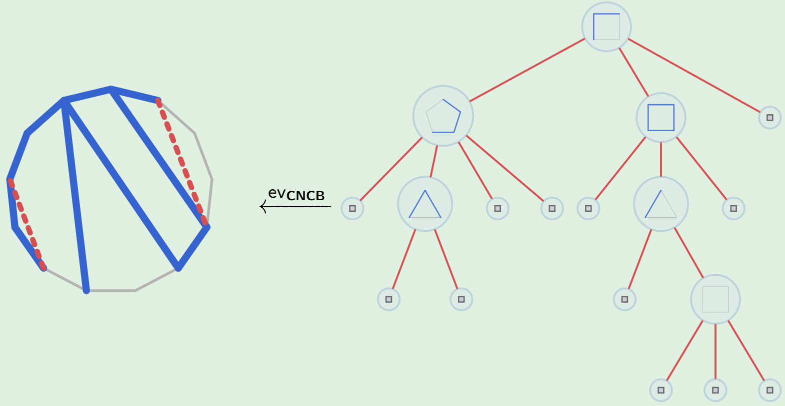




Décomposition en bulles

Arbre dual d'une CNCB $\mathfrak{C}$: arbre plan enraciné des faces de $\mathfrak{C}$ dont la relation de parenté est l'adjacence.

Exemple



Série de Hilbert

Comme il n'y a pas de contrainte sur les bulles, on a dans $\mathbf{CNCB}_C$

$$\mathsf{B}_1(z_1, z_2) = \mathsf{B}_2(z_1, z_2) = \frac{(z_1 + z_2)^2}{1 - z_1 - z_2}.$$

Proposition

La série de Hilbert F de **CNCB** vérifie

$$-t - t^2 + (1 - 4t)\mathsf{F} - 3\mathsf{F}^2 = 0.$$

Démonstration.

Comme $\mathbf{CNCB} = \mathcal{H}(\mathbf{CNCB}_C)$, F est solution du système

$$\mathsf{F} = t + \mathsf{F}_1 + \mathsf{F}_2,$$

$$\mathsf{F}_1 = \mathsf{F}_2 = \frac{(t + \mathsf{F}_2 + t + \mathsf{F}_1)^2}{1 - (t + \mathsf{F}_2) - (t + \mathsf{F}_1)}.$$

□

$\mathsf{F}(t)$ est de la forme

$$\mathsf{F}(t) = t + 8t^2 + 992t^3 + 13760t^4 + 204416t^5 + 3180800t^6 + \cdots .$$

Dénombrement raffiné des CNCBs

Série dénombrant les CNCBs par taille et par nombre de faces :

$$\mathsf{F}(t, z) := \sum_{\mathfrak{C} \in \mathbf{CNCB}} t^{|\mathfrak{C}|} z^{\mathsf{faces}(\mathfrak{C})}.$$

En modifiant le système précédent en

$$\mathsf{F} = t + \mathsf{F}_1 + \mathsf{F}_2,$$

$$\mathsf{F}_1 = \mathsf{F}_2 = z \frac{(t + \mathsf{F}_2 + t + \mathsf{F}_1)^2}{1 - (t + \mathsf{F}_2) - (t + \mathsf{F}_1)},$$

on obtient l'expression algébrique

$$-t + (1 - 2z)t^2 + (1 - 4zt)\mathsf{F} + (-1 - 2z)\mathsf{F}^2 = 0.$$

$\mathsf{F}(t, z)$ est de la forme

$$\mathsf{F}(t, z) = t + 8zt^2 + (16z + 64z^2)t^3 + (32z + 320z^2 + 640z^3)t^4$$
$$(64z + 1152z^2 + 5376z^3 + 7168z^4)t^5 + \cdots .$$

Famille génératrice

Proposition

L'opérade 2-colorée **CNCB**$_C$ est engendrée par les huit bulles

de taille deux.

Démonstration.

Par récurrence sur l'arité de la bulle à engendrer. □

Proposition

L'opérade **CNCB** est engendrée par les huit CNCBs

de taille deux.

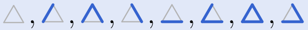
Démonstration.

Impliqué par le fait que $\mathbf{CNCB} = \mathcal{H}(\mathbf{CNCB}_C)$. □

Présentation par générateurs et relations

Théorème

L'opérade **CNCB** admet la présentation

CNCB $= \mathcal{F}$ ({}) $/_{\equiv}$,

où $\equiv$ est la congruence d'opérade vérifiant

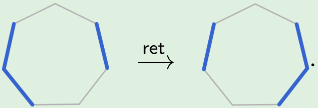
Démonstration.

Comme **CNCB** $= \mathcal{H}$ (**CNCB**$_C$), il suffit de montrer que ces relations sont les seules non triviales dans **CNCB**$_C$. $\square$

Symétries

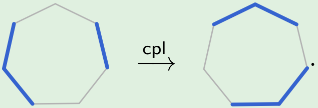
ret($\mathfrak{B}$) : retourne $\mathfrak{B}$ selon l'axe vertical.

Exemple



cpl($\mathfrak{B}$) : complémente $\mathfrak{B}$ en échangeant ses côtés bleus et vides.

Exemple



Proposition

cpl : $\mathbf{CNCB}_C \to \mathbf{CNCB}_C$ est un automorphisme d'opérades colorées.

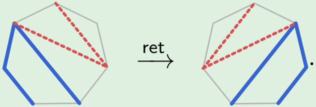
ret : $\mathbf{CNCB}_C \to \mathbf{CNCB}_C$ est un antiautomorphisme d'opérades colorées.

Symétries

Comme **CNCB** $= \mathcal{H}(\mathbf{CNCB}_C)$, cpl et ret sont aussi des symétries de **CNCB**. Elles s'y expriment de la manière suivante.

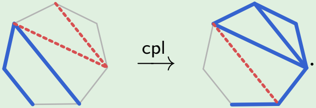
ret($\mathfrak{C}$) retourne $\mathfrak{C}$ selon l'axe vertical.

Exemple



cpl($\mathfrak{C}$) échange ses diagonales bleues et rouges, et ses côtés bleus et vides.

Exemple

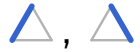


Sous-opérades binaires de **CNCB**

$2^8 = 256$ sous-opérades binaires de **CNCB**.

Symétries induites par ret et cpl : seulement 88 orbites à étudier.

Sous-opérades de **CNCB** dont les dimensions sont des suites connues :

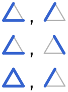
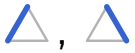
Générateurs	Objets	Dimensions	OEIS
$\emptyset$	–	1, 0, 0	**A000007**
	–	1, 1, 1	**A000012**
	Arb. b.	1, 1, 2, 5, 14	**A000108**
	Arb. Schr.	1, 2, 6, 22, 90	**A006318**
	–	1, 2, 7, 30, 143	**A006013**
	Arb. b. hybrides	1, 2, 7, 31, 154	**A007863**
	Arb. b. bicol.	1, 2, 8, 40, 224	**A052701**
	Forêts n. c.	1, 3, 13, 68, 395	**A200757**
	Plantes n. c.	1, 3, 14, 80, 510	**A121873**
	Chem. Schr. part.	1, 3, 15, 93, 645	**A103210**
	Arcs élém.	1, 3, 16, 105, 768	**A085614**
	Chem. Schr. part.	1, 4, 24, 176, 1440	**A156017**

Sous-opérades binaires de **CNCB** sur deux générateurs

$\binom{8}{2} = 28$ sous-opérades binaires de **CNCB** sur deux générateurs.

Symétries induites par ret et cpl : seulement onze orbites à étudier.

Les onze orbites :

Générateurs	Objets	Dimensions	Opérade
	Arb. bin. bicol.	1, 2, 8, 40, 224, 1344	libre
	?	1, 2, 8, 40, 216, 1246	au moins quartique
	?	1, 2, 8, 38, 200, 1124	cubique
	Arb. b. hybrides	1, 2, 7, 31, 154, 820	quadratique
	–	1, 2, 7, 30, 143, 728	L-opérade [**Leroux**, 2011]
			$2as$ [**Loday, Ronco**, 2006]
	Arb. Schr.	1, 2, 6, 22, 90, 394	quadratique
			quadratique
			quadratique

La sous-opérade engendrée par et

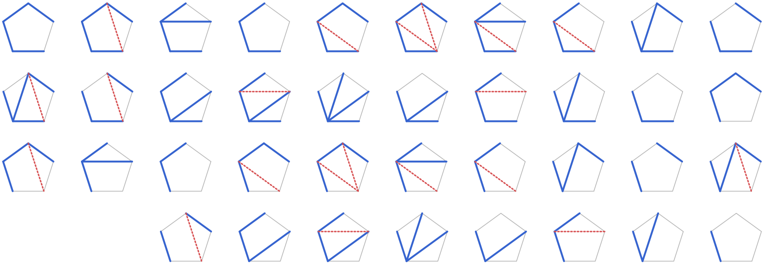
CNCB : sous-opérade de **CNCB** engendrée par et .

Éléments d'arité 1 :

Éléments d'arité 2 :

Éléments d'arité 3 :

Élements d'arité 4 :



Bulles de $\mathbf{CNCB}_{\triangle\triangle}$

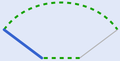
$\mathbf{CNCB}_{C\triangle\triangle}$: sous-opérade colorée de $\mathbf{CNCB}_C$ engendrée par $\triangle$ et $\triangle$.

Lemme

L'opérade $\mathbf{CNCB}_{\triangle\triangle}$ est l'opérade enveloppante de $\mathbf{CNCB}_{C\triangle\triangle}$.

Lemme

Toute bulle de $\mathbf{CNCB}_{C\triangle\triangle}$ est de la forme



,

où désigne un côté bleu ou vide.

Ainsi, dans $\mathbf{CNCB}_{C\triangle\triangle}$,

$$B_1(z_1, z_2) = B_2(z_1, z_2) = \frac{z_1 z_2}{1 - z_1 - z_2}.$$

Dimensions de $\mathbf{CNCB}_{\triangle\triangle}$

Proposition

La série de Hilbert F de $\mathbf{CNCB}_{\triangle\triangle}$ vérifie

$$2t - t^2 + (2t-2)\mathsf{F} + 3\mathsf{F}^2 = 0.$$

Démonstration.

Comme $\mathbf{CNCB}_{\triangle\triangle} = \mathcal{H}\left(\mathbf{CNCB}_{C\triangle\triangle}\right)$, F est solution du système

$$\mathsf{F} = t + \mathsf{F}_1 + \mathsf{F}_2,$$

$$\mathsf{F}_1 = \mathsf{F}_2 = \frac{(t+\mathsf{F}_2)(t+\mathsf{F}_1)}{1-(t+\mathsf{F}_2)-(t+\mathsf{F}_1)}.$$

$\square$

$\mathsf{F}(t)$ est de la forme

$$\mathsf{F}(t) = t + 2t^2 + 8t^3 + 38t^4 + 200t^5 + 1124t^6 + 6608t^7 + 40142t^8 + \cdots .$$

Présentation de $\mathbf{CNCB}_{\triangle\,\bigtriangleup}$

Théorème

L'opérade $\mathbf{CNCB}_{\triangle\,\bigtriangleup}$ admet la présentation

$$\mathbf{CNCB} = \mathcal{F}\left(\{\triangle, \bigtriangleup\}\right)/_{\equiv},$$

où $\equiv$ est la congruence d'opérade vérifiant

$$(\bigtriangleup \circ_2 \triangle) \circ_2 \bigtriangleup \equiv (\bigtriangleup \circ_1 \bigtriangleup) \circ_2 \triangle,$$
$$(\triangle \circ_2 \triangle) \circ_2 \bigtriangleup \equiv (\triangle \circ_1 \bigtriangleup) \circ_2 \triangle.$$

Démonstration.

Comme $\mathbf{CNCB}_{\triangle\,\bigtriangleup} = \mathcal{H}\left(\mathbf{CNCB}_{C\triangle\,\bigtriangleup}\right)$, il suffit de montrer que ces relations sont les seules non triviales dans $\mathbf{CNCB}_{C\triangle\,\bigtriangleup}$. $\square$

Plan

Configurations non croisées bicolorées
- Configurations non croisées bicolorées
- Motivations

Opérades
- Définitions et exemples
- Opérades libres, quotients et présentations

Opérades colorées et opérades enveloppantes
- Opérades colorées
- Opérades enveloppantes

Opérade des configurations non croisées bicolorées
- Structure d'opérade
- Propriétés de l'opérade
- Sous-opérades

Annexe

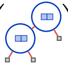
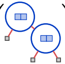
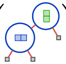
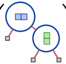
Démonstration de la présentation de Comp

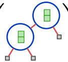
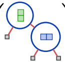
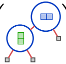
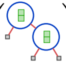
Idée : construire un isomorphisme d'opérades

$$\phi : \mathcal{F}(\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\})/_{\equiv} \to \mathsf{Comp}.$$

On pose $\phi(\mathtt{a}) :=$  et $\phi(\mathtt{b}) :=$ .

Comme

$\mathsf{ev}_{\mathsf{Comp}}\Big($  $\Big) = \mathsf{ev}_{\mathsf{Comp}}\Big($  $\Big)$, $\mathsf{ev}_{\mathsf{Comp}}\Big($  $\Big) = \mathsf{ev}_{\mathsf{Comp}}\Big($  $\Big)$,

$\mathsf{ev}_{\mathsf{Comp}}\Big($  $\Big) = \mathsf{ev}_{\mathsf{Comp}}\Big($  $\Big)$, $\mathsf{ev}_{\mathsf{Comp}}\Big($  $\Big) = \mathsf{ev}_{\mathsf{Comp}}\Big($  $\Big)$,

ϕ est bien défini en tant que morphisme d'opérades.

De plus, comme  et  sont les générateurs de Comp, ϕ est surjectif.

Démonstration de la présentation de Comp

Pour montrer que ϕ est injective, on oriente $\equiv$ en une règle de réécriture.

Soit $\mapsto$ la règle de réécriture sur les arbres de $\mathcal{F}(\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\})$ définie par

$\mapsto$ admet des formes normales et sont les peignes droits de $\mathcal{F}(\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\})$.

Il y a ainsi 2^{n-1} normales formes d'arité n. Ceci implique

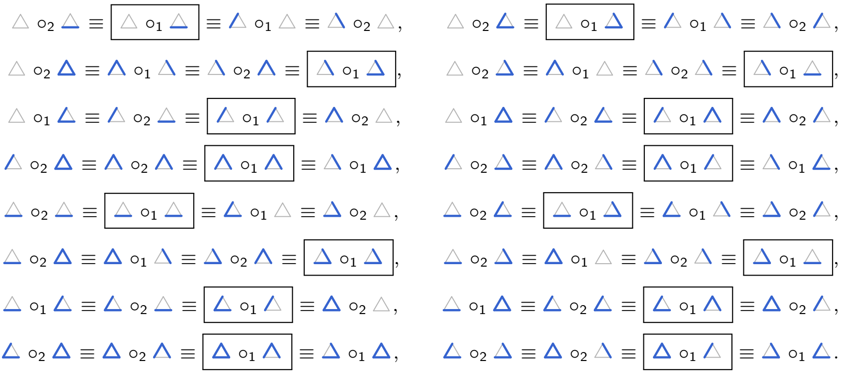
$$\#\mathcal{F}(\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\})/_{\equiv}(n) \;\leqslant\; \#\mathrm{Comp}(n) = 2^{n-1}$$

et que ϕ est une bijection.

Démonstration de la présentation de **CNCB**

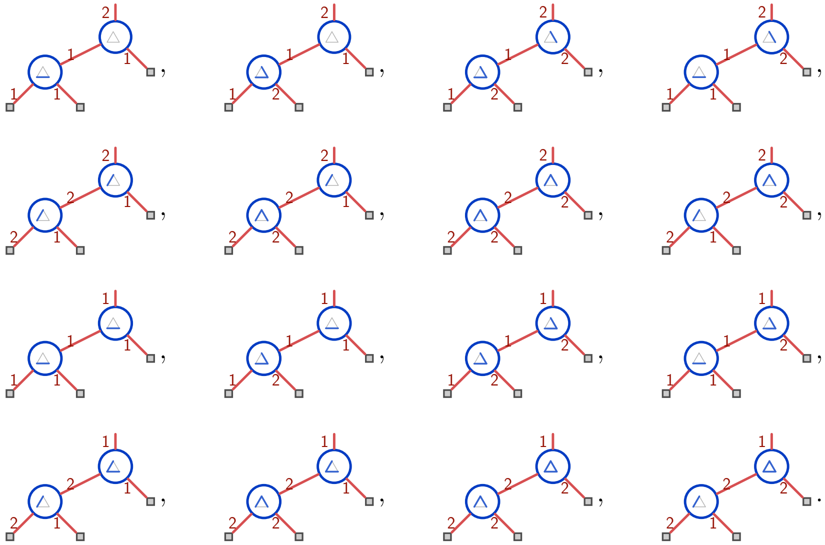
Comme **CNCB** $= \mathcal{H}(\mathbf{CNCB}_C)$, il suffit de montrer que les relations données sont les uniques relations non triviales entre les générateurs de $\mathbf{CNCB}_C$.

$\mapsto$: règle de réécriture sur $\mathcal{F}_C(\{\triangle, \triangle, \triangle, \triangle, \triangle, \triangle, \triangle, \triangle\})$ consistant à réécrire chaque élément d'une classe d'équivalence en celui encadré :



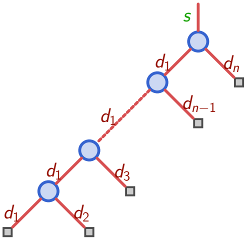
Démonstration de la présentation de **CNCB**

En termes d'arbres 2-colorés, tous les motifs d'arbre d'arité trois de $\mathcal{F}_C(\{\triangle, \triangle, \triangle, \triangle, \triangle, \triangle, \triangle, \triangle\})$ sont interdits, sauf les seize suivants :



Démonstration de la présentation de **CNCB**

Formes normales d'arité n de $\mapsto$: arbres 2-colorés de $\mathcal{F}_C(\{\triangle, \triangle, \triangle, \triangle, \triangle, \triangle, \triangle, \triangle\})$ de la forme



.

Pour tout $(d, s) \in [2]^n \times [n]$, il existe une unique forme normale T telle que $\mathbf{in}(T) = d$ et $\mathbf{out}(T) = s$.

Il y a donc 2^n formes normales d'arité n de couleur de sortie s. C'est aussi le nombre de bulles d'arité n de couleur de sortie s.

Ceci implique la présentation de **CNCB**.