Opérades colorées et combinatoire

Samuele Giraudo, LIGM, Université Paris-Est Marne-la-Vallée

—

Travail en commun avec
Frédéric Chapoton, ICJ, Université Claude Bernard Lyon 1

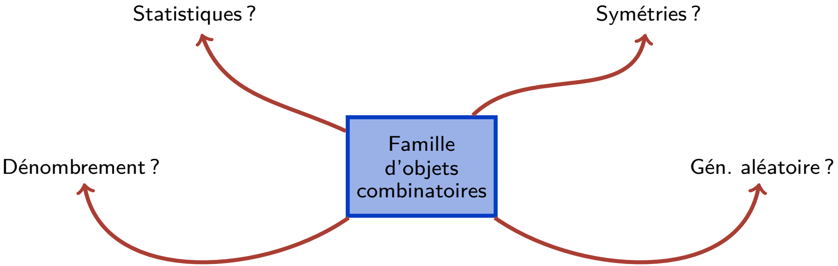
GT-combalg, Université Paris-Est Marne-la-Vallée

14 juin 2013

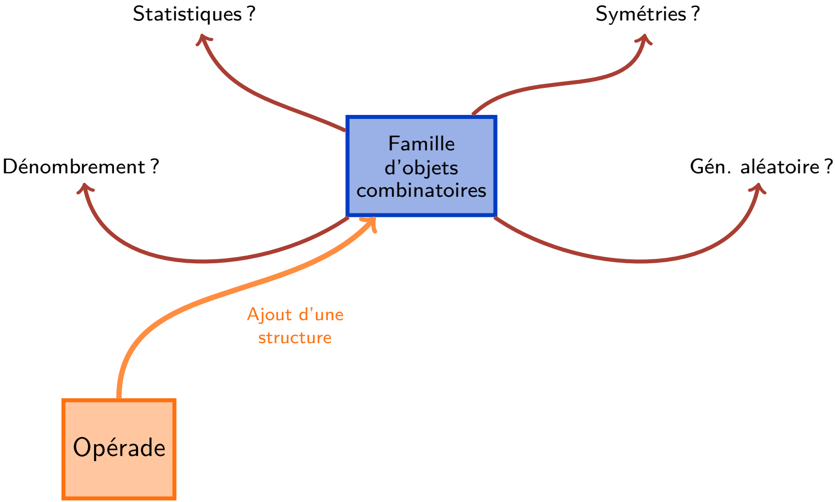
Vue d'ensemble

Famille
d'objets
combinatoires

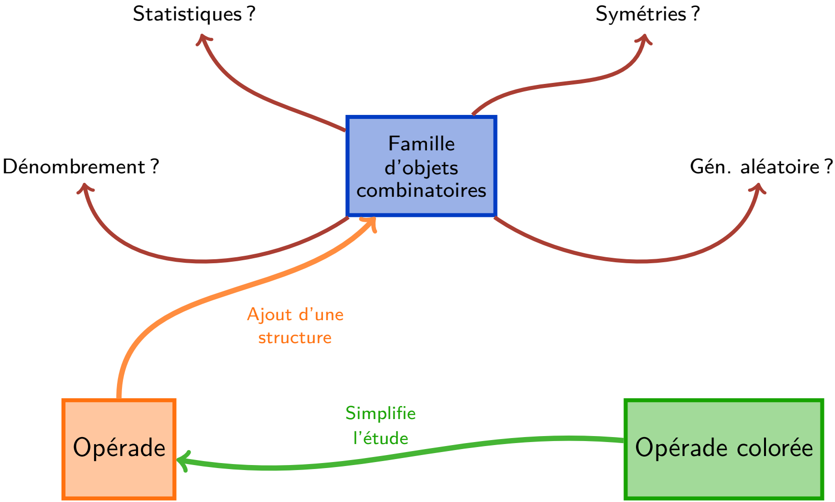
Vue d'ensemble



Vue d'ensemble



Vue d'ensemble



Plan

Opérades

Opérade : triplet $(\mathcal{P}, \circ_i, \mathbf{1})$ où

1. $\mathcal{P}$ est un ensemble gradué

$$\mathcal{P} := \biguplus_{n \geqslant 1} \mathcal{P}(n) \; ;$$

2. $\circ_i$ est une application de greffe

$$\circ_i : \mathcal{P}(n) \times \mathcal{P}(m) \to \mathcal{P}(n+m-1), \qquad n, m \geqslant 1, i \in [n] \; ;$$

3. $\mathbf{1}$ est un élément de $\mathcal{P}(1)$, appelé unité.

Ces données doivent vérifier des axiomes.

Axiomes des opérades

Pour tous $x \in \mathcal{P}(n)$, $y \in \mathcal{P}(m)$ et $z \in \mathcal{P}(k)$, les relations suivantes doivent être vérifiées.

Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z), \qquad i \in [n], j \in [m].$$

Commutativité :

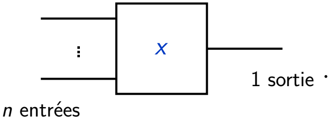
$$(x \circ_i y) \circ_{j+m-1} z = (x \circ_j z) \circ_i y, \qquad 1 \leqslant i < j \leqslant n.$$

Unitarité :

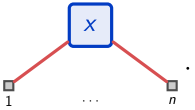
$$\mathbf{1} \circ_1 x = x = x \circ_i \mathbf{1}, \qquad i \in [n].$$

Arbres et éléments d'une opérade

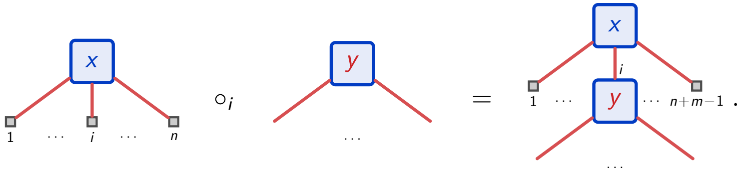
Élément de $\mathcal{P}(n)$ $\rightsquigarrow$ opérateur d'arité n :



Opérateur à n entrées $\rightsquigarrow$ arbre plan enraciné à n feuilles :



Application de greffe $\rightsquigarrow$ greffe d'arbres :



Arbres et relations dans une opérade

Associativité :

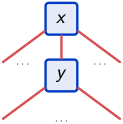
Commutativité :

Unitarité :

Arbres et relations dans une opérade

Associativité :

$(x \circ_i y)$



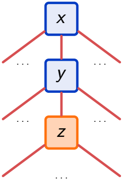
Commutativité :

Unitarité :

Arbres et relations dans une opérade

Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z$$



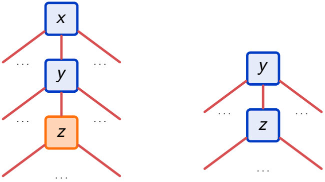
Commutativité :

Unitarité :

Arbres et relations dans une opérade

Associativité :

$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z$ $\qquad$ $(y \circ_j z)$



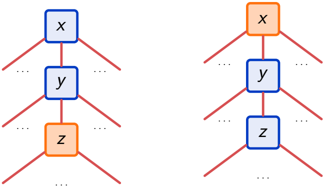
Commutativité :

Unitarité :

Arbres et relations dans une opérade

Associativité :

$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z \qquad x \circ_i (y \circ_j z)$



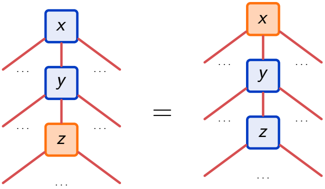
Commutativité :

Unitarité :

Arbres et relations dans une opérade

Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$



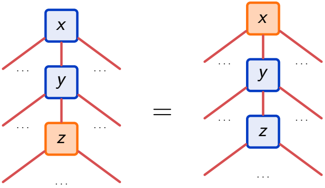
Commutativité :

Unitarité :

Arbres et relations dans une opérade

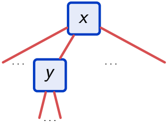
Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$



Commutativité :

$$(x \circ_i y)$$

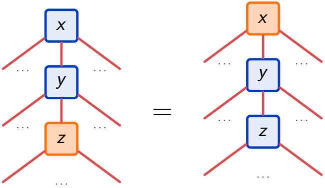


Unitarité :

Arbres et relations dans une opérade

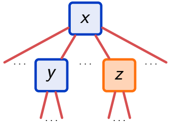
Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$



Commutativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{j+m-1} z$$

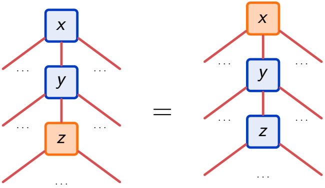


Unitarité :

Arbres et relations dans une opérade

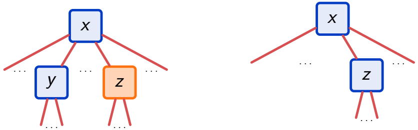
Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$



Commutativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{j+m-1} z \qquad (x \circ_j z)$$

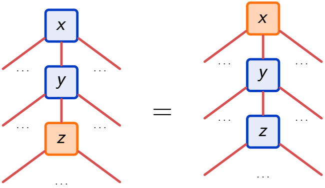


Unitarité :

Arbres et relations dans une opérade

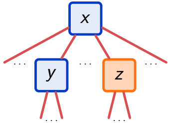
Associativité :

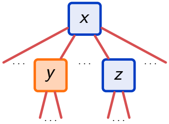
$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$



Commutativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{j+m-1} z \qquad (x \circ_j z) \circ_i y$$



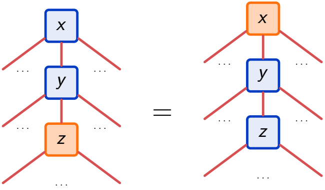


Unitarité :

Arbres et relations dans une opérade

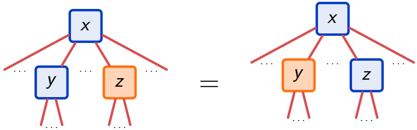
Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$



Commutativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{j+m-1} z = (x \circ_j z) \circ_i y$$

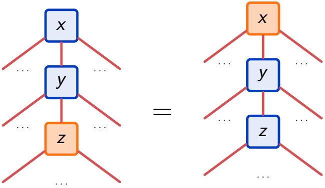


Unitarité :

Arbres et relations dans une opérade

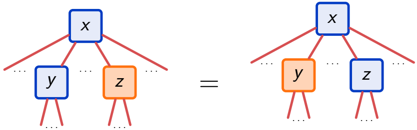
Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$



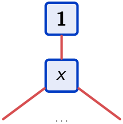
Commutativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{j+m-1} z = (x \circ_j z) \circ_i y$$



Unitarité :

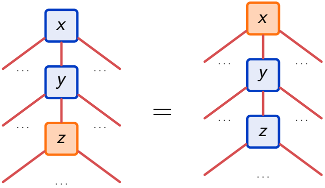
$$\mathbf{1} \circ_1 x$$



Arbres et relations dans une opérade

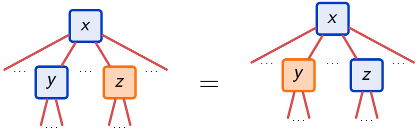
Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$



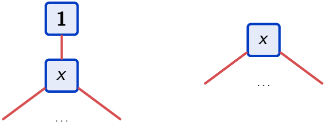
Commutativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{j+m-1} z = (x \circ_j z) \circ_i y$$



Unitarité :

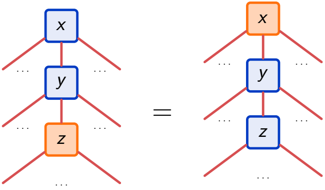
$$\mathbf{1} \circ_1 x \qquad x$$



Arbres et relations dans une opérade

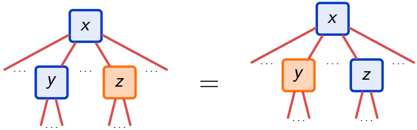
Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$



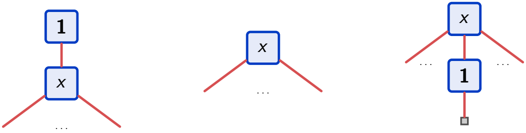
Commutativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{j+m-1} z = (x \circ_j z) \circ_i y$$



Unitarité :

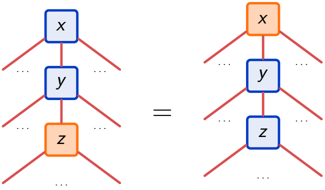
$$\mathbf{1} \circ_1 x \qquad x \qquad x \circ_i \mathbf{1}$$



Arbres et relations dans une opérade

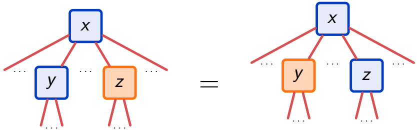
Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$



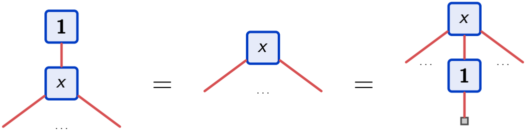
Commutativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{j+m-1} z = (x \circ_j z) \circ_i y$$



Unitarité :

$$\mathbf{1} \circ_1 x = x = x \circ_i \mathbf{1}$$



Exemple : l'opérade associative

Opérade associative $(\mathsf{Assoc}, \circ_i, \mathsf{a}_1)$ définie par

$$\mathsf{Assoc}(n) := \{\mathsf{a}_n\}, \qquad n \geqslant 1$$

et

$$\mathsf{a}_n \circ_i \mathsf{a}_m := \mathsf{a}_{n+m-1}, \qquad n, m \geqslant 1, i \in [n].$$

Exemple

$$\mathsf{a}_4 \circ_2 \mathsf{a}_3 = \mathsf{a}_6, \qquad \mathsf{a}_1 \circ_1 \mathsf{a}_1 = \mathsf{a}_1, \qquad \mathsf{a}_4 \circ_4 \mathsf{a}_1 = \mathsf{a}_4$$

Exemple : l'opérade des compositions d'entiers

Opérade des compositions d'entiers $(\mathrm{Comp}, \circ_i, \square)$ définie par

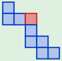
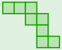
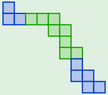
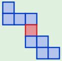
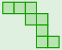
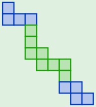
$$\mathrm{Comp}(n) := \{D : D \text{ ruban d'une composition de } n\}, \qquad n \geqslant 1$$

et

$$C \circ_i D := \begin{cases} C \leftarrow_i D & \text{si rien au dessus de la } i^{\text{e}} \text{ case de } C, \\ C \leftarrow_i D^t & \text{sinon,} \end{cases}$$

pour tous $n \geqslant 1$, $i \in [n]$, $C \in \mathrm{Comp}(n)$ et $D \in \mathrm{Comp}$.

Exemple

 $\circ_4$  $=$ ,  $\circ_5$  $=$ 

Opérades libres

Opérade libre engendrée par $G := \uplus_{n \geqslant 2} G(n)$: opérade $\left(\mathcal{F}(G), \circ_i, \mathbb{1}\right)$ où

$$\mathcal{F}(G)(n) := \{T : T \text{ arb. plan enrac. } G\text{-étiqu. à } n \text{ feuilles}\}, \qquad n \geqslant 1$$

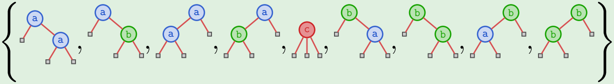
et

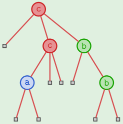
$$S \circ_i T := S \leftarrow_i T, \qquad n \geqslant 1, i \in [n], S \in \mathcal{F}(G)(n), T \in \mathcal{F}(G).$$

Exemple

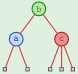
Soit $G := G(2) \uplus G(3)$ avec $G(2) := \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}$ et $G(3) := \{\mathrm{c}\}$.

$\mathcal{F}(G)(3) =$

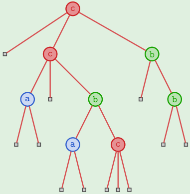




$\circ_5$



$=$



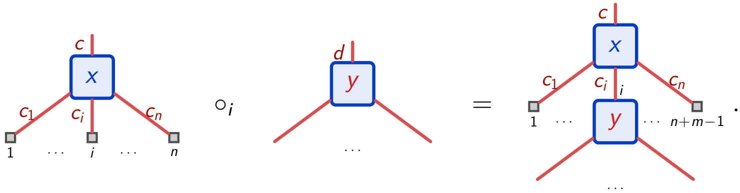
Opérades colorées

Opérade k-colorée : quintuplet $(\mathcal{C}, \circ_i, \mathbf{1}_c, \mathbf{in}, \mathbf{out})$ où $(\mathcal{C}, \circ_i, \mathbf{1}_c)$ est une opérade avec $\circ_i$ partiellement définie et

$$\mathbf{in} : \mathcal{C}(n) \to [k]^n \quad \text{et} \quad \mathbf{out} : \mathcal{C}(n) \to [k]$$

applications qui associent à tout $x \in \mathcal{C}$ des couleurs d'entrées ($\mathbf{in}$) et une couleur de sortie ($\mathbf{out}$).

Greffe $x \circ_i y$ définie ssi $\mathbf{out}(y) = \mathbf{in}(x)_i$ (*i.e.*, $d = c_i$) :



Remarque : toute opérade est une opérade 1-colorée.

Exemple : une version colorée de l'opérade associative

Soit $(\mathrm{Assoc}_C, \circ_i, \mathbf{1}_c)$ l'opérade 2-colorée définie par

$$\mathrm{Assoc}_C(n) := \{\mathtt{b}_n\}, \qquad n \geqslant 1$$

où

$$\mathbf{in}(\mathtt{b}_n) := 12^{n-1} \quad \text{et} \quad \mathbf{out}(\mathtt{b}_n) := 1$$

et

$$\mathtt{b}_n \circ_i \mathtt{b}_m := \mathtt{b}_{n+m-1}, \qquad n, m \geqslant 1, i \in [n]$$

lorsque les couleurs correspondent.

Exemple

$$\mathtt{b}_4 \circ_1 \mathtt{b}_3 = \mathtt{b}_6, \qquad \mathtt{b}_5 \circ_3 \mathbf{1}_2 = \mathtt{b}_5, \qquad \mathtt{b}_5 \circ_1 \mathbf{1}_1 = \mathtt{b}_5,$$

$$\mathtt{b}_4 \circ_2 \mathtt{b}_3, \qquad \mathtt{b}_5 \circ_2 \mathbf{1}_1, \qquad \mathtt{b}_5 \circ_1 \mathbf{1}_2 \quad \text{non définies.}$$

Plan

Opérade enveloppante d'une opérade colorée

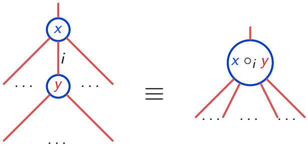
Soit $\mathcal{C}$ une opérade colorée. On pose $\mathcal{C}^+ := \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}(1)$.

Opérade enveloppante $\mathcal{H}(\mathcal{C})$ de $\mathcal{C}$: plus petite opérade non colorée qui contient $\mathcal{C}$.

Plus formellement,

$$\mathcal{H}(\mathcal{C}) := \mathcal{F}(\mathcal{C}^+)/_{\equiv}$$

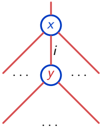
où $\equiv$ est la plus fine congruence de $\mathcal{F}(\mathcal{C}^+)$ vérifiant



si $x \circ_i y$ est défini dans $\mathcal{C}$ (*i.e.*, $\mathbf{in}(x)_i = \mathbf{out}(y)$).

Arbres anticolorés

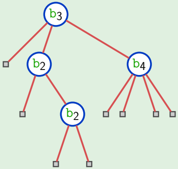
Arbre anticoloré sur $\mathcal{C}$: élément T de $\mathcal{F}(\mathcal{C}^+)$ tel que pour toute arête



de T, on a $\mathbf{in}(x)_i \neq \mathbf{out}(y)$.

L'ensemble $\mathcal{H}(\mathcal{C})$ est celui des arbres anticolorés sur $\mathcal{C}$.

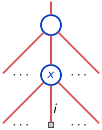
Exemple



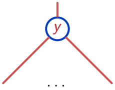
est un élément de $\mathcal{H}(\mathrm{Assoc}_C)$.

Greffe d'arbres anticolorés

Soient

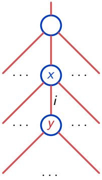
$S :=$ 

et

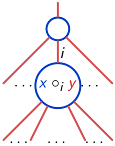
$T :=$ 

deux arbres anticolorés sur $\mathcal{C}$. Deux cas pour la greffe :

$S \circ_i T :=$



si $\mathbf{in}(x)_i \neq \mathbf{out}(y)$,

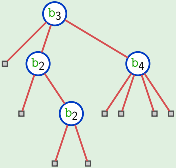


sinon.

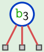
Greffe d'arbres anticolorés

Exemple

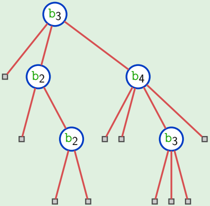
Dans $\mathcal{H}(\mathsf{Assoc}_C)$,



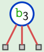
$\circ_7$



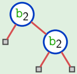
$=$



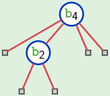
,



$\circ_1$



$=$



.

Décompositions en bulles

Soient $\mathcal{P}$ une opérade et $\mathcal{C}$ une opérade colorée.

$\mathcal{C}$ est une décomposition en bulles de $\mathcal{P}$ si $\mathcal{P} = \mathcal{H}(\mathcal{C})$.

Intérêts : l'étude de $\mathcal{P}$ est reportée sur l'étude en $\mathcal{C}$. En effet, on déduit de l'étude de $\mathcal{C}$:

1. la série de Hilbert de $\mathcal{P}$;
2. les générateurs de $\mathcal{P}$;
3. les relations entre générateurs de $\mathcal{P}$;
4. les symétries de $\mathcal{P}$.

La structure d'opérade colorée est plus contrainte que celle d'opérade.

De ce fait, l'étude de $\mathcal{C}$ est souvent beaucoup plus simple que celle de $\mathcal{P}$.

Conséquence sur les séries de Hilbert

Soit $\mathcal{C}$ une opérade k-colorée. On pose pour tout $c \in [k]$,

$$\mathsf{B}_c(z_1, \dots, z_k) := \sum_{\substack{x \in \mathcal{C}^+ \\ \mathbf{out}(x) = c}} z_1^{|\mathbf{in}(x)|_1} \dots \; z_k^{|\mathbf{in}(x)|_k}.$$

Exemple

Dans Assoc_C,

$$\mathsf{B}_1(z_1, z_2) = z_1 z_2 + z_1 z_2^2 + z_1 z_2^3 + \cdots \qquad \text{et} \qquad \mathsf{B}_2(z_1, z_2) = 0.$$

Proposition

La série de Hilbert $\mathsf{F}(t)$ d'une opérade $\mathcal{P}$ qui admet l'opérade k-colorée $\mathcal{C}$ comme décomposition en bulles est solution du système d'équations

$$\begin{aligned} \mathsf{F} &= t + \mathsf{F}_1 + \cdots + \mathsf{F}_k, \\ \mathsf{F}_c &= \mathsf{B}_c(\mathsf{F} - \mathsf{F}_1, \dots, \mathsf{F} - \mathsf{F}_k), \qquad c \in [k]. \end{aligned}$$

Conséquence sur la génération aléatoire uniforme

Si $\mathcal{P}$ est une opérade qui admet $\mathcal{C}$ comme décomposition en bulles,

- élément de $\mathcal{P}$ $\rightsquigarrow$ arbre anticoloré sur $\mathcal{C}$;
- gen. d'un élément de $\mathcal{P}$ $\rightsquigarrow$ gen. d'un arbre anticoloré sur $\mathcal{C}$.

Hypothèse : gén. aléa. unif. des éléments de $\mathcal{C}$.

Question

Algorithme incrémental pour générer aléatoirement et uniformément des arbres anticolorés ?

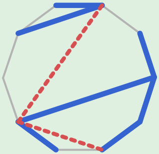
Plan

Configurations non croisées bicolorées

Configuration non croisée bicolorée (CNCB) : polygone régulier muni d'arêtes bleues et d'arêtes rouges vérifiant :

1. aucune arête ne croise une autre ;
2. aucune arête rouge n'est sur un côté.

Exemple



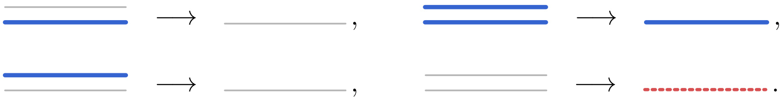
est une CNCB de taille 9 (nombre de côtés du polygone moins un).

L'opérade des CNCBs

Opérade des CNCBs $(\mathbf{CNCB}, \circ_i, \_)$ définie par

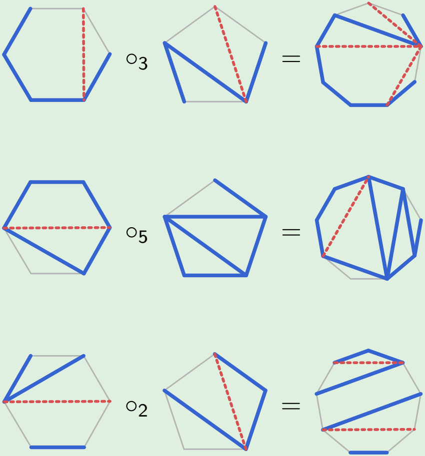
$$\mathbf{CNCB}(n) := \{\mathfrak{C} : \mathfrak{C} \text{ CNCB de taille } n\}, \qquad n \geqslant 1$$

et pour tous $n \geqslant 1$, $i \in [n]$, $\mathfrak{C} \in \mathbf{CNCB}(n)$ et $\mathfrak{D} \in \mathbf{CNCB}$, $\mathfrak{C} \circ_i \mathfrak{D}$ est la CNCB obtenue en collant la base de $\mathfrak{D}$ sur le i^{e} côté de $\mathfrak{C}$ puis en simplifiant les deux côtés qui se superposent selon les règles



L’opérade des CNCBs

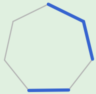
Exemple



Bulles

Bulle : polygone à plus de trois côtés coloriés en bleu ou vides.

Exemple

$\mathfrak{B}$:= 

est une bulle de taille 6 (nombre de côtés du polygone moins un).

Base d'une bulle : son côté le plus bas.

bord $\mathrm{b}(\mathfrak{B})$ d'une bulle $\mathfrak{B}$: mot u tel $u_i = 2$ si le i^{e} côté de $\mathfrak{B}$ est bleu et $u_i = 1$ sinon.

Exemple

$$\mathrm{b}(\mathfrak{B}) = 111221$$

L'opérade colorée des bulles

Opérade 2-colorée des bulles $(\mathbf{Bulle}, \circ_i, \mathbf{1}_c, \mathbf{in}, \mathbf{out})$ définie par

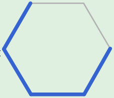
$$\mathbf{Bulle}(n) := \{\mathfrak{B} : \mathfrak{B} \text{ bulle de taille } n\}, \qquad n \geqslant 1$$

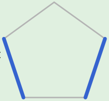
où

$$\mathbf{in}(\mathfrak{B}) := \mathrm{b}(\mathfrak{B}) \quad \text{et} \quad \mathbf{out}(\mathfrak{B}) := \begin{cases} 1 & \text{si base de } \mathfrak{B} \text{ bleue,} \\ 2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Greffe : celle de **CNCB** lorsque définie.

Exemple

$\mathfrak{B}_1 :=$  , $\quad \mathbf{in}(\mathfrak{B}_1) = 22112, \quad \mathbf{out}(\mathfrak{B}_1) = 1$

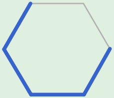
$\mathfrak{B}_2 :=$  , $\quad \mathbf{in}(\mathfrak{B}_2) = 2112, \quad \mathbf{out}(\mathfrak{B}_2) = 2$

Greffes définies : $\mathfrak{B}_1 \circ_1 \mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{B}_1 \circ_2 \mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{B}_1 \circ_5 \mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{B}_2 \circ_2 \mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2 \circ_3 \mathfrak{B}_1$.

L'opérade colorée des bulles

Toute bulle $\mathfrak{B}$ est entièrement spécifiée par le couple $(\mathbf{in}(\mathfrak{B}), \mathbf{out}(\mathfrak{B}))$.

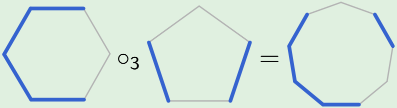
Exemple



$\simeq \quad (22112, 1)$

Ainsi, **Bulle** est l'opérade 2-colorée des couples de $[2]^n \times [2]$ dont la greffe est la substitution.

Exemple



$$(22211, 1) \circ_3 (2112, 2) = (22211211, 1)$$

Décomposition en bulles

Théorème

L'opérade **CNCB** est l'opérade enveloppante de **Bulle**.

Sa démonstration se base sur les deux lemmes suivants.

Lemme

L'application qui envoie une CNCB vers son arbre dual est une bijection.

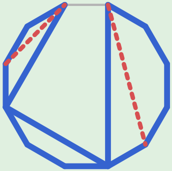
Lemme

Les éléments de $\mathcal{H}(\mathbf{Bulle})$ sont des arbres duaux de CNCBs.

Arbre dual d'une CNCB

Arbre dual d'une CNCB $\mathfrak{C}$: arbre plan enraciné des faces de $\mathfrak{C}$ dont la relation de parenté est l'adjacence.

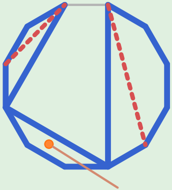
Exemple



Arbre dual d'une CNCB

Arbre dual d'une CNCB $\mathfrak{C}$: arbre plan enraciné des faces de $\mathfrak{C}$ dont la relation de parenté est l'adjacence.

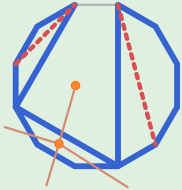
Exemple

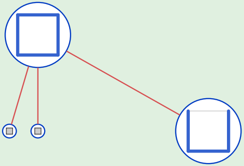


Arbre dual d'une CNCB

Arbre dual d'une CNCB $\mathfrak{C}$: arbre plan enraciné des faces de $\mathfrak{C}$ dont la relation de parenté est l'adjacence.

Exemple

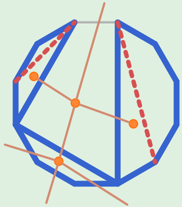


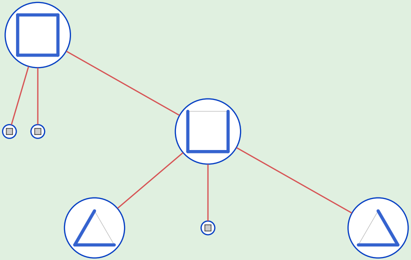


Arbre dual d'une CNCB

Arbre dual d'une CNCB $\mathfrak{C}$: arbre plan enraciné des faces de $\mathfrak{C}$ dont la relation de parenté est l'adjacence.

Exemple

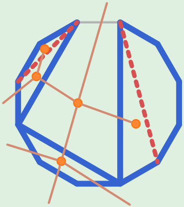


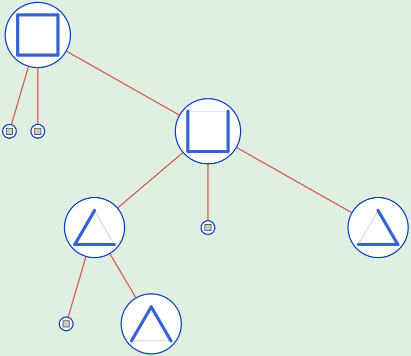


Arbre dual d'une CNCB

Arbre dual d'une CNCB $\mathfrak{C}$: arbre plan enraciné des faces de $\mathfrak{C}$ dont la relation de parenté est l'adjacence.

Exemple

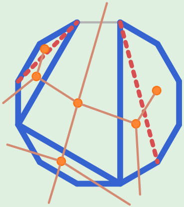


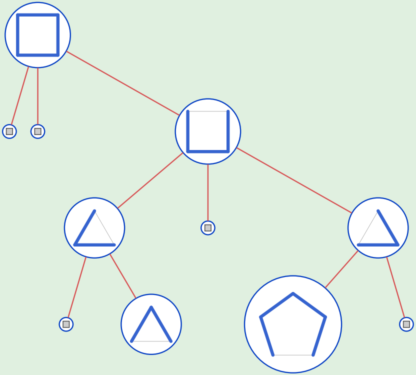


Arbre dual d'une CNCB

Arbre dual d'une CNCB $\mathfrak{C}$: arbre plan enraciné des faces de $\mathfrak{C}$ dont la relation de parenté est l'adjacence.

Exemple

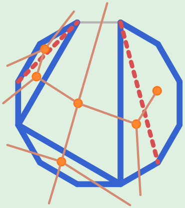


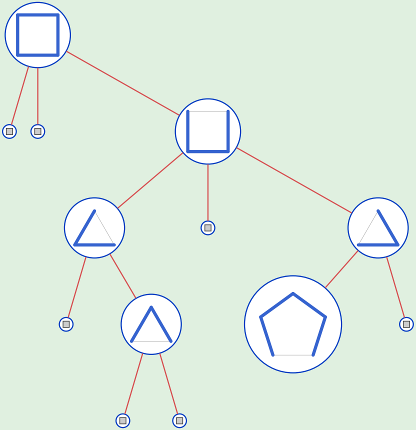


Arbre dual d'une CNCB

Arbre dual d'une CNCB $\mathfrak{C}$: arbre plan enraciné des faces de $\mathfrak{C}$ dont la relation de parenté est l'adjacence.

Exemple

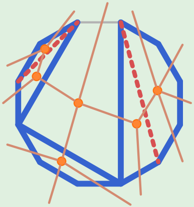


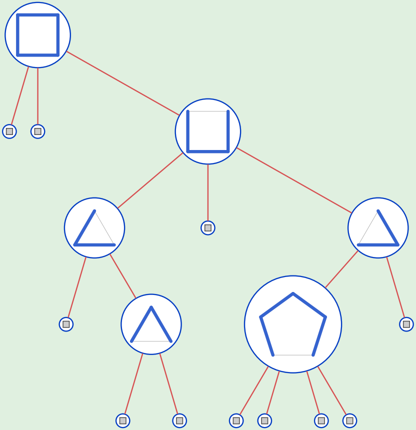


Arbre dual d'une CNCB

Arbre dual d'une CNCB $\mathfrak{C}$: arbre plan enraciné des faces de $\mathfrak{C}$ dont la relation de parenté est l'adjacence.

Exemple

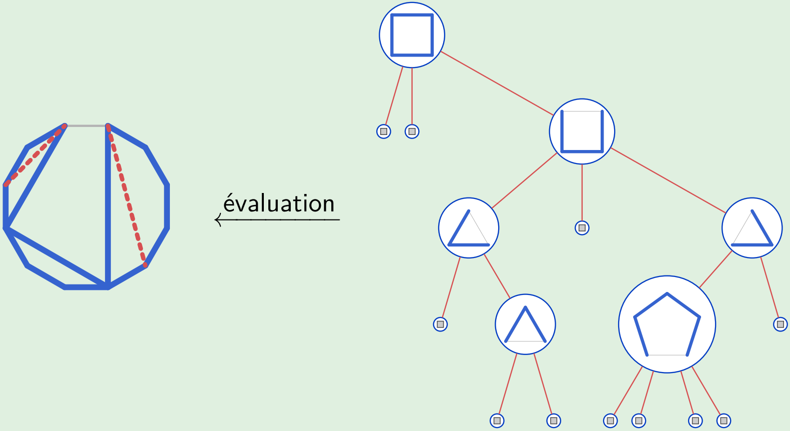




Arbre dual d'une CNCB

Arbre dual d'une CNCB $\mathfrak{C}$: arbre plan enraciné des faces de $\mathfrak{C}$ dont la relation de parenté est l'adjacence.

Exemple



Série de Hilbert

Les séries de Hilbert de **Bulle** vérifient

$$B_1(z_1, z_2) = B_2(z_1, z_2) = \frac{(z_1 + z_2)^2}{1 - z_1 - z_2}.$$

Proposition

La série génératrice $F(t)$ des CNCBs vérifie

$$-t - t^2 + (1 - 4t)F - 3F^2 = 0.$$

Démonstration.

Comme **CNCB** $= \mathcal{H}($**Bulle**$)$, $F(t)$ est solution du système

$$F = t + F_1 + F_2, \quad F_1 = B_1(F - F_1, F - F_2), \quad F_2 = B_2(F - F_1, F - F_2).$$

$\square$

$F(t)$ est de la forme

$$F(t) = t + 8t^2 + 80t^3 + 992t^4 + 13760t^5 + 204416t^6 + 3180800t^7 + \cdots .$$

Dénombrement raffiné des CNCBs

Série dénombrant les CNCBs par taille et par nb. de faces :

$$\mathsf{F}(t,z) := \sum_{\mathfrak{C} \in \mathbf{CNCB}} t^{|\mathfrak{C}|} z^{\mathsf{faces}(\mathfrak{C})}.$$

En modifiant le système précédent en

$$\begin{aligned} \mathsf{F} &= t + \mathsf{F}_1 + \mathsf{F}_2, \\ \mathsf{F}_1 &= z\mathsf{B}_1(\mathsf{F} - \mathsf{F}_1, \mathsf{F} - \mathsf{F}_2), \\ \mathsf{F}_2 &= z\mathsf{B}_2(\mathsf{F} - \mathsf{F}_1, \mathsf{F} - \mathsf{F}_2), \end{aligned}$$

on obtient l'expression algébrique

$$-t + (1-2z)t^2 + (1-4zt)\mathsf{F} + (-1-2z)\mathsf{F}^2 = 0.$$

$\mathsf{F}(t,z)$ est de la forme

$$\begin{aligned} \mathsf{F}(t,z) = t + 8zt^2 &+ 16(z+4z^2)t^3 \\ &+ 32(z+10z^2+20z^3)t^4 \\ &+ 64(z+18z^2+84z^3+112z^4)t^5 + \cdots . \end{aligned}$$

Dénombrement raffiné des CNCBs

Série dénombrant les CNCBs par taille et par nb. de diagonales rouges (base vide compte pour rouge) :

$$F(t, z) := \sum_{\mathfrak{C} \in \mathbf{CNCB}} t^{|\mathfrak{C}|} z^{\mathrm{rouges}(\mathfrak{C})}.$$

En modifiant le système précédent en

$$\begin{aligned} F &= t + F_1 + F_2, \\ F_1 &= B_1(F - F_1, F - F_2), \\ F_2 &= zB_2(F - F_1, F - F_2), \end{aligned}$$

on obtient l'expression algébrique

$$-t - zt^2 + (1 - 2zt - 2t)F + (-2 - z)F^2 = 0.$$

$F(t, z)$ est de la forme

$$\begin{aligned} F(t, z) = t + 4(1 + z)t^2 &+ 8(3 + 5z + 2z^2)t^3 \\ &+ 16(11 + 26z + 20z^2 + 5z^3)t^4 \\ &+ 32(45 + 138z + 156z^2 + 77z^3 + 14z^4)t^5 + \cdots . \end{aligned}$$

Dénombrement raffiné des CNCBs

Série dénombrant les CNCBs par taille, par nb. de diagonales rouges (base vide compte pour rouge) et par nb. de diagonales bleues (base bleue compte pour diagonale) :

$$F(t, y, z) := \sum_{\mathfrak{C} \in \mathbf{CNCB}} t^{|\mathfrak{C}|} y^{\mathrm{rouges}(\mathfrak{C})} z^{\mathrm{dbleues}(\mathfrak{C})}.$$

En modifiant le système précédent en

$$\begin{aligned} F &= t + F_1 + F_2, \\ F_1 &= zB_1(F - F_1, F - F_2), \\ F_2 &= yB_2(F - F_1, F - F_2), \end{aligned}$$

on obtient l'expression algébrique

$$-t + t^2 - yt^2 - zt^2 + (1 - 2yt - 2zt)F + (-1 - y - z)F^2 = 0.$$

$F(t, y, z)$ est de la forme

$$\begin{aligned} F(t, y, z) = t &+ 4(y + z)t^2 \\ &+ 8(y + 2y^2 + 4yz + 2z^2 + z)t^3 \\ &+ 16(y + 5y^2 + 5y^3 + 15y^2 z + 10yz + 15yz^2 + 5z^3 + 5z^2 + z)t^4 \\ &+ \cdots . \end{aligned}$$

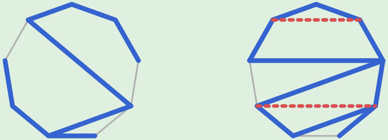
Plan

Plantes non croisées

Plante non croisée (PNC) [**Chapoton**, 2007] : polygone régulier muni d'arêtes bleues et d'arêtes rouges vérifiant :

1. aucune arête ne croise une autre ;
2. le sous-graphe des arêtes bleues est connexe et contient tous les sommets ;
3. toute arête rouge est contenue dans un cycle formée par les arêtes bleues ;
4. tout cycle formé par les arêtes bleues contient une unique arête rouge.

Exemple

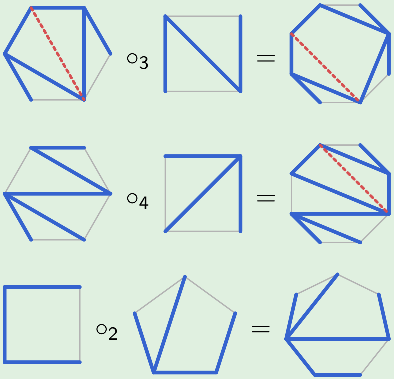


sont des PNCs de taille 8 (nombre de côtés du polygone moins un).

L'opérade des PNCs

Les PNCs forment une sous-opérade **PNC** de **CNCB**.

Exemple



Une sous-opérade colorée de **Bulle**

Soit **C** la sous-opérade colorée de **Bulle** engendrée par △, △ et △.

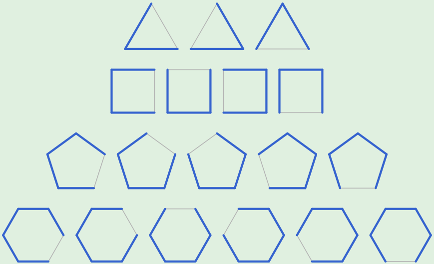
Lemme

Les éléments non triviaux de **C** sont les bulles qui possèdent exactement un côté vide.

Démonstration.

Par récurrence sur l'arité. □

Exemple



Lien entre **C** et **PNC**

Théorème

L'opérade **PNC** est l'opérade enveloppante de **C**.

Sa démonstration se base sur les deux lemmes suivants.

Lemme

L'application qui envoie une PNC vers son arbre dual est une bijection.

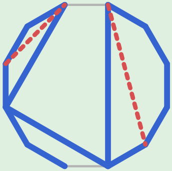
Lemme

Les éléments de $\mathcal{H}(\mathbf{C})$ sont des arbres duaux de PNCs.

Arbre dual d'une PNC

Arbre dual d'une PNC $\mathfrak{C}$: arbre plan enraciné des faces de $\mathfrak{C}$ dont la relation de parenté est l'adjacence.

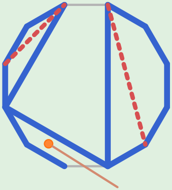
Exemple



Arbre dual d'une PNC

Arbre dual d'une PNC $\mathfrak{C}$: arbre plan enraciné des faces de $\mathfrak{C}$ dont la relation de parenté est l'adjacence.

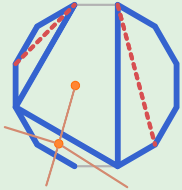
Exemple

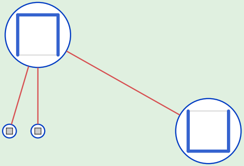


Arbre dual d'une PNC

Arbre dual d'une PNC $\mathfrak{C}$: arbre plan enraciné des faces de $\mathfrak{C}$ dont la relation de parenté est l'adjacence.

Exemple

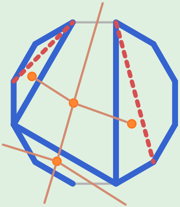


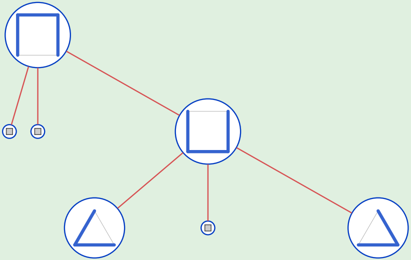


Arbre dual d'une PNC

Arbre dual d'une PNC $\mathfrak{C}$: arbre plan enraciné des faces de $\mathfrak{C}$ dont la relation de parenté est l'adjacence.

Exemple

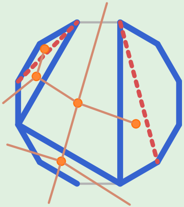


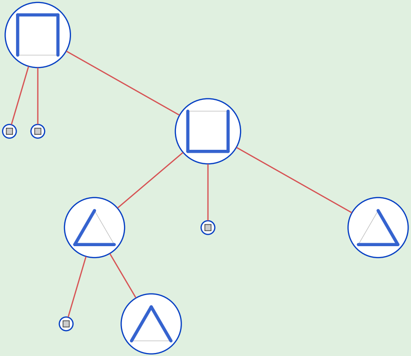


Arbre dual d'une PNC

Arbre dual d'une PNC $\mathfrak{C}$: arbre plan enraciné des faces de $\mathfrak{C}$ dont la relation de parenté est l'adjacence.

Exemple

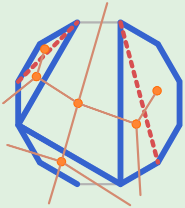


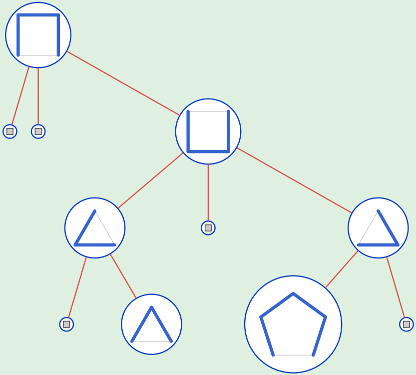


Arbre dual d'une PNC

Arbre dual d'une PNC $\mathfrak{C}$: arbre plan enraciné des faces de $\mathfrak{C}$ dont la relation de parenté est l'adjacence.

Exemple

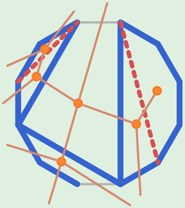


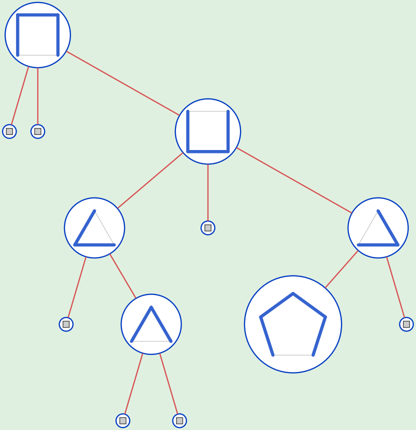


Arbre dual d'une PNC

Arbre dual d'une PNC $\mathfrak{C}$: arbre plan enraciné des faces de $\mathfrak{C}$ dont la relation de parenté est l'adjacence.

Exemple

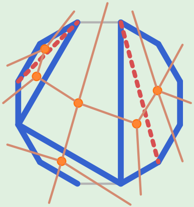


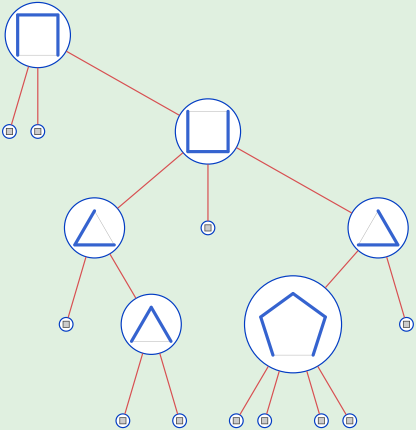


Arbre dual d'une PNC

Arbre dual d'une PNC $\mathfrak{C}$: arbre plan enraciné des faces de $\mathfrak{C}$ dont la relation de parenté est l'adjacence.

Exemple

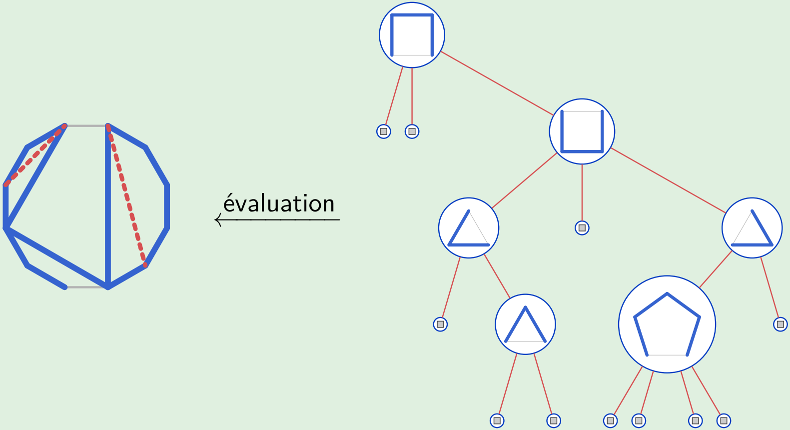




Arbre dual d'une PNC

Arbre dual d'une PNC $\mathfrak{C}$: arbre plan enraciné des faces de $\mathfrak{C}$ dont la relation de parenté est l'adjacence.

Exemple



Dénombrement des PNCs

Les séries de Hilbert de **C** vérifient

$$\mathsf{B}_1(z_1, z_2) = 2z_1 z_2 + 3z_1 {z_2}^2 + 4z_1 {z_2}^3 + \cdots = \frac{z_2(2z_1 - z_1 z_2)}{(1 - z_2)^2}$$

et

$$\mathsf{B}_2(z_1, z_2) = {z_2}^2 + {z_2}^3 + {z_2}^4 + \cdots = \frac{{z_2}^2}{1 - z_2}.$$

On retrouve le résultat suivant [**Chapoton**, 2007] :

Proposition

La série génératrice $\mathsf{F}(t)$ des PNCs vérifie

$$-t + (1 - 2t)\mathsf{F} + (-1 - t)\mathsf{F}^2 - \mathsf{F}^3 = 0.$$

Démonstration.

Comme **PNC** $= \mathcal{H}(\mathbf{C})$, $\mathsf{F}(t)$ est solution du système

$$\mathsf{F} = t + \mathsf{F}_1 + \mathsf{F}_2, \quad \mathsf{F}_1 = \mathsf{B}_1(\mathsf{F} - \mathsf{F}_1, \mathsf{F} - \mathsf{F}_2), \quad \mathsf{F}_2 = \mathsf{B}_2(\mathsf{F} - \mathsf{F}_1, \mathsf{F} - \mathsf{F}_2).$$

$\square$