Les arbres binaires équilibrés dans le treillis de Tamari

Samuele Giraudo

Université de Marne-la-Vallée

Séminaire de combinatoire du LIAFA
29 septembre 2011

Plan

Contexte et motivations
- Les arbres équilibrés
- Le treillis de Tamari
- Objectifs

Les intervalles d'arbres équilibrés
- Clôture par intervalle
- Forme des intervalles

Grammaires synchrones et dénombrement
- Dénombrement des arbres équilibrés maximaux
- Dénombrement des intervalles d'arbres équilibrés

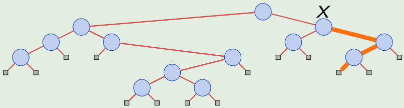
Plan

Contexte et motivations
- Les arbres équilibrés
- Le treillis de Tamari
- Objectifs

Hauteur d'un arbre et mesure de déséquilibre

- La hauteur d'un nœud x d'un arbre T est la longueur $\mathrm{ht}_T(x)$ du plus long chemin qui connecte x à une feuille.

Exemple

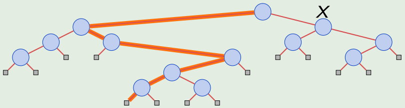
$T :=$ 

$\mathrm{ht}_T(x) = 3$

Hauteur d'un arbre et mesure de déséquilibre

- La hauteur d'un nœud x d'un arbre T est la longueur $\mathrm{ht}_T(x)$ du plus long chemin qui connecte x à une feuille.
- La hauteur d'un arbre T est la hauteur $\mathrm{ht}(T)$ de sa racine.

Exemple

$T :=$ 

$\mathrm{ht}_T(x) = 3$, $\mathrm{ht}(T) = 6$.

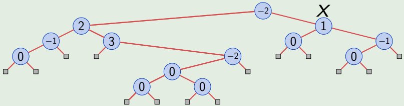
Hauteur d'un arbre et mesure de déséquilibre

- La hauteur d'un nœud x d'un arbre T est la longueur $\mathrm{ht}_T(x)$ du plus long chemin qui connecte x à une feuille.
- La hauteur d'un arbre T est la hauteur $\mathrm{ht}(T)$ de sa racine.
- La mesure de déséquilibre d'un nœud x d'un arbre T est l'entier

$$\mathrm{d}_T(x) := \mathrm{ht}_T(d) - \mathrm{ht}_T(g)\,,$$

où d est le fils droit de x et g son fils gauche.

Exemple

$T :=$ 

$\mathrm{ht}_T(x) = 3$, $\mathrm{ht}(T) = 6$. Nœuds étiquetés par leur mesure de déséquilibre.

Les arbres équilibrés

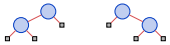
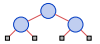
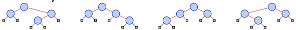
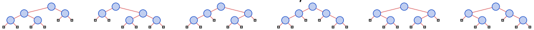
Définition

Un arbre T est équilibré si pour tout nœud x de T, $\mathtt{d}_T(x) \in \{-1, 0, 1\}$.

Les arbres équilibrés

Définition

Un arbre T est ***équilibré*** *si pour tout nœud x de T, $\mathrm{d}_T(x) \in \{-1, 0, 1\}$.*

- Premiers éléments :
  - taille 0 : ,
  - taille 1 : ,
  - taille 2 : ,
  - taille 3 : ,
  - taille 4 : ,
  - taille 5 : ,
  - taille 6 : .
- Premiers cardinaux :

$$1, 1, 2, 1, 4, 6, 4, 17, 32, 44, 60, 70, 184, 476, 872, 1553\,.$$

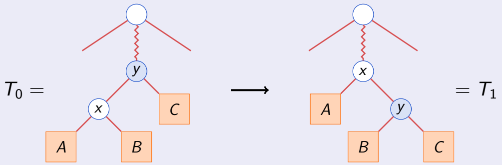
- Leur série génératrice est $E(x) := F(x, 0)$ où $F(x, y)$ vérifie

$$F(x, y) = x + F(x^2 + 2xy, x)\,.$$

L'opération de rotation

Définition

La *rotation en y* *dans un arbre* T_0 *consiste à lui appliquer la transformation locale suivante :*

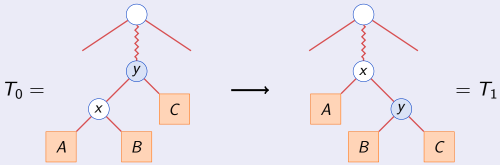


On note $T_0 \lessdot T_1$ *si* T_1 *peut être obtenu à partir de* T_0 *par une rotation.*

L'opération de rotation

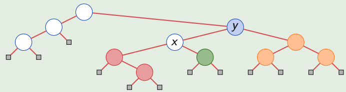
Définition

La rotation en y dans un arbre T_0 consiste à lui appliquer la transformation locale suivante :



On note $T_0 \prec T_1$ si T_1 peut être obtenu à partir de T_0 par une rotation.

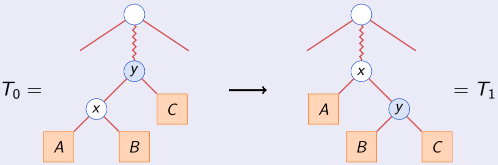
Exemple



L’opération de rotation

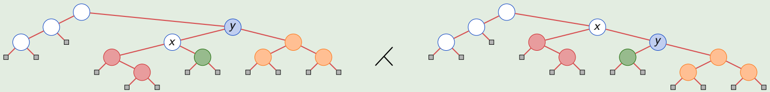
Définition

La *rotation en y* *dans un arbre* T_0 *consiste à lui appliquer la transformation locale suivante :*



On note $T_0 \prec T_1$ *si* T_1 *peut être obtenu à partir de* T_0 *par une rotation.*

Exemple



L'algorithmique des arbres équilibrés

- Les arbres équilibrés sont utilisés en tant que structures de données pour représenter des ensembles et des multi-ensembles totalement ordonnés [**Adelson-Velsky, Landis**, 1962].

L'algorithmique des arbres équilibrés

- Les arbres équilibrés sont utilisés en tant que structures de données pour représenter des ensembles et des multi-ensembles totalement ordonnés [**Adelson-Velsky, Landis**, 1962].
- L'ajout et la suppression d'éléments dans un arbre équilibré T sont logarithmiques en temps par rapport au nombre de nœuds de T.

L'algorithmique des arbres équilibrés

- Les arbres équilibrés sont utilisés en tant que structures de données pour représenter des ensembles et des multi-ensembles totalement ordonnés [**Adelson-Velsky, Landis**, 1962].
- L'ajout et la suppression d'éléments dans un arbre équilibré T sont logarithmiques en temps par rapport au nombre de nœuds de T.
- Les ajouts et suppressions de nœuds peuvent déséquilibrer l'arbre. L'équilibre est maintenu en effectuant des rotations.

L'algorithmique des arbres équilibrés

- Les arbres équilibrés sont utilisés en tant que structures de données pour représenter des ensembles et des multi-ensembles totalement ordonnés [**Adelson-Velsky, Landis**, 1962].
- L'ajout et la suppression d'éléments dans un arbre équilibré T sont logarithmiques en temps par rapport au nombre de nœuds de T.
- Les ajouts et suppressions de nœuds peuvent déséquilibrer l'arbre. L'équilibre est maintenu en effectuant des rotations.
- Aujourd'hui, ces algorithmes ne sont pas encore totalement analysés. En particulier, peu de choses sont connues sur leur comportement moyen.

Plan

Contexte et motivations
Les arbres équilibrés
Le treillis de Tamari
Objectifs

Le treillis de Tamari

Définition

L'ordre de Tamari $\leq_{\mathsf{T}}$ est la clôture réflexive et transitive de la relation $\curlywedge$.

L'ordre de Tamari définit pour tout $n \geq 0$ une structure de treillis sur les arbres de taille n [**Huang, Tamari**, 1972].

Le treillis de Tamari

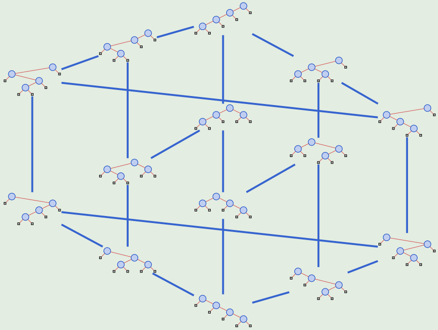
Définition

L'ordre de Tamari $\leq_{\mathsf{T}}$ est la clôture réflexive et transitive de la relation $\curlywedge$.

L'ordre de Tamari définit pour tout $n \geq 0$ une structure de treillis sur les arbres de taille n [**Huang**, **Tamari**, 1972].

Exemple

Diagramme de Hasse du treillis de Tamari d'ordre 4 :



Plan

Contexte et motivations
- Les arbres équilibrés
- Le treillis de Tamari
- Objectifs

Objectifs

Question

Quel est le rôle joué par les arbres équilibrés dans le treillis de Tamari ?

Objectifs

Question

Quel est le rôle joué par les arbres équilibrés dans le treillis de Tamari ?

Motivations et objectifs à terme :

- meilleure compréhension de l'opération de rotation ;

Objectifs

Question

Quel est le rôle joué par les arbres équilibrés dans le treillis de Tamari ?

Motivations et objectifs à terme :

- meilleure compréhension de l'opération de rotation ;
- construction d'algèbres de Hopf basées sur les arbres équilibrés, sachant que le treillis de Tamari encode le produit de l'algèbre de Hopf des arbres **PBT** [**Loday, Ronco**, 1998], [**Hivert, Novelli, Thibon**, 2005] ;

Objectifs

Question

Quel est le rôle joué par les arbres équilibrés dans le treillis de Tamari ?

Motivations et objectifs à terme :

- meilleure compréhension de l'opération de rotation ;
- construction d'algèbres de Hopf basées sur les arbres équilibrés, sachant que le treillis de Tamari encode le produit de l'algèbre de Hopf des arbres **PBT** [**Loday, Ronco**, 1998], [**Hivert, Novelli, Thibon**, 2005] ;
- conception d'outils algébriques dans le but d'obtenir un nouveau point de vue pour l'analyse des algorithmes sur les arbres équilibrés.

Plan

Les intervalles d'arbres équilibrés
- Clôture par intervalle
- Forme des intervalles

Clôture par intervalle

Définition

Soit $(P, \leq)$ *un poset. Un sous-ensemble* $Q \subseteq P$ *est* ***clos par intervalle*** *si pour tous* $x, y \in Q$*, nous avons* $[x, y] \subseteq Q$*.*

Clôture par intervalle

Définition

Soit $(P, \leq)$ *un poset. Un sous-ensemble* $Q \subseteq P$ *est* *clos par intervalle* *si pour tous* $x, y \in Q$*, nous avons* $[x, y] \subseteq Q$*.*

Théorème

L'ensemble des arbres équilibrés de taille n *est clos par intervalle dans le treillis de Tamari d'ordre* n*.*

Clôture par intervalle

Définition

Soit $(P, \leq)$ un poset. Un sous-ensemble $Q \subseteq P$ est clos par intervalle si pour tous $x, y \in Q$, nous avons $[x, y] \subseteq Q$.

Théorème

L'ensemble des arbres équilibrés de taille n est clos par intervalle dans le treillis de Tamari d'ordre n.

Une formulation équivalente : si T_1 est un arbre déséquilibré obtenu en réalisant une rotation dans un arbre équilibré T_0, alors, il est impossible de rééquilibrer T_1 en lui appliquant d'autres rotations.

Idées de la démonstration

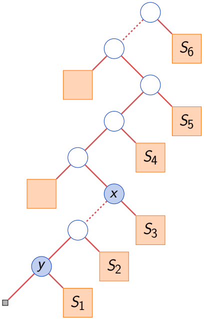
Soit T_1 un arbre déséquilibré obtenu en réalisant une rotation dans un arbre équilibré T_0.

Idées de la démonstration

Soit T_1 un arbre déséquilibré obtenu en réalisant une rotation dans un arbre équilibré T_0.

Cas initial : on montre qu'il existe un nœud x de T_1 qui vérifie, en notant y le nœud le plus à gauche du sous-arbre de racine x :

1. $\mathrm{d}_{T_1}(x) \geq 2$;
2. le sous-arbre gauche de x est équilibré ;
3. les sous-arbres S_i sont équilibrés ;
4. le mot $\mathrm{ht}(S_1) \ldots \mathrm{ht}(S_k)$ vérifie une condition de croissance.

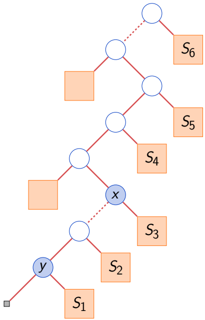


Idées de la démonstration

Soit T_1 un arbre déséquilibré obtenu en réalisant une rotation dans un arbre équilibré T_0.

Cas initial : on montre qu'il existe un nœud x de T_1 qui vérifie, en notant y le nœud le plus à gauche du sous-arbre de racine x :

1. $\mathrm{d}_{T_1}(x) \geq 2$;
2. le sous-arbre gauche de x est équilibré ;
3. les sous-arbres S_i sont équilibrés ;
4. le mot $\mathrm{ht}(S_1) \ldots \mathrm{ht}(S_k)$ vérifie une condition de croissance.



Conservation : on montre que toute rotation appliquée dans un arbre T_1 qui possède un nœud x vérifiant (1), (2), (3) et (4) donne un arbre T_2 qui possède un nœud x' vérifiant ces mêmes propriétés.

Plan

Les intervalles d'arbres équilibrés

Clôture par intervalle

Forme des intervalles

Forme des intervalles

Définition

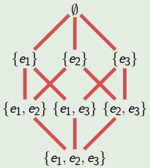
L'hypercube de dimension k est le poset dont les éléments sont les sous-ensembles de $\{e_1, \ldots, e_k\}$ et l'ordre est l'inclusion ensembliste.

Forme des intervalles

Définition

L'hypercube de dimension k est le poset dont les éléments sont les sous-ensembles de $\{e_1, \ldots, e_k\}$ et l'ordre est l'inclusion ensembliste.

Exemple

L'hypercube de dimension 3 :  .

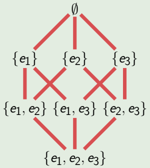
Forme des intervalles

Définition

L'hypercube de dimension k est le poset dont les éléments sont les sous-ensembles de $\{e_1, \ldots, e_k\}$ et l'ordre est l'inclusion ensembliste.

Exemple

L'hypercube de dimension 3 :



.

Théorème

Tout intervalle $[T_0, T_1]$ d'arbres équilibrés dans le treillis de Tamari d'ordre n est isomorphe à l'hypercube de dimension k où k est le nombre de rotations nécessaires pour obtenir T_1 à partir de T_0.

La restriction de l'ordre de Tamari aux arbres équilibrés

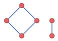
(a) ordre 0

(b) ordre 1

(c) ordre 2

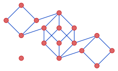
(d) ordre 3

(e) ordre 4

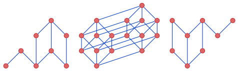


(f) ordre 5

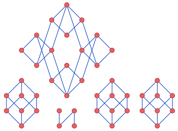
(g) ordre 6



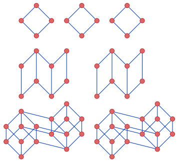
(h) ordre 7



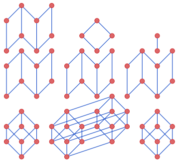
(i) ordre 8



(j) ordre 9



(k) ordre 10



(l) ordre 11

Idées de la démonstration

Soit $I := [T_0, T_1]$ un intervalle d'arbres équilibrés. On montre successivement les points suivants.

Idées de la démonstration

Soit $I := [T_0, T_1]$ un intervalle d'arbres équilibrés. On montre successivement les points suivants.

1. Il existe un unique ensemble R qui contient les nœuds de T_0 en lesquels une rotation doit être appliquée pour obtenir T_1.

Idées de la démonstration

Soit $I := [T_0, T_1]$ un intervalle d'arbres équilibrés. On montre successivement les points suivants.

1. Il existe un unique ensemble R qui contient les nœuds de T_0 en lesquels une rotation doit être appliquée pour obtenir T_1.

2. Les rotations en les nœuds de R peuvent être réalisées dans n'importe quel ordre pour obtenir T_1 à partir de T_0.

Idées de la démonstration

Soit $I := [T_0, T_1]$ un intervalle d'arbres équilibrés. On montre successivement les points suivants.

1. Il existe un unique ensemble R qui contient les nœuds de T_0 en lesquels une rotation doit être appliquée pour obtenir T_1.
2. Les rotations en les nœuds de R peuvent être réalisées dans n'importe quel ordre pour obtenir T_1 à partir de T_0.
3. Tout arbre $T \in I$ peut s'encoder par un sous-ensemble $\rho(T)$ de R où T est l'arbre que l'on obtient en réalisant des rotations en les nœuds de $\rho(T)$ à partir de T_0.

Idées de la démonstration

Soit $I := [T_0, T_1]$ un intervalle d'arbres équilibrés. On montre successivement les points suivants.

1. Il existe un unique ensemble R qui contient les nœuds de T_0 en lesquels une rotation doit être appliquée pour obtenir T_1.
2. Les rotations en les nœuds de R peuvent être réalisées dans n'importe quel ordre pour obtenir T_1 à partir de T_0.
3. Tout arbre $T \in I$ peut s'encoder par un sous-ensemble $\rho(T)$ de R où T est l'arbre que l'on obtient en réalisant des rotations en les nœuds de $\rho(T)$ à partir de T_0.
4. On conclut par le fait que pour tous $T, T' \in I$, on a $T \leq_{\mathsf{T}} T'$ si et seulement si $\rho(T) \subseteq \rho(T')$.

Plan

Grammaires synchrones et dénombrement
Dénombrement des arbres équilibrés maximaux
Dénombrement des intervalles d'arbres équilibrés

Les arbres équilibrés maximaux

Définition

Un arbre équilibré T est maximal si tout arbre T' différent de T qui vérifie $T \leq_{\mathsf{T}} T'$ est déséquilibré.

Les arbres équilibrés maximaux

Définition

Un arbre équilibré T est maximal si tout arbre T' différent de T qui vérifie $T \leq_{\mathsf{T}} T'$ est déséquilibré.

Question

Peut-on caractériser les arbres maximaux, les dénombrer ?

Les arbres équilibrés maximaux

Définition

Un arbre équilibré T est maximal si tout arbre T' différent de T qui vérifie $T \leq_{\mathsf{T}} T'$ est déséquilibré.

Question

Peut-on caractériser les arbres maximaux, les dénombrer ?

Pour répondre à cette question, nous avons besoin de deux outils : les motifs de déséquilibre et les grammaires synchrones.

Motifs de déséquilibre

Définition

Un motif de déséquilibre est un arbre sans feuilles étiqueté sur $\mathbb{Z}$.

Motifs de déséquilibre

Définition

Un motif de déséquilibre est un arbre sans feuilles étiqueté sur $\mathbb{Z}$.

Définition

Un arbre T admet une occurrence d'un motif de déséquilibre m si, en étiquetant chaque nœud de T par sa mesure de déséquilibre, il existe dans T une composante connexe qui est de même forme et qui possède les mêmes étiquettes que m.

Motifs de déséquilibre

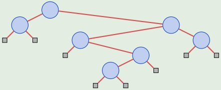
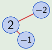
Définition

Un *motif de déséquilibre* *est un arbre sans feuilles étiqueté sur* $\mathbb{Z}$.

Définition

Un arbre T *admet une* *occurrence* *d'un motif de déséquilibre* m *si, en étiquetant chaque nœud de* T *par sa mesure de déséquilibre, il existe dans* T *une composante connexe qui est de même forme et qui possède les mêmes étiquettes que* m.

Exemple

L'arbre  admet une occurrence du motif 

.

Motifs de déséquilibre

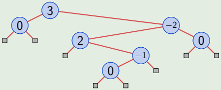
Définition

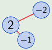
Un motif de déséquilibre *est un arbre sans feuilles étiqueté sur* $\mathbb{Z}$.

Définition

Un arbre T *admet une* occurrence *d'un motif de déséquilibre* m *si, en étiquetant chaque nœud de* T *par sa mesure de déséquilibre, il existe dans* T *une composante connexe qui est de même forme et qui possède les mêmes étiquettes que* m.

Exemple

L'arbre 

admet une occurrence du motif 

.

Motifs de déséquilibre

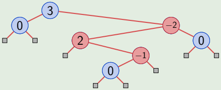
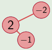
Définition

Un *motif de déséquilibre* *est un arbre sans feuilles étiqueté sur* $\mathbb{Z}$.

Définition

Un arbre T *admet une* *occurrence* *d'un motif de déséquilibre* m *si, en étiquetant chaque nœud de* T *par sa mesure de déséquilibre, il existe dans* T *une composante connexe qui est de même forme et qui possède les mêmes étiquettes que* m.

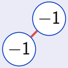
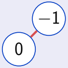
Exemple

L'arbre  admet une occurrence du motif .

Description des arbres maximaux par évitement de motifs

Proposition

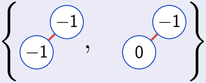
Un arbre équilibré est maximal si et seulement s'il évite l'ensemble de motifs

$M_{\mathsf{max}} := \Big\{$  ,  $\Big\}$.

Description des arbres maximaux par évitement de motifs

Proposition

Un arbre équilibré est maximal si et seulement s'il évite l'ensemble de motifs

$M_{\mathsf{max}} :=$  .

Idées de la démonstration :

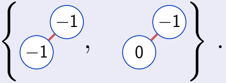
1. (⇒) : on montre que si T est un arbre équilibré qui admet une occurrence d'un élément de M_{max}, alors, il est couvert par un arbre équilibré.

Description des arbres maximaux par évitement de motifs

Proposition

Un arbre équilibré est maximal si et seulement s'il évite l'ensemble de motifs

$$M_{\mathrm{max}} :=$$



Idées de la démonstration :

1. $(\Rightarrow)$: on montre que si T est un arbre équilibré qui admet une occurrence d'un élément de M_{max}, alors, il est couvert par un arbre équilibré.
2. $(\Leftarrow)$: on montre que si T n'admet aucune occurrence des motifs de M_{max}, alors, toute rotation appliquée dans T produit un arbre déséquilibré. On conclut par le fait que l'ensemble des arbres équilibrés est clos par intervalle.

Grammaires synchrones

- Une grammaire synchrone permet d'engendrer un arbre en le faisant pousser de la racine vers les feuilles, étape par étape.

Grammaires synchrones

- Une grammaire synchrone permet d'engendrer un arbre en le faisant pousser de la racine vers les feuilles, étape par étape.
- Une étape de génération consiste à substituer simultanément chaque feuille de l'arbre — les bourgeons — par de nouveaux arbres, selon des règles de substitution fixées.

Grammaires synchrones

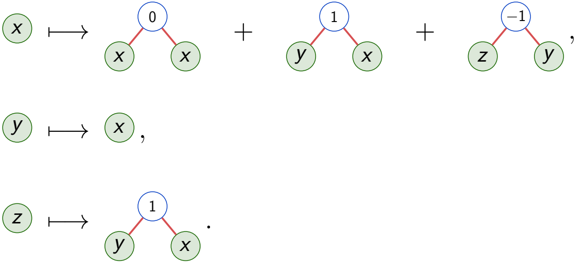
- Une grammaire synchrone permet d'engendrer un arbre en le faisant pousser de la racine vers les feuilles, étape par étape.
- Une étape de génération consiste à substituer simultanément chaque feuille de l'arbre — les bourgeons — par de nouveaux arbres, selon des règles de substitution fixées.
- Le fait que les branches d'un arbre poussent de manière synchrone permet de contrôler les mesures de déséquilibre de ses nœuds.

Grammaires synchrones

- Une grammaire synchrone permet d'engendrer un arbre en le faisant pousser de la racine vers les feuilles, étape par étape.
- Une étape de génération consiste à substituer simultanément chaque feuille de l'arbre — les bourgeons — par de nouveaux arbres, selon des règles de substitution fixées.
- Le fait que les branches d'un arbre poussent de manière synchrone permet de contrôler les mesures de déséquilibre de ses nœuds.
- Sous certaines hypothèses (non ambiguïté, condition sur les degrés), on peut extraire, à partir d'une grammaire synchrone, une équation fonctionnelle pour la série génératrice des arbres qu'elle engendre.

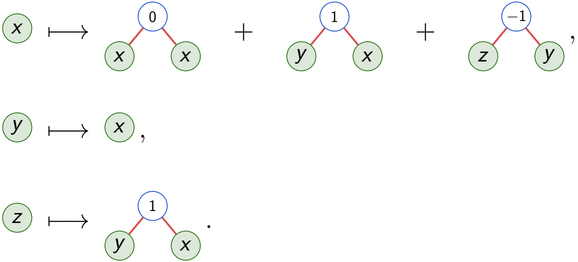
Grammaire synchrone des arbres maximaux

Soit M la grammaire synchrone d'axiome x, de bourgeon terminal x et qui contient les règles de substitution suivantes :



Grammaire synchrone des arbres maximaux

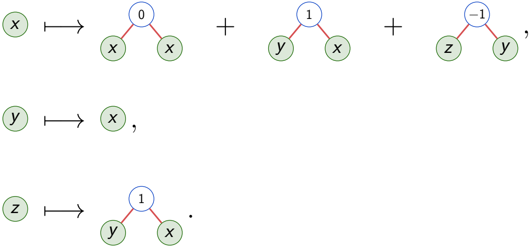
Soit M la grammaire synchrone d'axiome x, de bourgeon terminal x et qui contient les règles de substitution suivantes :



Proposition

Le langage engendré par M est l'ensemble des arbres maximaux.

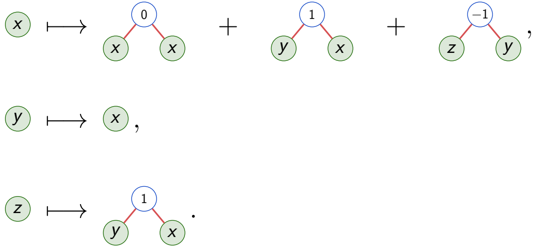
Exemple de génération d'un arbre maximal



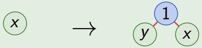
Exemple

x

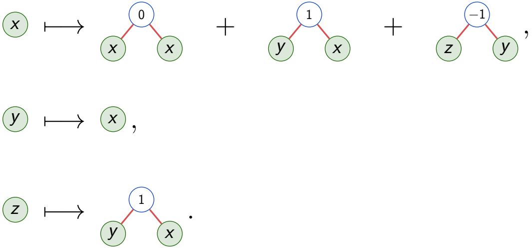
Exemple de génération d'un arbre maximal



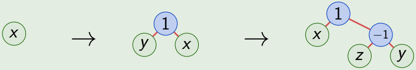
Exemple



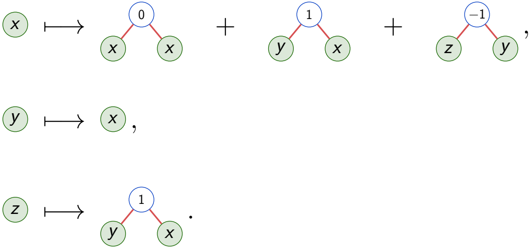
Exemple de génération d'un arbre maximal



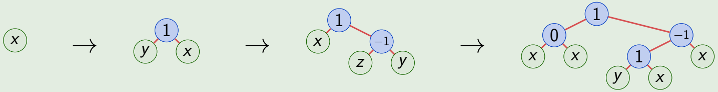
Exemple



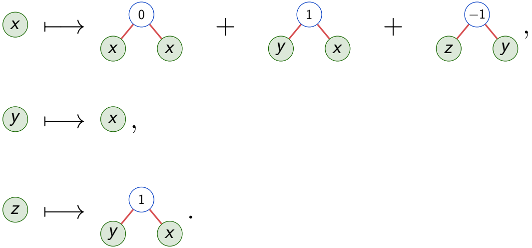
Exemple de génération d'un arbre maximal



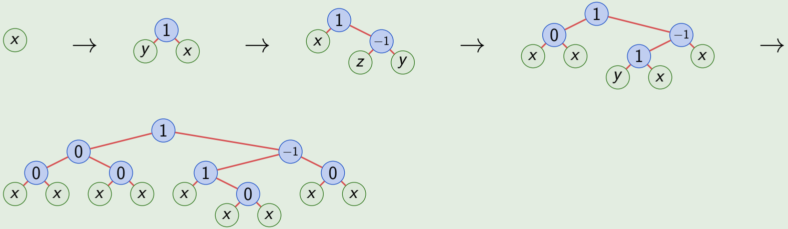
Exemple



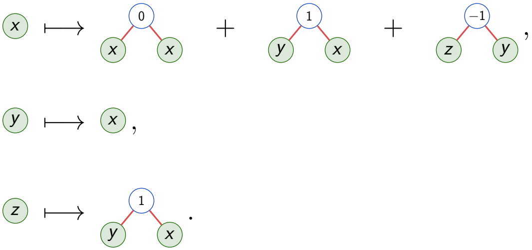
Exemple de génération d'un arbre maximal



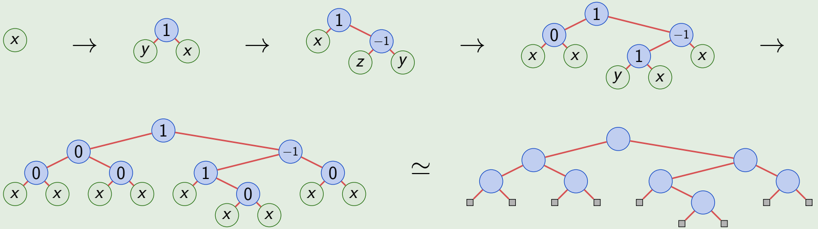
Exemple



Exemple de génération d’un arbre maximal



Exemple



Équation fonctionnelle pour la série génératrice des arbres maximaux

On déduit directement de la grammaire synchrone M que la série génératrice des arbres maximaux est $M(x) := F(x, 0, 0)$ où $F(x, y, z)$ vérifie

$$F(x, y, z) = x + F(x^2 + xy + yz, x, xy)\,.$$

Équation fonctionnelle pour la série génératrice des arbres maximaux

On déduit directement de la grammaire synchrone M que la série génératrice des arbres maximaux est $M(x) := F(x, 0, 0)$ où $F(x, y, z)$ vérifie

$$F(x, y, z) = x + F(x^2 + xy + yz, x, xy)\,.$$

On calcule F par itération, par exemple :

$$F^{[0]}(x, y, z) \quad = \quad x\,,$$

Équation fonctionnelle pour la série génératrice des arbres maximaux

On déduit directement de la grammaire synchrone M que la série génératrice des arbres maximaux est $M(x) := F(x, 0, 0)$ où $F(x, y, z)$ vérifie

$$F(x, y, z) = x + F(x^2 + xy + yz, x, xy)\,.$$

On calcule F par itération, par exemple :

$$\begin{aligned} F^{[0]}(x, y, z) &= x\,, \\ F^{[1]}(x, y, z) &= x + x^2 + xy + yz\,, \end{aligned}$$

Équation fonctionnelle pour la série génératrice des arbres maximaux

On déduit directement de la grammaire synchrone M que la série génératrice des arbres maximaux est $M(x) := F(x, 0, 0)$ où $F(x, y, z)$ vérifie

$$F(x, y, z) = x + F(x^2 + xy + yz, x, xy)\,.$$

On calcule F par itération, par exemple :

$$\begin{aligned}
F^{[0]}(x, y, z) &= x\,,\\
F^{[1]}(x, y, z) &= x + x^2 + xy + yz\,,\\
F^{[2]}(x, y, z) &= x + x^2 + xy + yz + x^3 + 2x^2y + xyz + x^4 + \\
&\quad 2x^3y + x^2y^2 + 2x^2yz + 2xy^2z + y^2z^2\,.
\end{aligned}$$

Équation fonctionnelle pour la série génératrice des arbres maximaux

On déduit directement de la grammaire synchrone M que la série génératrice des arbres maximaux est $M(x) := F(x, 0, 0)$ où $F(x, y, z)$ vérifie

$$F(x, y, z) = x + F(x^2 + xy + yz, x, xy)\,.$$

On calcule F par itération, par exemple :

$$\begin{aligned}
F^{[0]}(x, y, z) &= x\,, \\
F^{[1]}(x, y, z) &= x + x^2 + xy + yz\,, \\
F^{[2]}(x, y, z) &= x + x^2 + xy + yz + x^3 + 2x^2y + xyz + x^4 + \\
&\quad 2x^3y + x^2y^2 + 2x^2yz + 2xy^2z + y^2z^2\,.
\end{aligned}$$

Les premiers cardinaux des arbres maximaux sont

$$1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 4, 6, 9, 11, 13, 22, 38, 60, 89, 128, 183, 256, 353, 512, 805\,.$$

Plan

Grammaires synchrones et dénombrement
Dénombrement des arbres équilibrés maximaux
Dénombrement des intervalles d'arbres équilibrés

Un encodage des intervalles d'arbres équilibrés

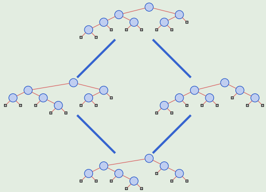
Tout intervalle $I := [T_0, T_1]$ d'arbres équilibrés peut être encodé par l'arbre T_0 dans lequel les nœuds de $\rho(T_1)$ sont marqués.

Un encodage des intervalles d'arbres équilibrés

Tout intervalle $I := [T_0, T_1]$ d'arbres équilibrés peut être encodé par l'arbre T_0 dans lequel les nœuds de $\rho(T_1)$ sont marqués.

Exemple

L'intervalle

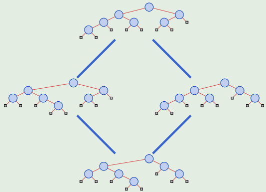


Un encodage des intervalles d'arbres équilibrés

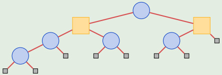
Tout intervalle $I := [T_0, T_1]$ d'arbres équilibrés peut être encodé par l'arbre T_0 dans lequel les nœuds de $\rho(T_1)$ sont marqués.

Exemple

L'intervalle

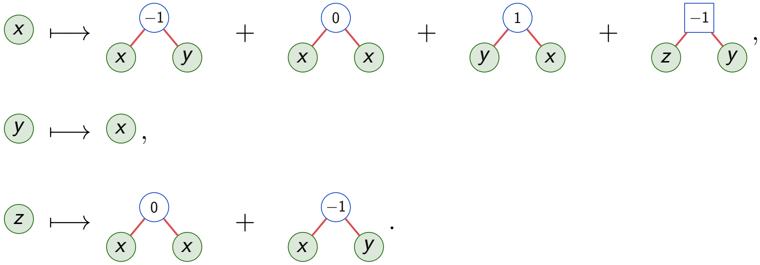


est encodé par la structure arborescente

 .

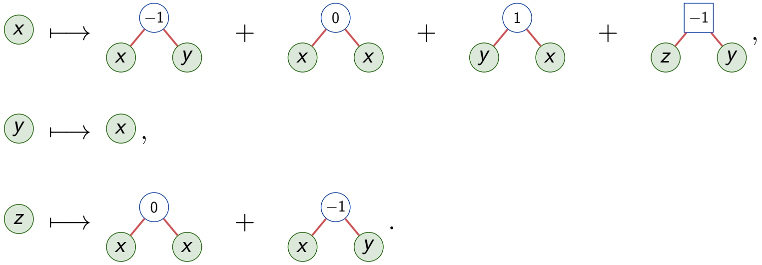
Grammaire synchrone des intervalles d'arbres équilibrés

Soit I la grammaire synchrone d'axiome x, de bourgeon terminal x et qui contient les règles de substitution suivantes :



Grammaire synchrone des intervalles d'arbres équilibrés

Soit I la grammaire synchrone d'axiome x, de bourgeon terminal x et qui contient les règles de substitution suivantes :



Proposition

Le langage engendré par I est l'ensemble des intervalles d'arbres équilibrés.

Équation fonctionnelle pour la série génératrice des intervalles d'arbres équilibrés

On déduit directement de la grammaire synchrone I que la série génératrice des intervalles d'arbres équilibrés est $I(x) := F(x, 0, 0)$ où $F(x, y, z)$ vérifie

$$F(x, y, z) = x + F(x^2 + 2xy + yz, x, x^2 + xy)\,.$$

Équation fonctionnelle pour la série génératrice des intervalles d'arbres équilibrés

On déduit directement de la grammaire synchrone I que la série génératrice des intervalles d'arbres équilibrés est $I(x) := F(x, 0, 0)$ où $F(x, y, z)$ vérifie

$$F(x, y, z) = x + F(x^2 + 2xy + yz, x, x^2 + xy)\,.$$

On calcule F par itération, par exemple :

$$F^{[0]}(x, y, z) \quad = \quad x\,,$$

Équation fonctionnelle pour la série génératrice des intervalles d'arbres équilibrés

On déduit directement de la grammaire synchrone I que la série génératrice des intervalles d'arbres équilibrés est $I(x) := F(x, 0, 0)$ où $F(x, y, z)$ vérifie

$$F(x, y, z) = x + F(x^2 + 2xy + yz, x, x^2 + xy)\,.$$

On calcule F par itération, par exemple :

$$\begin{aligned} F^{[0]}(x, y, z) &= x\,, \\ F^{[1]}(x, y, z) &= x + x^2 + 2xy + yz\,, \end{aligned}$$

Équation fonctionnelle pour la série génératrice des intervalles d'arbres équilibrés

On déduit directement de la grammaire synchrone I que la série génératrice des intervalles d'arbres équilibrés est $I(x) := F(x, 0, 0)$ où $F(x, y, z)$ vérifie

$$F(x, y, z) = x + F(x^2 + 2xy + yz, x, x^2 + xy)\,.$$

On calcule F par itération, par exemple :

$$\begin{aligned}
F^{[0]}(x, y, z) &= x\,, \\
F^{[1]}(x, y, z) &= x + x^2 + 2xy + yz\,, \\
F^{[2]}(x, y, z) &= x + x^2 + 2xy + yz + 3x^3 + 5x^2y + 2xyz + x^4 + \\
&\quad 4x^3y + 4x^2y^2 + 2x^2yz + 4xy^2z + y^2z^2\,.
\end{aligned}$$

Équation fonctionnelle pour la série génératrice des intervalles d'arbres équilibrés

On déduit directement de la grammaire synchrone I que la série génératrice des intervalles d'arbres équilibrés est $I(x) := F(x, 0, 0)$ où $F(x, y, z)$ vérifie

$$F(x, y, z) = x + F(x^2 + 2xy + yz, x, x^2 + xy) .$$

On calcule F par itération, par exemple :

$$\begin{aligned}
F^{[0]}(x, y, z) &= x , \\
F^{[1]}(x, y, z) &= x + x^2 + 2xy + yz , \\
F^{[2]}(x, y, z) &= x + x^2 + 2xy + yz + 3x^3 + 5x^2y + 2xyz + x^4 + \\
&\quad 4x^3y + 4x^2y^2 + 2x^2yz + 4xy^2z + y^2z^2 .
\end{aligned}$$

Les premiers nombres d'intervalles d'arbres équilibrés sont

$$1, 1, 3, 1, 7, 12, 6, 52, 119, 137, 195, 231, 1019, 3503, 6593, 12616, 26178 .$$