L'opérade des configurations non croisées bicolorées

Samuele Giraudo

—

Travail en commun avec Frédéric Chapoton

Séminaire de combinatoire du LaCIM

4 avril 2012

Plan

Les opérades (1/2)

Une opérade (ensembliste non symétrique) est un triplet $(\mathcal{P}, \circ_i, \mathbf{1})$ où

- $\mathcal{P}$ est un ensemble de la forme
$$\mathcal{P} := \biguplus_{n \geqslant 1} \mathcal{P}(n)\ ;$$
- $\circ_i$ est une application dite de greffe
$$\circ_i : \mathcal{P}(n) \times \mathcal{P}(m) \to \mathcal{P}(n+m-1),$$
définie lorsque $i \in [n]$;
- $\mathbf{1}$ est un élément de $\mathcal{P}(1)$, appelé l'unité.

Ces données doivent vérifier des axiomes d'associativité, de commutativité et d'unitarité.

Les opérades (2/2)

Pour tous $x \in \mathcal{P}(n)$, $y \in \mathcal{P}(m)$ et $z \in \mathcal{P}(k)$, on a les relations

1. d'associativité :

   $$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z),$$

   où $i \in [n]$ et $j \in [m]$;

2. de commutativité :

   $$(x \circ_i y) \circ_{j+m-1} z = (x \circ_j z) \circ_i y,$$

   où $1 \leqslant i < j \leqslant n$;

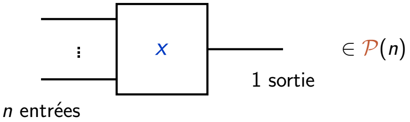
3. et d'unitarité :

   $$\mathbf{1} \circ_1 x = x = x \circ_i \mathbf{1},$$

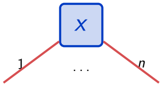
   où $i \in [n]$.

Intuition (1/2)

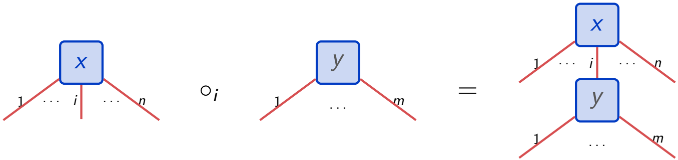
Élément de $\mathcal{P}(n) \rightsquigarrow$ opérateur d'arité n :



Opérateur d'arité $n \rightsquigarrow$ arbre plan enraciné à n feuilles :

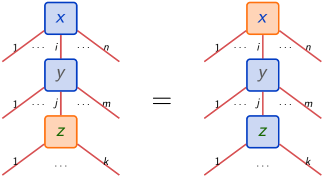


Application de greffe $\rightsquigarrow$ greffe d'arbres :

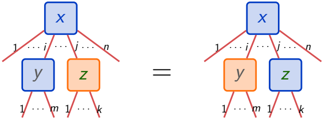


Intuition (2/2)

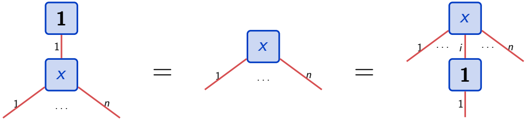
1. Relation d'associativité :



2. Relation de commutativité :



3. Relation d'unitarité :



L'opérade associative

Soit $(\mathrm{Assoc}, \circ_i, \mathtt{a}_1)$ l'opérade définie pour tout $n \geqslant 1$ par

$$\mathrm{Assoc}(n) := \{\mathtt{a}_n\},$$

et pour tous $n, m \geqslant 1$ et $i \in [n]$,

$$\mathtt{a}_n \circ_i \mathtt{a}_m := \mathtt{a}_{n+m-1}.$$

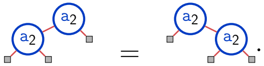
- Dimensions : 1, 1, 1, 1, 1, 1, ...
- Assoc est engendrée par $\mathtt{a}_2$:

$$\mathtt{a}_1, \quad \mathtt{a}_2, \quad \mathtt{a}_3 = \mathtt{a}_2 \circ_1 \mathtt{a}_2, \quad \mathtt{a}_4 = \mathtt{a}_3 \circ_1 \mathtt{a}_2, \quad \mathtt{a}_5 = \mathtt{a}_4 \circ_1 \mathtt{a}_2, \quad \ldots$$

- $\mathtt{a}_2$ est soumis à la relation

$$\mathtt{a}_2 \circ_1 \mathtt{a}_2 = \mathtt{a}_2 \circ_2 \mathtt{a}_2,$$

qui se traduit en termes d'arbres syntaxiques par



- Présentation par générateurs et relations :

$$\mathrm{Assoc} = \langle \mathtt{a}_2 \quad | \quad \mathtt{a}_2 \circ_1 \mathtt{a}_2 = \mathtt{a}_2 \circ_2 \mathtt{a}_2 \rangle .$$

L'opérade magmatique

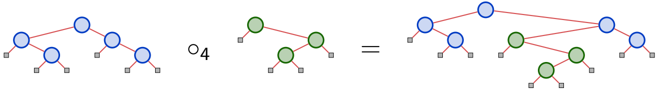
Soit $(\mathrm{Mag}, \circ_i, \square)$ l'opérade définie pour tout $n \geqslant 1$ par

$$\mathrm{Mag}(n) := \{T : T \text{ arbre binaire à } n \text{ feuilles}\},$$

et pour tous $n, m \geqslant 1$ et $i \in [n]$,

$$S \circ_i T := \text{arbre obtenu en greffant } T \text{ sur la } i^{\text{e}} \text{ feuille de } S.$$

Par exemple,



- Dimensions : 1, 1, 2, 5, 14, 42, ...
- Mag est engendrée par .
- Présentation par générateurs et relations :

$$\mathrm{Mag} = \langle$$  $$\mid \quad \rangle .$$

L'opérade des compositions d'entiers

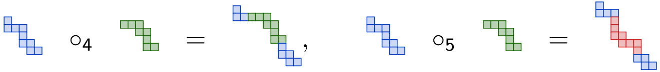
Soit $(\mathrm{Comp}, \circ_i,$ $)$ l'opérade définie pour tout $n \geqslant 1$ par

$$\mathrm{Comp}(n) := \{D : D \text{ diagramme ruban d'une composition de } n\},$$

et pour tous $n, m \geqslant 1$ et $i \in [n]$,

$$C \circ_i D := \begin{cases} C \leftarrow_i D & \text{si la } i^{\text{e}} \text{ case de } C \text{ est la plus haute de sa colonne,} \\ C \leftarrow_i D^t & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par exemple,



- Dimensions : 1, 2, 4, 8, 16, 32, ...
- Comp est engendrée par  et .
- Présentation par générateurs et relations :

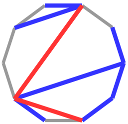
Comp $= \langle$ ,  $\mid$  $\circ_1$  $=$  $\circ_2$ ,  $\circ_1$  $=$  $\circ_2$ ,
 $\circ_1$  $=$  $\circ_2$ ,  $\circ_1$  $=$  $\circ_2$  $\rangle$.

Les configurations non croisées bicolorées (1/3)

Une configuration non croisée bicolorée (CNCB) est un polygone régulier muni d'arêtes bleues et d'arêtes rouges qui vérifient les deux conditions :

1. aucune arête ne croise une autre ;
2. les arêtes rouges ne sont pas sur les côtés du polygone.

Par exemple,



est une CNCB de taille 9 (nombre de côtés du polygone moins un).

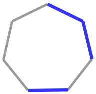
Les configurations non croisées bicolorées (2/3)

La base d'une CNCB est son côté le plus bas.

Une CNCB est basée si sa base est bleue.

Les autres côtés d'une CNCB sont numérotés $1, 2, \ldots, n$ de gauche à droite à partir de la base.

Une bulle est une CNCB de taille supérieure à 2 sans diagonale. Par exemple,

$\mathfrak{b} :=$  .

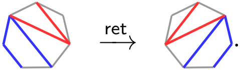
Le bord $\mathrm{b}(\mathfrak{b})$ d'une bulle $\mathfrak{b}$ de taille n est le mot $u_1 \ldots u_n$ défini par

$$u_i := \begin{cases} 1 & \text{si le } i^{\text{e}} \text{ côte de } \mathfrak{b} \text{ est bleu,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

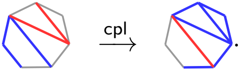
Par exemple, pour la bulle ci-dessus, $\mathrm{b}(\mathfrak{b}) = 000110$.

Les configurations non croisées bicolorées (3/3)

Soit ret l'application qui envoie une CNCB sur sa retournée selon l'axe de symétrie vertical. Par exemple,

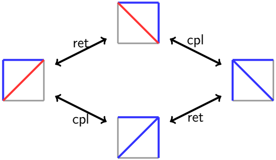


Soit cpl l'application qui envoie une CNCB sur sa complémentaire obtenue en échangeant les diagonales bleues et rouges et en échangeant les côtés bleus et les côtés vides. Par exemple,



Lemme

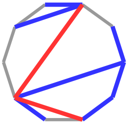
Les applications ret *et* cpl *sont des involutions qui commutent entre elles.*



Motivations (1/2)

Généralisation des configurations non croisées et des arbres non croisés (dénombrement [**Noy**, 1998], structure d'opérade [**Chapoton**, 2007]).

Liens avec la théorie des moules. On peut associer une fraction rationnelle à toute CNCB. Par exemple,



$$\longrightarrow \quad \frac{(x_2 + \cdots + x_5)(x_2 + \cdots + x_9)}{x_1(x_2 + \cdots + x_7)(x_4 + x_5)x_5x_7x_8x_9}.$$

Généralisation des fractions rationnelles de ce type (pas de numérateur dans les travaux préexistants).

Motivations (2/2)

Nombre de CNCB par taille :

$$1,\ 8,\ 80,\ 992,\ 13760,\ 204416,\ \ldots$$

Question

Comment dénombrer les CNCB ?

Question

Peut-on représenter des objets combinatoires connus avec des CNCB munis de contraintes ?

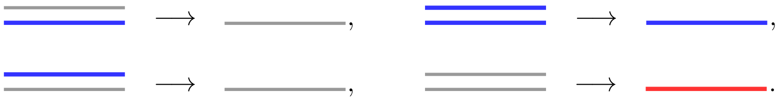
Un angle d'attaque : une structure d'opérade sur les CNCB.

L'opérade des CNCB

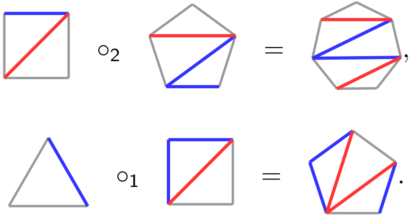
Soit $(\mathcal{C}, \circ_i, \_\_)$ l'opérade définie pour tout $n \geqslant 1$ par

$$\mathcal{C}(n) := \{\mathfrak{c} : \mathfrak{c} \text{ est une CNCB de taille } n\},$$

et pour tous $n, m \geqslant 1$ et $i \in [n]$, $\mathfrak{c} \circ_i \mathfrak{d}$ est la CNCB obtenue en collant la base de $\mathfrak{d}$ sur le i^{e} côté de $\mathfrak{c}$ et en modifiant ce dernier selon les règles



Par exemple,



Propriétés (1/3)

Proposition

L'opérade $\mathcal{C}$ est engendrée par les huit CNCB

de taille deux.

Démonstration.

On procède par récurrence sur l'arité n de la CNCB $\mathfrak{c}$ que l'on souhaite engendrer.

Si $\mathfrak{c}$ est une bulle, soit $\mathfrak{c}'$ la CNCB d'arité $n-1$ obtenue en supprimant son dernier côté. Par h.r., $\mathfrak{c}'$ est engendrée par les huit générateurs et on a $\mathfrak{c} = \mathfrak{c}' \circ_{n-1} g$ pour un certain des huit générateurs g.

Si $\mathfrak{c}$ n'est pas une bulle, on peut la scinder selon l'une de ses diagonales en deux parties $(\mathfrak{d}, \mathfrak{e})$ strictement plus petites. Par h.r., $\mathfrak{d}$ et $\mathfrak{e}$ sont engendrées par les huit générateurs et c'est donc aussi le cas pour $\mathfrak{c}$. $\square$

Propriétés (2/3)

Un anti-automorphisme d'opérades est une bijection

$$\phi : \mathcal{P} \to \mathcal{P},$$

qui respecte les arités et telle que pour tous $n \geqslant 1$, $x \in \mathcal{P}(n)$ et $y \in \mathcal{P}$,

$$\phi(x \circ_i y) = \phi(x) \circ_{n-i+1} \phi(y).$$

L'opérade $\mathcal{C}$ admet de nombreuses symétries :

Proposition

L'application cpl : $\mathcal{C} \to \mathcal{C}$ *est un automorphisme d'opérades.*

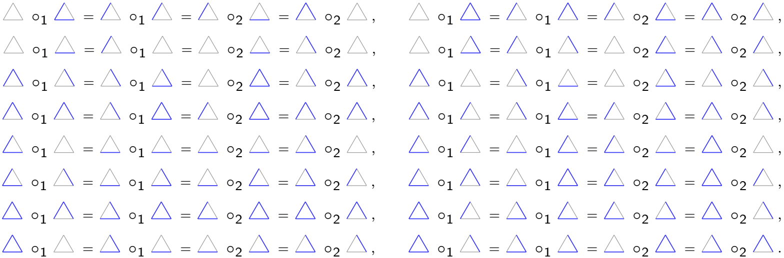
L'application ret : $\mathcal{C} \to \mathcal{C}$ *est un anti-automorphisme d'opérades.*

Question

Y a-t-il d'autres (anti-)automorphismes dans $\mathcal{C}$?

Propriétés (3/3)

L'opérade $\mathcal{C}$ admet les 16 relations de degré 2 suivantes :



Mais aussi des relations de degré 3 comme (entre autres) :

Et des relations de plus haut degré encore.

Question

L'opérade $\mathcal{C}$ admet-elle une présentation finie ?

Décomposition en bulles (1/2)

Soit l'application

$$\circ : \mathcal{C}(n) \times \mathcal{C}(m_1) \times \cdots \times \mathcal{C}(m_n) \to \mathcal{C}(m_1 + \ldots m_n),$$

définie par

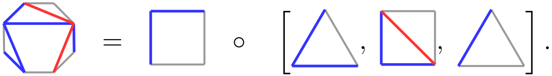
$$\mathfrak{b} \circ [\mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_n] := (\ldots((\mathfrak{b} \circ_n \mathfrak{c}_n) \circ_{n-1} \mathfrak{c}_{n-1}) \ldots) \circ_1 \mathfrak{c}_1.$$

Tout élément $\mathfrak{c}$ de $\mathcal{C}$ de taille n se décompose de manière unique sous la forme

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{b} \circ [\mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_n],$$

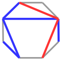
où $\mathfrak{b}$ est la bulle constituée du plus grand polygone adjacent à la base de $\mathfrak{c}$.

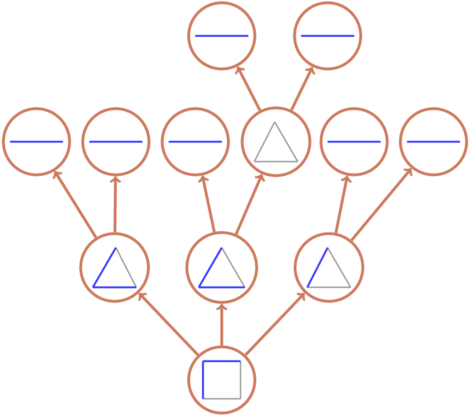
Par exemple,



Décomposition en bulles (2/2)

En itérant cette décomposition — et grâce à la structure d'opérade — toute CNCB est en bijection avec un arbre dont les sommets d'arité $n \geqslant 2$ sont étiquetés par des bulles d'arité n.

Par exemple, pour la CNCB , on obtient la décomposition en bulles



Dénombrement des CNCB (1/2)

On cherche à exprimer la série

$$\mathsf{F}(t) := \sum_{n \geqslant 1} \#\mathcal{C}(n)\, t^n = t + 8t + 80t^2 + 992t^3 + \cdots .$$

Posons

$$\mathsf{B}^+(x, y) := \sum_{\mathfrak{b} \text{ bulle basée de } \mathcal{C}} x^{|\mathrm{b}(\mathfrak{b})|_1}\, y^{|\mathrm{b}(\mathfrak{b})|_0},$$

et

$$\mathsf{B}^-(x, y) := \sum_{\mathfrak{b} \text{ bulle non basée de } \mathcal{C}} x^{|\mathrm{b}(\mathfrak{b})|_1}\, y^{|\mathrm{b}(\mathfrak{b})|_0}.$$

La décomposition en bulles implique

Proposition

La série $\mathsf{F}(t)$ *est solution du système*

$$\begin{cases} \mathsf{F}^+(t) = t + \mathsf{B}^+\left(\mathsf{F}^+(t), \mathsf{F}^-(t)\right), \\ \mathsf{F}^-(t) = t + \mathsf{B}^-\left(\mathsf{F}^+(t), \mathsf{F}^-(t)\right), \\ \mathsf{F}(t) = \mathsf{F}^+(t) + \mathsf{F}^-(t) - t. \end{cases}$$

Dénombrement des CNCB (2/2)

Lemme

Les séries $\mathrm{B}^{+}(x, y)$ *et* $\mathrm{B}^{-}(x, y)$ *vérifient*

$$\mathrm{B}^{+}(x, y) = \mathrm{B}^{-}(x, y) = \sum_{n \geqslant 2} (x + y)^n = \frac{(x + y)^2}{1 - x - y}.$$

Démonstration.

Il n'y a aucune contrainte sur les bulles de $\mathcal{C}$. □

Ceci implique, avec la proposition précédente,

Théorème

La série $\mathrm{F}(t)$ *vérifie*

$$\mathrm{F}(t) = \frac{1 - (1 - 20t + 4t^2)^{\frac{1}{2}} - 4t}{6}.$$

Sous-opérades (1/3)

On considère les sous-opérades de $\mathcal{C}$ engendrées par des sous-ensembles de l'ensemble de ses huit générateurs.

Il y a *a priori* $256 = 2^8$ cas à explorer mais seuls 88 cas sont vraiment à considérer à cause des symétries induites par ret et cpl.

Voici les sous-opérades de $\mathcal{C}$ dont les dimensions sont des suites connues :

Générateurs	Objets	Suite	OEIS
$\emptyset$	–	1, 0, 0	**A000007**
$\triangle$	–	1, 1, 1	**A000012**
$\triangle$	Arb. bin.	1, 1, 2, 5, 14	**A000108**
$\triangle$, $\triangle$	Arb. de Schröder	1, 2, 6, 22, 90	**A006318**
$\triangle$, $\triangle$	–	1, 2, 7, 30, 143	**A006013**
$\triangle$, $\triangle$	Arb. bin. hybrides	1, 2, 7, 31, 154	**A007863**
$\triangle$, $\triangle$	Cartes eulér. enrac.	1, 2, 8, 40, 224	**A052701**
$\triangle$, $\triangle$, $\triangle$	Forêts n. c.	1, 3, 13, 68, 395	**A200757**
$\triangle$, $\triangle$, $\triangle$	Plantes n. c.	1, 3, 14, 80, 510	**A121873**
$\triangle$, $\triangle$, $\triangle$	Chem. de Schröder part.	1, 3, 15, 93, 645	**A103210**
$\triangle$, $\triangle$, $\triangle$	Arcs élém.	1, 3, 16, 105, 768	**A085614**
$\triangle$, $\triangle$, $\triangle$, $\triangle$	Chem. de Schröder part.	1, 4, 24, 176, 1440	**A156017**

Sous-opérades (2/3)

La plupart des sous-opérades de $\mathcal{C}$ possèdent des suites de dimensions non répertoriées (sur OEIS). Par exemple,

Générateurs	Suite
$\triangle, \triangle$	1, 2, 8, 40, 216, 1246, 7516
$\triangle, \triangle, \triangle$	1, 3, 15, 90, 601, 4291
$\triangle, \triangle, \triangle$	1, 3, 15, 92, 629, 4600
$\triangle, \triangle, \triangle$	1, 3, 16, 104, 744, 5691

Moyen uniforme pour les étudier : la décomposition en bulles fonctionne pour les sous-opérades de $\mathcal{C}$.

Ainsi, pour calculer la série des dimensions d'une sous-opérade $\mathcal{P}$ de $\mathcal{C}$, il suffit d'avoir une description des bulles de $\mathcal{P}$.

Sous-opérades (3/3)

Soit $\mathcal{P}$ la sous-opérade de $\mathcal{C}$ engendrée par $\triangle$ et $\triangle$.

Lemme

L'ensemble des bulles basées de $\mathcal{P}$ est l'ensemble des bulles dont tous les côtés sont vides, excepté la base.

L'ensemble des bulles non basées de $\mathcal{P}$ est l'ensemble des bulles dont tous les côtés sont bleus, excepté la base.

On en déduit que les séries des bulles de $\mathcal{P}$ vérifient

$$\mathrm{B}^{+}(x, y) = \sum_{n \geqslant 2} y^n = \frac{y^2}{1 - y} \quad \text{et} \quad \mathrm{B}^{-}(x, y) = \sum_{n \geqslant 2} x^n = \frac{x^2}{1 - x}.$$

La décomposition en bulles des CNCB de $\mathcal{P}$ implique

Proposition

La série $\mathrm{F}(t)$ des dimensions de $\mathcal{P}$ vérifie

$$\mathrm{F}(t) = \frac{1 - (1 - 6t + t^2)^{\frac{1}{2}} - t}{2}.$$

Travaux en cours

1. Obtenir les séries des dimensions des 88 sous-opérades de $\mathcal{C}$. Pour l'instant, ceci n'a été fait que pour les sous-opérades binaires et certaines ternaires.
2. Il semble que les séries des dimensions des sous-opérades de $\mathcal{C}$ soient algébriques. Démonstration ?
3. Déterminer la présentation de $\mathcal{C}$ et de ses sous-opérades.
4. Chercher des (anti)ismorphismes entre les sous-opérades de $\mathcal{C}$ qui possèdent les mêmes dimensions. Par exemple, les sous-opérades engendrées par $\{\triangle, \triangle\}$ et par $\{\triangle, \triangle\}$ possèdent les mêmes dimensions. Sont-elles (anti)isomorphes ?
5. Que peut-on dire de la version vectorielle de $\mathcal{C}$ et de ses sous-opérades vectorielles ?
6. Utilisation de la structure d'opérade sur les CNCB pour faire de la génération aléatoire de CNCB (ou des objets qu'elles peuvent représenter) ?