# Grammaires et séries d'opérades colorées

**Samuele Giraudo**
LIGM, Université Paris-Est Marne-la-Vallée

Séminaire de l'équipe Combinatoire et algorithmes du LITIS

17 novembre 2016

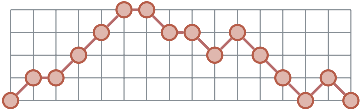
# Plan

# Plan

# Plan

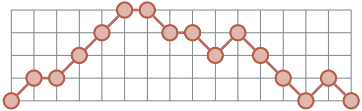
# Séries génératrices

Considérons l'ensemble chemins de Motzkin, chemins dans $\mathbb{N}^2$ allant de $(0,0)$ à $(n,0)$, faits de pas $(+1,+1)$, $(+1,-1)$ et $(+1,0)$.



# Séries génératrices

Considérons l'ensemble chemins de Motzkin, chemins dans $\mathbb{N}^2$ allant de $(0,0)$ à $(n,0)$, faits de pas $(+1,+1)$, $(+1,-1)$ et $(+1,0)$.

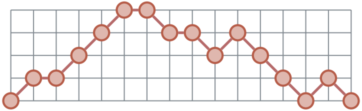


Par des raisonnements assez élémentaires, on obtient que la série génératrice $S(t)$ de ces objets en fonction de leur taille $n$ vérifie

$$S(t) = 1 + tS(t) + t^2 S(t)^2$$

# Séries génératrices

Considérons l'ensemble chemins de Motzkin, chemins dans $\mathbb{N}^2$ allant de $(0,0)$ à $(n,0)$, faits de pas $(+1,+1)$, $(+1,-1)$ et $(+1,0)$.



Par des raisonnements assez élémentaires, on obtient que la série génératrice $S(t)$ de ces objets en fonction de leur taille $n$ vérifie

$$S(t) = 1 + tS(t) + t^2 S(t)^2$$

et

$$S(t) = 1 + t + 2t^2 + 4t^3 + 9t^4 + 21t^5 + 51t^6 + 127t^7 + \cdots .$$

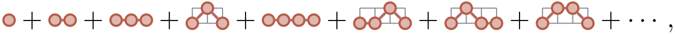
# Séries génératrices d'objets

Au lieu de considérer cette série de $\mathbb{N}[[t]]$ dénombrant ces chemins, il est possible de travailler avec des séries d'objets combinatoires.

# Séries génératrices d'objets

Au lieu de considérer cette série de $\mathbb{N}[[t]]$ dénombrant ces chemins, il est possible de travailler avec des séries d'objets combinatoires.

Soit en effet la série

$\mathbf{f} :=$ 

construite comme étant la somme formelle de tous les chemins de Motzkin.

# Séries génératrices d'objets

Au lieu de considérer cette série de $\mathbb{N}[[t]]$ dénombrant ces chemins, il est possible de travailler avec des séries d'objets combinatoires.

Soit en effet la série

$$\mathbf{f} :=$$  $$+\cdots,$$

construite comme étant la somme formelle de tous les chemins de Motzkin.

Ici, $\mathbf{f}$ est une application

$$\mathbf{f} : M \to \mathbb{N},$$

où $M$ est l'ensemble des chemins de Motzkin, qui associe à chaque chemin de Motzkin son coefficient (1 ici) dans la série.

# Structure sur les objets

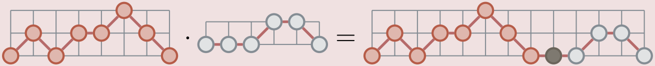
Soit $(C, \cdot, \bullet)$ le monoïde de tous les chemins dans $\mathbb{N}^2$ où $\cdot$ est le produit consistant à concaténer les chemins.

# Structure sur les objets

Soit $(C, \cdot, \circ)$ le monoïde de tous les chemins dans $\mathbb{N}^2$ où $\cdot$ est le produit consistant à concaténer les chemins.

L'ensemble *M* des chemins de Motzkin forme un sous-monoïde de $C$.

## Exemple

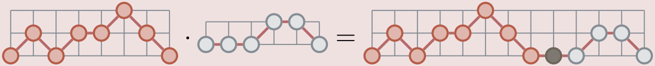


# Structure sur les objets

Soit $(C, \cdot, \circ)$ le monoïde de tous les chemins dans $\mathbb{N}^2$ où $\cdot$ est le produit consistant à concaténer les chemins.

L'ensemble $M$ des chemins de Motzkin forme un sous-monoïde de $C$.

## Exemple



Le produit $\cdot$ se prolonge sur les séries de chemins et permet d'écrire (après vérification de quelques détails techniques),

On retrouve ainsi l'expression quadratique précédente pour la série génératrice $S(t)$ des chemins de Motzkin.

# Enrichissements

On peut également dénombrer les chemins de Motzkin selon leur nombre de pas $(+1, 0)$.

# Enrichissements

On peut également dénombrer les chemins de Motzkin selon leur nombre de pas $(+1, 0)$.

Soit en effet la série

où le coefficient de chaque chemin de Motzkin est $q^k$, où $k$ est le nombre de pas $(+1, 0)$ du chemin.

# Enrichissements

On peut également dénombrer les chemins de Motzkin selon leur nombre de pas $(+1, 0)$.

Soit en effet la série

où le coefficient de chaque chemin de Motzkin est $q^k$, où $k$ est le nombre de pas $(+1, 0)$ du chemin.

Elle admet l'expression

ce qui implique que la série génératrice des chemins de Motzkin comptés par taille et nombre de pas $(+1, 0)$ vérifie

$$S(t, z) = 1 + tzS(t, z) + t^2 S(t, z)^2.$$

# Séries génératrices d'objets structurés

Ainsi, pour dénombrer un ensemble $X$ d'objets combinatoires, travailler directement avec des séries sur $X$ et exprimer la série $\mathbf{f}$ de $X$ permet

1. de retrouver la série génératrice usuelle de $X$ ;
2. de raffiner le dénombrement pour prendre en compte diverses statistiques sur les objets de $X$.

# Séries génératrices d'objets structurés

Ainsi, pour dénombrer un ensemble $X$ d'objets combinatoires, travailler directement avec des séries sur $X$ et exprimer la série $\mathbf{f}$ de $X$ permet

1. de retrouver la série génératrice usuelle de $X$ ;
2. de raffiner le dénombrement pour prendre en compte diverses statistiques sur les objets de $X$.

Ceci est rendu plus simple lorsque $X$ forme une structure algébrique suffisamment riche.

# Séries génératrices d'objets structurés

Ainsi, pour dénombrer un ensemble $X$ d'objets combinatoires, travailler directement avec des séries sur $X$ et exprimer la série $\mathbf{f}$ de $X$ permet

1. de retrouver la série génératrice usuelle de $X$ ;
2. de raffiner le dénombrement pour prendre en compte diverses statistiques sur les objets de $X$.

Ceci est rendu plus simple lorsque $X$ forme une structure algébrique suffisamment riche.

Les opérations disponibles sur $X$ se traduisent en des opérations sur les séries.

On obtient alors une expression pour $\mathbf{f}$ en utilisant ces opérations et des éléments de $X$ qui jouent le rôle de générateurs.

# Séries formelles d'objets

Soient $\mathbb{K}$ un corps ($\mathbb{K} := \mathbb{Q}$ suffit ici) et $X$ en ensemble.

Une $X$-série est une application

$$\mathbf{f} : X \to \mathbb{K}.$$

L'ensemble de ces séries est noté $\mathbb{K}\langle\langle X \rangle\rangle$.

# Séries formelles d'objets

Soient $\mathbb{K}$ un corps ($\mathbb{K} := \mathbb{Q}$ suffit ici) et $X$ en ensemble.

Une $X$-série est une application

$$\mathbf{f} : X \to \mathbb{K}.$$

L'ensemble de ces séries est noté $\mathbb{K} \langle\langle X \rangle\rangle$.

Le coefficient $\mathbf{f}(x)$ de $x \in X$ dans $\mathbf{f}$ est noté $\langle x, \mathbf{f} \rangle$.

# Séries formelles d'objets

Soient $\mathbb{K}$ un corps ($\mathbb{K} := \mathbb{Q}$ suffit ici) et $X$ en ensemble.

Une $X$-série est une application

$$\mathbf{f} : X \to \mathbb{K}.$$

L'ensemble de ces séries est noté $\mathbb{K} \langle\langle X \rangle\rangle$.

Le coefficient $\mathbf{f}(x)$ de $x \in X$ dans $\mathbf{f}$ est noté $\langle x, \mathbf{f} \rangle$.

Le support de $\mathbf{f}$ est l'ensemble

$$\mathrm{Supp}(\mathbf{f}) := \{x \in X : \langle x, \mathbf{f} \rangle \neq 0\}.$$

# L'espace des séries formelles d'objets

L'ensemble $\mathbb{K}\langle\langle X\rangle\rangle$, muni de l'addition point par point et de la multiplication par un scalaire, forme un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

# L'espace des séries formelles d'objets

L'ensemble $\mathbb{K}\langle\langle X\rangle\rangle$, muni de l'addition point par point et de la multiplication par un scalaire, forme un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

La notation étendue d'une $X$-série $\mathbf{f}$ est

$$\mathbf{f} = \sum_{x \in X} \langle x, \mathbf{f}\rangle\, x.$$

# L'espace des séries formelles d'objets

L'ensemble $\mathbb{K}\langle\langle X\rangle\rangle$, muni de l'addition point par point et de la multiplication par un scalaire, forme un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

La notation étendue d'une $X$-série $\mathbf{f}$ est

$$\mathbf{f} = \sum_{x \in X} \langle x, \mathbf{f}\rangle\, x.$$

Quand $X$ forme une structure algébrique, chacune de ses opérations $\star : X^n \to X$ donne lieu à une opération partielle

$$\star : \mathbb{K}\langle\langle X\rangle\rangle^{\otimes n} \to \mathbb{K}\langle\langle X\rangle\rangle$$

sur les $X$-séries.

# L'espace des séries formelles d'objets

L'ensemble $\mathbb{K}\langle\langle X\rangle\rangle$, muni de l'addition point par point et de la multiplication par un scalaire, forme un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

La notation étendue d'une $X$-série $\mathbf{f}$ est

$$\mathbf{f} = \sum_{x \in X} \langle x, \mathbf{f}\rangle\, x.$$

Quand $X$ forme une structure algébrique, chacune de ses opérations $\star : X^n \to X$ donne lieu à une opération partielle

$$\star : \mathbb{K}\langle\langle X\rangle\rangle^{\otimes n} \to \mathbb{K}\langle\langle X\rangle\rangle$$

sur les $X$-séries.

En effet, $\star(\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n)$ est la $X$-série définie par

$$\langle x, \star(\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n)\rangle := \sum_{\substack{y_1, \ldots, y_n \in X \\ x = \star(y_1, \ldots, y_n)}} \langle y_1, \mathbf{f}_1\rangle \ldots \langle y_n, \mathbf{f}_n\rangle\,.$$

# Structures algébriques et séries formelles

Beaucoup de $X$-séries ont été étudiées. P.ex.,

- $X \simeq (\mathbb{N}, +) \rightsquigarrow$ séries formelles habituelles ;

# Structures algébriques et séries formelles

Beaucoup de $X$-séries ont été étudiées. P.ex.,

- $X \simeq (\mathbb{N}, +) \rightsquigarrow$ séries formelles habituelles ;
- $X$ monoïde commutatif libre $\rightsquigarrow$ séries formelles multivariées ;

# Structures algébriques et séries formelles

Beaucoup de $X$-séries ont été étudiées. P.ex.,

- $X \simeq (\mathbb{N}, +) \rightsquigarrow$ séries formelles habituelles ;
- $X$ monoïde commutatif libre $\rightsquigarrow$ séries formelles multivariées ;
- $X$ monoïde libre $\rightsquigarrow$ séries non commutatives de mots [**Eilenberg**, 1974] ;

# Structures algébriques et séries formelles

Beaucoup de $X$-séries ont été étudiées. P.ex.,

- $X \simeq (\mathbb{N}, +) \rightsquigarrow$ séries formelles habituelles ;
- $X$ monoïde commutatif libre $\rightsquigarrow$ séries formelles multivariées ;
- $X$ monoïde libre $\rightsquigarrow$ séries non commutatives de mots [**Eilenberg**, 1974] ;
- $X$ monoïde $\rightsquigarrow$ séries sur monoïdes [**Salomaa, Soittola**, 1978] ;

# Structures algébriques et séries formelles

Beaucoup de $X$-séries ont été étudiées. P.ex.,

- $X \simeq (\mathbb{N}, +) \rightsquigarrow$ séries formelles habituelles ;
- $X$ monoïde commutatif libre $\rightsquigarrow$ séries formelles multivariées ;
- $X$ monoïde libre $\rightsquigarrow$ séries non commutatives de mots [**Eilenberg**, 1974] ;
- $X$ monoïde $\rightsquigarrow$ séries sur monoïdes [**Salomaa, Soittola**, 1978] ;
- $X$ ensemble d'arbres $\rightsquigarrow$ séries d'arbres [**Berstel, Reutenauer**, 1982] ;

# Structures algébriques et séries formelles

Beaucoup de $X$-séries ont été étudiées. P.ex.,

- $X \simeq (\mathbb{N}, +) \rightsquigarrow$ séries formelles habituelles ;
- $X$ monoïde commutatif libre $\rightsquigarrow$ séries formelles multivariées ;
- $X$ monoïde libre $\rightsquigarrow$ séries non commutatives de mots [**Eilenberg**, 1974] ;
- $X$ monoïde $\rightsquigarrow$ séries sur monoïdes [**Salomaa, Soittola**, 1978] ;
- $X$ ensemble d'arbres $\rightsquigarrow$ séries d'arbres [**Berstel, Reutenauer**, 1982] ;
- $X$ opérade $\rightsquigarrow$ séries sur opérades [**Chapoton**, 2002, 2008].

Plusieurs variantes existent concernant les séries sur opérades.

# Plan

# Opérades

Une opérade non symétrique ensembliste est un triplet $(\mathcal{O}, \circ_i, \mathbf{1})$ où

Ces données doivent vérifier un certain nombre d'axiomes.

# Opérades

Une opérade non symétrique ensembliste est un triplet $(\mathcal{O}, \circ_i, \mathbf{1})$ où

1. $\mathcal{O}$ est un ensemble gradué

$$\mathcal{O} := \bigsqcup_{n \geqslant 1} \mathcal{O}(n),$$

Ces données doivent vérifier un certain nombre d'axiomes.

# Opérades

Une opérade non symétrique ensembliste est un triplet $(\mathcal{O}, \circ_i, \mathbf{1})$ où

1. $\mathcal{O}$ est un ensemble gradué

$$\mathcal{O} := \bigsqcup_{n \geqslant 1} \mathcal{O}(n),$$

2. $\circ_i$ est une application de composition partielle

$$\circ_i : \mathcal{O}(n) \times \mathcal{O}(m) \to \mathcal{O}(n + m - 1),$$

Ces données doivent vérifier un certain nombre d'axiomes.

# Opérades

Une opérade non symétrique ensembliste est un triplet $(\mathcal{O}, \circ_i, \mathbf{1})$ où

1. $\mathcal{O}$ est un ensemble gradué

$$\mathcal{O} := \bigsqcup_{n \geqslant 1} \mathcal{O}(n),$$

2. $\circ_i$ est une application de composition partielle

$$\circ_i : \mathcal{O}(n) \times \mathcal{O}(m) \to \mathcal{O}(n+m-1),$$

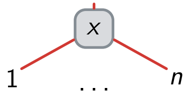
3. $\mathbf{1}$ est un élément de $\mathcal{O}(1)$, appelé unité.

Ces données doivent vérifier un certain nombre d'axiomes.

# Opérades et opérateurs

Les opérades fournissent une abstraction de la notion d'opérateur.

Un opérateur est une entité ayant $n \geqslant 1$ entrées et une sortie.

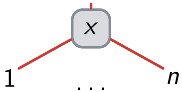



Son arité est son nombre $n$ d'entrées.

# Opérades et opérateurs

Les opérades fournissent une abstraction de la notion d'opérateur.

Un opérateur est une entité ayant $n \geqslant 1$ entrées et une sortie.




Son arité est son nombre $n$ d'entrées.

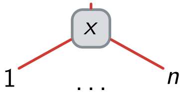
Composer deux opérateurs $x$ et $y$ consiste à

1. choisir une entrée de $x$, identifiée par sa position $i$ ;
2. greffer la sortie de $y$ sur cette entrée.

# Opérades et opérateurs

Les opérades fournissent une abstraction de la notion d'opérateur.

Un opérateur est une entité ayant $n \geqslant 1$ entrées et une sortie.

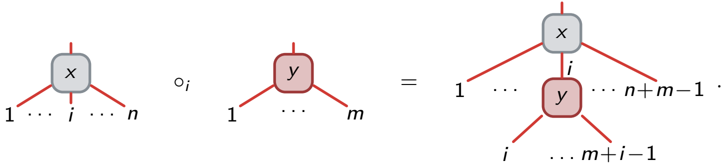



Son arité est son nombre $n$ d'entrées.

Composer deux opérateurs $x$ et $y$ consiste à

1. choisir une entrée de $x$, identifiée par sa position $i$ ;
2. greffer la sortie de $y$ sur cette entrée.

Ceci produit un nouvel opérateur $x \circ_i y$ d'arité $n + m - 1$ :



# L'opérade des chemins de Motzkin

L'opérade des chemins de Motzkin Motz est définie de la manière suivante :

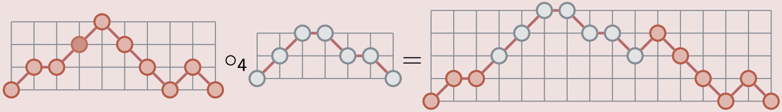
- Motz$(n)$ est l'ensemble des chemins de Motzkin ayant $n - 1$ pas ;
- la composition partielle $x \circ_i y$ de deux chemins de Motzkin consiste à substituer $y$ au $i^{\text{e}}$ point de $x$ ;
- l'unité est l'unique chemin de Motzkin ● d'arité 1.

# L'opérade des chemins de Motzkin

L'opérade des chemins de Motzkin Motz est définie de la manière suivante :

- $\mathrm{Motz}(n)$ est l'ensemble des chemins de Motzkin ayant $n-1$ pas ;
- la composition partielle $x \circ_i y$ de deux chemins de Motzkin consiste à substituer $y$ au $i^{\mathrm{e}}$ point de $x$ ;
- l'unité est l'unique chemin de Motzkin ∘ d'arité 1.

**Exemple**



# Propriétés de Motz

Étant donnée une opérade $\mathcal{O}$, il est habituel de chercher à

1. décrire un ensemble minimal $\mathfrak{G}$ de générateurs de $\mathcal{O}$ ;
2. exhiber toutes les relations non triviales entre les éléments de $\mathfrak{G}$.

Ceci fournit une présentation de $\mathcal{O}$.

# Propriétés de Motz

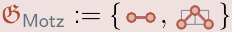
Étant donnée une opérade $\mathcal{O}$, il est habituel de chercher à

1. décrire un ensemble minimal $\mathfrak{G}$ de générateurs de $\mathcal{O}$ ;
2. exhiber toutes les relations non triviales entre les éléments de $\mathfrak{G}$.

Ceci fournit une présentation de $\mathcal{O}$.

**Théorème** [G, 2015]

L'ensemble




est l'unique ensemble minimal de générateurs de Motz.

De plus, ses éléments sont soumis exactement aux relations non triviales

# Motz-séries

On peut se servir de l'opérade Motz pour considérer des Motz-séries et dénombrer les chemins de Motzkin.

On peut se servir de l'opérade Motz pour considérer des Motz-séries et dénombrer les chemins de Motzkin.

En effet, la Motz-séries $\mathbf{f}$ caractéristique de Motz vérifie

$$\mathbf{f} = \bullet +$$  $$\circ \left[\bullet, \mathbf{f}\right] +$$  $$\circ \left[\bullet, \mathbf{f}, \mathbf{f}\right],$$

# Motz-séries

On peut se servir de l'opérade Motz pour considérer des Motz-séries et dénombrer les chemins de Motzkin.

En effet, la Motz-séries **f** caractéristique de Motz vérifie

$\mathbf{f}$ =  +  $\circ$ [, $\mathbf{f}$] +  $\circ$ [, $\mathbf{f}$, $\mathbf{f}$] ,

où, pour toute opérade $\mathcal{O}$,

$$\circ : \mathcal{O}(n) \times \mathcal{O}(m_1) \times \cdots \times \mathcal{O}(m_n) \to \mathcal{O}(m_1 + \cdots + m_n)$$

est l'opérateur de composition complète de $\mathcal{O}$ (il se déduit à partir des $\circ_i$).

On peut se servir de l'opérade Motz pour considérer des Motz-séries et dénombrer les chemins de Motzkin.

En effet, la Motz-séries $\mathbf{f}$ caractéristique de Motz vérifie

$\mathbf{f} =$  $+$  $\circ \big[$$, \mathbf{f}\big] +$  $\circ \big[$$, \mathbf{f}, \mathbf{f}\big]$,

où, pour toute opérade $\mathcal{O}$,

$$\circ : \mathcal{O}(n) \times \mathcal{O}(m_1) \times \cdots \times \mathcal{O}(m_n) \to \mathcal{O}(m_1 + \cdots + m_n)$$

est l'opérateur de composition complète de $\mathcal{O}$ (il se déduit à partir des $\circ_i$).

L'expression pour $\mathbf{f}$ est une conséquence de la présentation de Motz et du fait qu'elle est une opérade de Koszul (existence d'une orientation de ses relations en une règle de réécriture convergente).

# Plan

# Plan

# Opérades colorées

Dans une opérade colorée, les entrées et les sorties des éléments ont des couleurs qui, lors de la composition, doivent correspondre.

# Opérades colorées

Dans une opérade colorée, les entrées et les sorties des éléments ont des couleurs qui, lors de la composition, doivent correspondre.

Plus exactement, une opérade colorée est un tuple $(\mathcal{C}, \mathscr{C}, \mathrm{e}, \mathrm{s}, \circ_i, \mathbf{1}_c)$ où

1. $\mathcal{C}$ est un ensemble gradué $\mathcal{C} := \sqcup_{n \geqslant 1} \mathcal{C}(n)$ où chaque $\mathcal{C}(n)$ est fini ;

Ces données doivent vérifier un certain nombre d'axiomes.

# Opérades colorées

Dans une opérade colorée, les entrées et les sorties des éléments ont des couleurs qui, lors de la composition, doivent correspondre.

Plus exactement, une opérade colorée est un tuple $(\mathcal{C}, \mathscr{C}, \mathrm{e}, \mathrm{s}, \circ_i, \mathbf{1}_c)$ où

1. $\mathcal{C}$ est un ensemble gradué $\mathcal{C} := \sqcup_{n \geqslant 1} \mathcal{C}(n)$ où chaque $\mathcal{C}(n)$ est fini ;
2. $\mathscr{C} := \{c_1, \ldots, c_k\}$ est un ensemble fini de couleurs ;

Ces données doivent vérifier un certain nombre d'axiomes.

# Opérades colorées

Dans une opérade colorée, les entrées et les sorties des éléments ont des couleurs qui, lors de la composition, doivent correspondre.

Plus exactement, une opérade colorée est un tuple $(\mathcal{C}, \mathscr{C}, \mathrm{e}, \mathrm{s}, \circ_i, \mathbf{1}_c)$ où

1. $\mathcal{C}$ est un ensemble gradué $\mathcal{C} := \sqcup_{n \geqslant 1} \mathcal{C}(n)$ où chaque $\mathcal{C}(n)$ est fini ;
2. $\mathscr{C} := \{c_1, \ldots, c_k\}$ est un ensemble fini de couleurs ;
3. $\mathrm{s}$ est une application de couleur de sortie $\mathrm{s} : \mathcal{C} \to \mathscr{C}$ ;

Ces données doivent vérifier un certain nombre d'axiomes.

# Opérades colorées

Dans une opérade colorée, les entrées et les sorties des éléments ont des couleurs qui, lors de la composition, doivent correspondre.

Plus exactement, une opérade colorée est un tuple $(\mathcal{C}, \mathscr{C}, \mathrm{e}, \mathrm{s}, \circ_i, \mathbf{1}_c)$ où

1. $\mathcal{C}$ est un ensemble gradué $\mathcal{C} := \sqcup_{n \geqslant 1} \mathcal{C}(n)$ où chaque $\mathcal{C}(n)$ est fini ;
2. $\mathscr{C} := \{c_1, \ldots, c_k\}$ est un ensemble fini de couleurs ;
3. $\mathrm{s}$ est une application de couleur de sortie $\mathrm{s} : \mathcal{C} \to \mathscr{C}$ ;
4. $\mathrm{e}$ est une application de couleurs d'entrée $\mathrm{e} : \mathcal{C}(n) \to \mathscr{C}^n$ ;

Ces données doivent vérifier un certain nombre d'axiomes.

# Opérades colorées

Dans une opérade colorée, les entrées et les sorties des éléments ont des couleurs qui, lors de la composition, doivent correspondre.

Plus exactement, une opérade colorée est un tuple $(\mathcal{C}, \mathscr{C}, \mathrm{e}, \mathrm{s}, \circ_i, \mathbf{1}_c)$ où

1. $\mathcal{C}$ est un ensemble gradué $\mathcal{C} := \sqcup_{n \geqslant 1} \mathcal{C}(n)$ où chaque $\mathcal{C}(n)$ est fini ;
2. $\mathscr{C} := \{c_1, \ldots, c_k\}$ est un ensemble fini de couleurs ;
3. $\mathrm{s}$ est une application de couleur de sortie $\mathrm{s} : \mathcal{C} \to \mathscr{C}$ ;
4. $\mathrm{e}$ est une application de couleurs d'entrée $\mathrm{e} : \mathcal{C}(n) \to \mathscr{C}^n$ ;
5. $\circ_i$ est une application partielle de composition partielle ou $x \circ_i y$ est défini ssi $\mathrm{s}(y) = \mathrm{e}_i(x)$ ;

Ces données doivent vérifier un certain nombre d'axiomes.

# Opérades colorées

Dans une opérade colorée, les entrées et les sorties des éléments ont des couleurs qui, lors de la composition, doivent correspondre.

Plus exactement, une opérade colorée est un tuple $(\mathcal{C}, \mathscr{C}, \mathrm{e}, \mathrm{s}, \circ_i, \mathbf{1}_c)$ où

1. $\mathcal{C}$ est un ensemble gradué $\mathcal{C} := \sqcup_{n \geqslant 1} \mathcal{C}(n)$ où chaque $\mathcal{C}(n)$ est fini ;
2. $\mathscr{C} := \{c_1, \ldots, c_k\}$ est un ensemble fini de couleurs ;
3. $\mathrm{s}$ est une application de couleur de sortie $\mathrm{s} : \mathcal{C} \to \mathscr{C}$ ;
4. $\mathrm{e}$ est une application de couleurs d'entrée $\mathrm{e} : \mathcal{C}(n) \to \mathscr{C}^n$ ;
5. $\circ_i$ est une application partielle de composition partielle ou $x \circ_i y$ est défini ssi $\mathrm{s}(y) = \mathrm{e}_i(x)$ ;
6. $\mathbf{1}_c$ est l'unité de couleur $c \in \mathscr{C}$ et vérifie $\mathrm{e}(\mathbf{1}_c) = c = \mathrm{s}(\mathbf{1}_c)$.

Ces données doivent vérifier un certain nombre d'axiomes.

# Opérades à bourgeons

Soient $\mathcal{O}$ une opérade non colorée et $\mathscr{C}$ un ensemble fini.

L'opérade à bourgeons de $\mathcal{O}$ est l'opérade colorée $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$ définie par

$$\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})(n) := \mathscr{C} \times \mathcal{O}(n) \times \mathscr{C}^{n}, \qquad n \geqslant 1,$$

# Opérades à bourgeons

Soient $\mathcal{O}$ une opérade non colorée et $\mathscr{C}$ un ensemble fini.

L'opérade à bourgeons de $\mathcal{O}$ est l'opérade colorée $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$ définie par

$$\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})(n) := \mathscr{C} \times \mathcal{O}(n) \times \mathscr{C}^n, \qquad n \geqslant 1,$$

dans laquelle

$$\mathrm{s}((a, x, u)) := a,$$

$$\mathrm{e}((a, x, u)) := u$$

et, lorsque $u_i = b$,

$$(a, x, u) \circ_i (b, y, v) := (a, x \circ_i y, u \leftarrow\!\!\dashv_i v),$$

où $u \leftarrow\!\!\dashv_i v$ est le mot obtenu en remplaçant la $i^{\text{e}}$ lettre de $u$ par $v$.

# Opérades à bourgeons

Soient $\mathcal{O}$ une opérade non colorée et $\mathscr{C}$ un ensemble fini.

L'opérade à bourgeons de $\mathcal{O}$ est l'opérade colorée $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$ définie par

$$\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})(n) := \mathscr{C} \times \mathcal{O}(n) \times \mathscr{C}^n, \qquad n \geqslant 1,$$

dans laquelle

$$\mathrm{s}((a, x, u)) := a,$$

$$\mathrm{e}((a, x, u)) := u$$

et, lorsque $u_i = b$,

$$(a, x, u) \circ_i (b, y, v) := (a, x \circ_i y, u \hookleftarrow_i v),$$

où $u \hookleftarrow_i v$ est le mot obtenu en remplaçant la $i^{\text{e}}$ lettre de $u$ par $v$.

**Proposition**

La construction $\mathcal{O} \mapsto \mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$ est un foncteur de la catégorie des opérades non colorées vers la catégorie des opérades $\mathscr{C}$-colorées.

# L'opérade à bourgeons de l'opérade associative

L'opérade associative As est définie par

- $\mathsf{As}(n) := \{\star_n\}, n \geqslant 1$ ;
- $\star_n \circ_i \star_m := \star_{n+m-1}$.

# L'opérade à bourgeons de l'opérade associative

L'opérade associative As est définie par

- $\mathrm{As}(n) := \{\star_n\}, n \geqslant 1$ ;
- $\star_n \circ_i \star_m := \star_{n+m-1}$.

Pour tout ensemble $\mathscr{C}$ de couleurs,

$$\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathrm{As}) = \bigsqcup_{n \geqslant 1} \{(a, \star_n, u_1 \dots u_n) : a, u_1, \dots, u_n \in \mathscr{C}\} .$$

# L'opérade à bourgeons de l'opérade associative

L'opérade associative As est définie par

- $\mathrm{As}(n) := \{\star_n\}, n \geqslant 1$ ;
- $\star_n \circ_i \star_m := \star_{n+m-1}$.

Pour tout ensemble $\mathscr{C}$ de couleurs,

$$\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathrm{As}) = \bigsqcup_{n \geqslant 1} \{(a, \star_n, u_1 \dots u_n) : a, u_1, \dots, u_n \in \mathscr{C}\}.$$

On peut ainsi voir $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathrm{As})$ comme une opérade colorée de mots sur $\mathscr{C}$ dont la composition partielle est une substitution.

# L'opérade à bourgeons de l'opérade associative

L'opérade associative As est définie par

- $\mathrm{As}(n) := \{\star_n\}, n \geqslant 1$ ;
- $\star_n \circ_i \star_m := \star_{n+m-1}$.

Pour tout ensemble $\mathscr{C}$ de couleurs,

$$\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathrm{As}) = \bigsqcup_{n \geqslant 1} \{(a, \star_n, u_1 \dots u_n) : a, u_1, \dots, u_n \in \mathscr{C}\}.$$

On peut ainsi voir $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathrm{As})$ comme une opérade colorée de mots sur $\mathscr{C}$ dont la composition partielle est une substitution.

## Exemple

Dans $\mathrm{B}_{\{1,2,3\}}(\mathrm{As})$,

$$(2, \star_4, 3112) \circ_2 (1, \star_3, 233) = (2, \star_6, 323312).$$

# Plan

# Systèmes de génération à bourgeons

Un système de génération à bourgeons $\mathcal{B}$ est un quintuplet $(\mathcal{O}, \mathscr{C}, \mathfrak{R}, I, T)$ où

# Systèmes de génération à bourgeons

Un système de génération à bourgeons $\mathcal{B}$ est un quintuplet $(\mathcal{O}, \mathscr{C}, \mathfrak{R}, I, T)$ où

- $\mathcal{O}$ est une opérade non colorée ;

# Systèmes de génération à bourgeons

Un système de génération à bourgeons $\mathcal{B}$ est un quintuplet $(\mathcal{O}, \mathscr{C}, \mathfrak{R}, I, T)$ où

- $\mathcal{O}$ est une opérade non colorée ;
- $\mathscr{C}$ est un ensemble fini de couleurs ;

# Systèmes de génération à bourgeons

Un système de génération à bourgeons $\mathcal{B}$ est un quintuplet $(\mathcal{O}, \mathscr{C}, \mathfrak{R}, I, T)$ où

- $\mathcal{O}$ est une opérade non colorée ;
- $\mathscr{C}$ est un ensemble fini de couleurs ;
- $\mathfrak{R}$ est un sous-ensemble fini de $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$ de règles de production ;

# Systèmes de génération à bourgeons

Un système de génération à bourgeons $\mathcal{B}$ est un quintuplet $(\mathcal{O}, \mathscr{C}, \mathfrak{R}, I, T)$ où

- $\mathcal{O}$ est une opérade non colorée ;
- $\mathscr{C}$ est un ensemble fini de couleurs ;
- $\mathfrak{R}$ est un sous-ensemble fini de $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$ de règles de production ;
- $I$ est un sous-ensemble de couleurs initiales de $\mathscr{C}$ ;

# Systèmes de génération à bourgeons

Un système de génération à bourgeons $\mathcal{B}$ est un quintuplet $(\mathcal{O}, \mathscr{C}, \mathfrak{R}, I, T)$ où

- $\mathcal{O}$ est une opérade non colorée ;
- $\mathscr{C}$ est un ensemble fini de couleurs ;
- $\mathfrak{R}$ est un sous-ensemble fini de $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$ de règles de production ;
- $I$ est un sous-ensemble de couleurs initiales de $\mathscr{C}$ ;
- $T$ est un sous-ensemble de couleurs finales de $\mathscr{C}$.

# Systèmes de génération à bourgeons

Un système de génération à bourgeons $\mathcal{B}$ est un quintuplet $(\mathcal{O}, \mathscr{C}, \mathfrak{R}, I, T)$ où

- $\mathcal{O}$ est une opérade non colorée ;
- $\mathscr{C}$ est un ensemble fini de couleurs ;
- $\mathfrak{R}$ est un sous-ensemble fini de $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$ de règles de production ;
- $I$ est un sous-ensemble de couleurs initiales de $\mathscr{C}$ ;
- $T$ est un sous-ensemble de couleurs finales de $\mathscr{C}$.

Les systèmes de génération à bourgeons servent à spécifier des ensembles d'éléments de $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$.

# Règles de production

Une règle de production est un élément de $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$.

# Règles de production

Une règle de production est un élément de $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$.

Un ensemble $\mathfrak{R}$ de règles de production permet de définir une règle de réécriture sur $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$. Pour tous $x_1, x_2 \in \mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$, on pose

$$x_1 \to x_2$$

à condition qu'il existe $i \in \mathbb{N}$ et $r \in \mathfrak{R}$ tels que

$$x_2 = x_1 \circ_i r.$$

# Règles de production

Une règle de production est un élément de $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$.

Un ensemble $\mathfrak{R}$ de règles de production permet de définir une règle de réécriture sur $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$. Pour tous $x_1, x_2 \in \mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$, on pose

$$x_1 \to x_2$$

à condition qu'il existe $i \in \mathbb{N}$ et $r \in \mathfrak{R}$ tels que

$$x_2 = x_1 \circ_i r.$$

La clôture réflexive et transitive de $\to$ est la relation de dérivation.

# Éléments engendrés

Un élément $x \in \mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$ est engendré par $\mathcal{B}$ si

$$\mathbf{1}_c \to \cdots \to x$$

où $c \in I$ et toutes les couleurs de $\mathrm{e}(x)$ sont dans $T$.

# Éléments engendrés

Un élément $x \in \mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$ est engendré par $\mathcal{B}$ si

$$\mathbf{1}_c \to \cdots \to x$$

où $c \in I$ et toutes les couleurs de $\mathrm{e}(x)$ sont dans $T$.

Ainsi, $x$ est engendré par $\mathcal{B}$ ssi il existe $c \in \mathscr{C}$, $r_1, \dots, r_k \in \mathfrak{R}$ et $i_2, \dots, i_k \in \mathbb{N}$ tels que

$$x = (\dots((\mathbf{1}_c \circ_1 r_1) \circ_{i_2} r_2) \dots) \circ_{i_k} r_k$$

et $\mathrm{e}(x) \in T^*$.

# Éléments engendrés

Un élément $x \in \mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$ est engendré par $\mathcal{B}$ si

$$\mathbf{1}_c \to \cdots \to x$$

où $c \in I$ et toutes les couleurs de $\mathrm{e}(x)$ sont dans $T$.

Ainsi, $x$ est engendré par $\mathcal{B}$ ssi il existe $c \in \mathscr{C}$, $r_1, \ldots, r_k \in \mathfrak{R}$ et $i_2, \ldots, i_k \in \mathbb{N}$ tels que

$$x = (\ldots((\mathbf{1}_c \circ_1 r_1) \circ_{i_2} r_2) \ldots) \circ_{i_k} r_k$$

et $\mathrm{e}(x) \in T^*$.

Le langage de $\mathcal{B}$ est l'ensemble $\mathrm{L}(\mathcal{B})$ des éléments engendrés par $\mathcal{B}$.

# Génération de chemins de Motzkin particuliers

Soit le système de génération à bourgeons
$\mathcal{B} := (\text{Motz}, \{1, 2\}, \mathfrak{R}, \{1\}, \{1, 2\})$ où

$$\mathfrak{R} := \{(1,$$  $$, 22), (1,$$  $$, 111)\}.$$

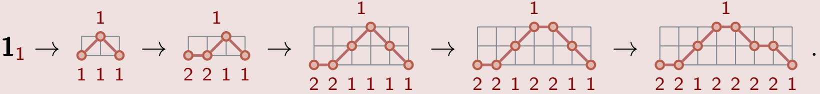
# Génération de chemins de Motzkin particuliers

Soit le système de génération à bourgeons
$\mathcal{B} := (\text{Motz}, \{1, 2\}, \mathfrak{R}, \{1\}, \{1, 2\})$ où

$\mathfrak{R} := \{(1,$  $, 22), (1,$  $, 111)\}.$

## Exemple

Il y a dans $\mathcal{B}$ les dérivations



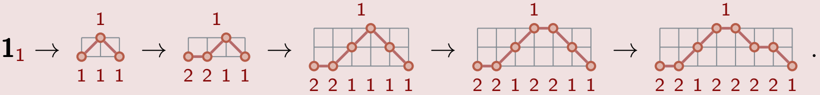
# Génération de chemins de Motzkin particuliers

Soit le système de génération à bourgeons
$\mathcal{B} := (\mathrm{Motz}, \{1, 2\}, \mathfrak{R}, \{1\}, \{1, 2\})$ où

$\mathfrak{R} := \{(1,$  $, 22), (1,$  $, 111)\}.$

## Exemple

Il y a dans $\mathcal{B}$ les dérivations




## Proposition

$\mathrm{L}(\mathcal{B})$ est en bijection avec l'ensemble des chemins de Motzkin sans pas horizontaux consécutifs.

Ces chemins sont dénombrés par la suite **A104545** :

$$1, 1, 1, 3, 5, 11, 25, 55, 129, 303, 721, 1743.$$

# Règles de production synchrones

Une règle de production synchrone est un élément de $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$.

# Règles de production synchrones

Une règle de production synchrone est un élément de $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$.

Un ensemble $\mathfrak{R}$ de règles de production synchrones permet de définir une règle de réécriture sur on $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$. Pour tous $x_1, x_2 \in \mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$, on pose

$$x_1 \rightsquigarrow x_2$$

à condition qu'il existe $r_1, \dots, r_n \in \mathfrak{R}$ tels que

$$x_2 = x_1 \circ [r_1, \dots, r_n] .$$

où $n := |x_1|$.

# Règles de production synchrones

Une règle de production synchrone est un élément de $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$.

Un ensemble $\mathfrak{R}$ de règles de production synchrones permet de définir une règle de réécriture sur on $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$. Pour tous $x_1, x_2 \in \mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$, on pose

$$x_1 \rightsquigarrow x_2$$

à condition qu'il existe $r_1, \ldots, r_n \in \mathfrak{R}$ tels que

$$x_2 = x_1 \circ [r_1, \ldots, r_n] .$$

où $n := |x_1|$.

La clôture réflexive et transitive de $\rightsquigarrow$ est la relation de dérivation synchrone.

# Éléments engendrés de manière synchrone

Un élément $x \in \mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$ est engendré de manière synchrone par $\mathcal{B}$ si

$$\mathbf{1}_c \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow x$$

où $c \in I$ et toutes les couleurs de $\mathrm{e}(x)$ sont dans $T$.

# Éléments engendrés de manière synchrone

Un élément $x \in \mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$ est engendré de manière synchrone par $\mathcal{B}$ si

$$\mathbf{1}_c \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow x$$

où $c \in I$ et toutes les couleurs de $\mathrm{e}(x)$ sont dans $T$.

Ainsi, $x$ est engendré de manière synchrone par $\mathcal{B}$ ssi il existe $c \in \mathscr{C}$ et $r_{1,1}, r_{2,1}, \dots, r_{2,j_2}, \dots r_{k,1}, \dots, r_{k,j_k} \in \mathfrak{R}$ tels que

$$x = (\dots((\mathbf{1}_c \circ [r_{1,1}]) \circ [r_{2,1}, \dots, r_{2,j_2}]) \dots ) \circ [r_{k,1}, \dots, r_{k,j_k}]$$

et $\mathrm{e}(x) \in T^*$.

# Éléments engendrés de manière synchrone

Un élément $x \in \mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$ est engendré de manière synchrone par $\mathcal{B}$ si

$$\mathbf{1}_c \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow x$$

où $c \in I$ et toutes les couleurs de $\mathrm{e}(x)$ sont dans $T$.

Ainsi, $x$ est engendré de manière synchrone par $\mathcal{B}$ ssi il existe $c \in \mathscr{C}$ et $r_{1,1}, r_{2,1}, \ldots, r_{2,j_2}, \ldots r_{k,1}, \ldots, r_{k,j_k} \in \mathfrak{R}$ tels que

$$x = (\ldots((\mathbf{1}_c \circ [r_{1,1}]) \circ [r_{2,1}, \ldots, r_{2,j_2}]) \ldots) \circ [r_{k,1}, \ldots, r_{k,j_k}]$$

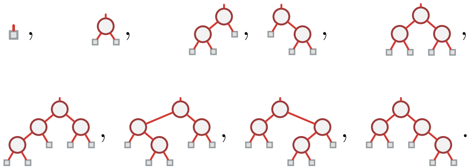
et $\mathrm{e}(x) \in T^*$.

Le langage synchrone de $\mathcal{B}$ est l'ensemble $\mathrm{L}_{\mathrm{S}}(\mathcal{B})$ des éléments engendrés de manière synchrone par $\mathcal{B}$.

# Arbres binaires équilibrés

Un arbre binaire équilibré est un arbre binaire $\mathfrak{t}$ tel que, pour tout nœud interne $x$ de $\mathfrak{t}$, la hauteur du sous-arbre gauche et du sous-arbre droit de $\mathfrak{t}$ diffèrent d'au plus 1.

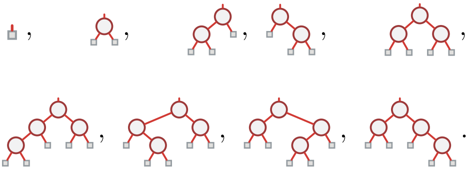
Les premiers arbres binaires équilibrés sont



# Arbres binaires équilibrés

Un arbre binaire équilibré est un arbre binaire $\mathfrak{t}$ tel que, pour tout nœud interne $x$ de $\mathfrak{t}$, la hauteur du sous-arbre gauche et du sous-arbre droit de $\mathfrak{t}$ diffèrent d'au plus 1.

Les premiers arbres binaires équilibrés sont



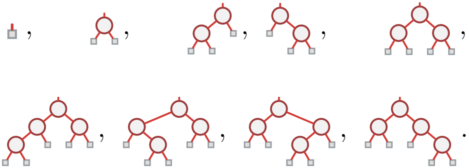
Ces arbres sont dénombrés par la suite **A006265** :

$$1, 1, 2, 1, 4, 6, 4, 17, 32, 44, 60, 70.$$

# Arbres binaires équilibrés

Un arbre binaire équilibré est un arbre binaire $\mathfrak{t}$ tel que, pour tout nœud interne $x$ de $\mathfrak{t}$, la hauteur du sous-arbre gauche et du sous-arbre droit de $\mathfrak{t}$ diffèrent d'au plus 1.

Les premiers arbres binaires équilibrés sont



Ces arbres sont dénombrés par la suite **A006265** :

$$1, 1, 2, 1, 4, 6, 4, 17, 32, 44, 60, 70.$$

Leur série génératrice est $F(x, 0)$ où

$$F(x, y) = x + F(x^2 + 2xy, x).$$

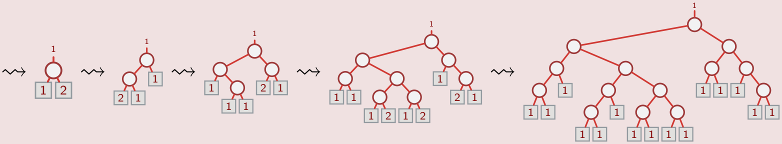
# Génération d'arbres binaires équilibrés

Soit le système de génération à bourgeons $\mathcal{B} := (\mathrm{Mag}, \{1, 2\}, \mathfrak{R}, \{1\}, \{1\})$ où $\mathrm{Mag} := \mathrm{Free}(\{\mathsf{a}\})$, $|\mathsf{a}| := 2$ et

$\mathfrak{R} := \Big\{ \Big(1,$  $, 11\Big), \Big(1,$  $, 12\Big), \Big(1,$  $, 21\Big), (2, \mathbf{1}, 1) \Big\}.$

## Exemple

Il y a dans $\mathcal{B}$ les dérivations

$\mathbf{1}_1 \rightsquigarrow$  .

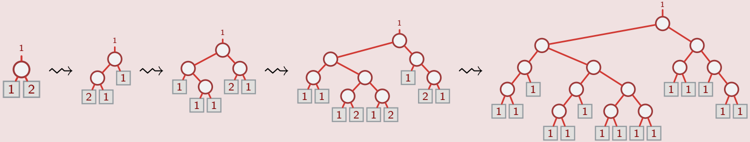
# Génération d'arbres binaires équilibrés

Soit le système de génération à bourgeons
$\mathcal{B} := (\mathrm{Mag}, \{1, 2\}, \mathfrak{R}, \{1\}, \{1\})$ où $\mathrm{Mag} := \mathrm{Free}(\{\mathsf{a}\})$, $|\mathsf{a}| := 2$ et

$$\mathfrak{R} := \left\{ \left(1,\right.\right.$$  $$\left.\left., 11\right), \left(1,\right.$$  $$\left., 12\right), \left(1,\right.$$  $$\left.\left., 21\right), (2, \mathbf{1}, 1)\right\}.$$

## Exemple

Il y a dans $\mathcal{B}$ les dérivations

$\mathbf{1}_1 \rightsquigarrow$  .

## Proposition

$\mathrm{L_S}(\mathcal{B})$ est en bijection avec l'ensemble des arbres binaires équilibrés.

# Plan

# Langages et langages synchrones

**Proposition**

Si $\mathcal{B} := (\mathcal{O}, \mathscr{C}, \mathfrak{R}, I, T)$ est un système de génération à bourgeons,

$$\mathrm{L}(\mathcal{B}) = \{x \in \mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O}) : x \in \mathcal{C}, \mathrm{s}(x) \in I, \mathrm{e}(x) \in T^*\},$$

où $\mathcal{C}$ est la sous-opérade colorée de $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$ engendrée par $\mathfrak{R}$.

# Langages et langages synchrones

**Proposition**

Si $\mathcal{B} := (\mathcal{O}, \mathscr{C}, \mathfrak{R}, I, T)$ est un système de génération à bourgeons,

$$\mathrm{L}(\mathcal{B}) = \{x \in \mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O}) : x \in \mathcal{C}, \mathrm{s}(x) \in I, \mathrm{e}(x) \in T^*\},$$

où $\mathcal{C}$ est la sous-opérade colorée de $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$ engendrée par $\mathfrak{R}$.

**Proposition**

Si $\mathcal{B}$ est un système de génération à bourgeons, $\mathrm{L}_{\mathrm{S}}(\mathcal{B}) \subseteq \mathrm{L}(\mathcal{B})$.

# Émulation des grammaires non contextuelles

Soit $G := (V, T, P, \mathbf{s})$ une grammaire non contextuelle propre, c.-à-d., telle que pour tout $(\mathbf{x}, u) \in P$, $|u| \geqslant 1$.

# Émulation des grammaires non contextuelles

Soit $G := (V, T, P, \mathbf{s})$ une grammaire non contextuelle propre, c.-à-d., telle que pour tout $(\mathbf{x}, u) \in P$, $|u| \geqslant 1$.

Soit le système de génération à bourgeons

$$\mathcal{B} := (\mathsf{As}, V \sqcup T, \mathfrak{R}, \{\mathbf{s}\}, T)$$

où

$$\mathfrak{R} := \left\{ \left(\mathbf{x}, \star_{|u|}, u\right) : (\mathbf{x}, u) \in P \right\}.$$

# Émulation des grammaires non contextuelles

Soit $G := (V, T, P, \mathbf{s})$ une grammaire non contextuelle propre, c.-à-d., telle que pour tout $(\mathbf{x}, u) \in P$, $|u| \geqslant 1$.

Soit le système de génération à bourgeons

$$\mathcal{B} := (\mathrm{As}, V \sqcup T, \mathfrak{R}, \{\mathbf{s}\}, T)$$

où

$$\mathfrak{R} := \left\{ \left(\mathbf{x}, \star_{|u|}, u\right) : (\mathbf{x}, u) \in P \right\}.$$

## Proposition

L'application $\mathrm{e} : \mathrm{L}(\mathcal{B}) \to W$, où $W$ est l'ensemble des mots engendrés par $G$, est une bijection.

Ainsi, toute grammaire non contextuelle propre peut être émulée par un système de génération à bourgeons reposant sur l'opérade associative.

# Émulation des grammaires non contextuelles

## Exemple

Soit $G := (\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}, \{a, b\}, P, \mathbf{x})$ une grammaire non contextuelle propre où

$$P := \{(\mathbf{x}, a), (\mathbf{x}, b\mathbf{y}), (\mathbf{y}, b), (\mathbf{y}, \mathbf{xy})\}.$$

Le système de génération à bourgeons
$\mathcal{B} := (\mathsf{As}, \{\mathbf{x}, \mathbf{y}, a, b\}, \mathfrak{R}, \{\mathbf{x}\}, \{a, b\})$ où

$$\mathfrak{R} := \{(\mathbf{x}, \star_1, a), (\mathbf{x}, \star_2, b\mathbf{y}), (\mathbf{y}, \star_1, b), (\mathbf{y}, \star_2, \mathbf{xy})\}$$

émule $G$.

# Émulation des grammaires non contextuelles

## Exemple

La suite de dérivations

$$\mathbf{x} \to b\mathbf{y} \to b\mathbf{xy} \to bb\mathbf{yy} \to bbb\mathbf{y} \to bbb\mathbf{xy} \to bbba\mathbf{y} \to bbbab$$

dans $G$ donne lieu à la suite de dérivations

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_{\mathbf{x}} &\to (\mathbf{x}, \star_2, b\mathbf{y}) \to (\mathbf{x}, \star_3, b\mathbf{xy}) \to (\mathbf{x}, \star_4, bb\mathbf{yy}) \to (\mathbf{x}, \star_4, bbb\mathbf{y}) \\ &\to (\mathbf{x}, \star_5, bbb\mathbf{xy}) \to (\mathbf{x}, \star_5, bbba\mathbf{y}) \to (\mathbf{x}, \star_5, bbbab) \end{aligned}$$

dans $\mathcal{B}$.

# Émulation des grammaires d'arbres régulières

Soit $G := (V, T, P, \mathbf{s})$ une grammaire d'arbres régulière.

Soit le système de génération à bourgeons

$$\mathcal{B} := (\mathrm{Free}(T \setminus T(0)), V \sqcup T(0), \mathfrak{R}, \{\mathbf{s}\}, T(0))$$

où

$$\mathfrak{R} := \{(\mathbf{x}, \mathfrak{t}, u) : (\mathbf{x}, \mathfrak{t}_u) \in P\},$$

où $\mathfrak{t}_u$ est le $V \sqcup T$-arbre obtenu en étiquetant les feuilles de $\mathfrak{t}$ par $u$.

# Émulation des grammaires d'arbres régulières

Soit $G := (V, T, P, \mathbf{s})$ une grammaire d'arbres régulière.

Soit le système de génération à bourgeons

$$\mathcal{B} := (\mathrm{Free}(T \setminus T(0)), V \sqcup T(0), \mathfrak{R}, \{\mathbf{s}\}, T(0))$$

où

$$\mathfrak{R} := \{(\mathbf{x}, \mathfrak{t}, u) : (\mathbf{x}, \mathfrak{t}_u) \in P\},$$

où $\mathfrak{t}_u$ est le $V \sqcup T$-arbre obtenu en étiquetant les feuilles de $\mathfrak{t}$ par $u$.

**Proposition**

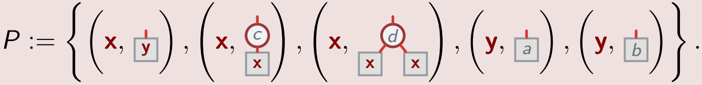
L'application $\phi : \mathrm{L}(\mathcal{B}) \to W$ définie par $\phi((\mathbf{x}, \mathfrak{t}, u)) := \mathfrak{t}_u$, où $W$ est l'ensemble des $V \sqcup T$-arbres engendrés par $G$, est une bijection.

Ainsi, toute grammaire d'arbres régulière propre peut être émulée par un système de génération à bourgeons reposant sur une opérade libre.

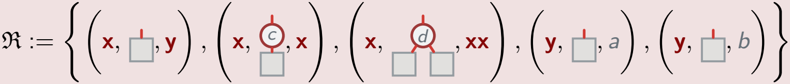
# Émulation des grammaires d'arbres régulières

## Exemple

Soit $G := (\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}, \{a, b, c, d\}, P, \mathbf{x})$ la grammaire d'arbres régulière où $|a| := 0$, $|b| := 0$, $|c| := 1$, $|d| := 2$ et




Le système de génération à bourgeons
$\mathcal{B} := (\mathrm{Free}(\{c, d\}, \{\mathbf{x}, \mathbf{y}, a, b\}, \mathfrak{R}, \{\mathbf{x}\}, \{a, b\}))$ où

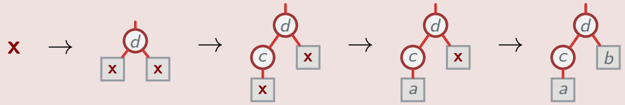



émule $G$.

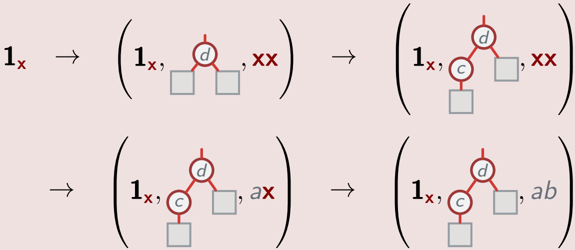
# Émulation des grammaires d'arbres régulières

## Exemple

La suite de dérivations



dans $G$ donne lieu à la suite de dérivations



dans $\mathcal{B}$.

# Plan

# Plan

# Séries sur les opérades colorées

Il existe plusieurs sortes de séries sur les opérades en fonction des spécificités des opérades considérées :

Ici, on considère des séries sur opérades non symétriques colorées ensemblistes $\mathcal{C}$ sans la condition de trivialité pour $\mathcal{C}(1)$.

# Séries sur les opérades colorées

Il existe plusieurs sortes de séries sur les opérades en fonction des spécificités des opérades considérées :

- opérades algébriques (et symétriques) [**Chapoton**, 2002, 2009] ;

Ici, on considère des séries sur opérades non symétriques colorées ensemblistes $\mathcal{C}$ sans la condition de trivialité pour $\mathcal{C}(1)$.

# Séries sur les opérades colorées

Il existe plusieurs sortes de séries sur les opérades en fonction des spécificités des opérades considérées :

- opérades algébriques (et symétriques) [**Chapoton**, 2002, 2009] ;
- opérades algébriques non symétriques [**van der Laan**, 2004] ;

Ici, on considère des séries sur opérades non symétriques colorées ensemblistes $\mathcal{C}$ sans la condition de trivialité pour $\mathcal{C}(1)$.

# Séries sur les opérades colorées

Il existe plusieurs sortes de séries sur les opérades en fonction des spécificités des opérades considérées :

- opérades algébriques (et symétriques) [**Chapoton**, 2002, 2009] ;
- opérades algébriques non symétriques [**van der Laan**, 2004] ;
- opérades ensemblistes non symétriques $\mathcal{O}$ avec $\mathcal{O}(1) := \{\mathbf{1}\}$ [**Frabetti**, 2008] ;

Ici, on considère des séries sur opérades non symétriques colorées ensemblistes $\mathcal{C}$ sans la condition de trivialité pour $\mathcal{C}(1)$.

# Séries sur les opérades colorées

Il existe plusieurs sortes de séries sur les opérades en fonction des spécificités des opérades considérées :

- opérades algébriques (et symétriques) [**Chapoton**, 2002, 2009] ;
- opérades algébriques non symétriques [**van der Laan**, 2004] ;
- opérades ensemblistes non symétriques $\mathcal{O}$ avec $\mathcal{O}(1) := \{\mathbf{1}\}$ [**Frabetti**, 2008] ;
- opérades algébriques (et symétriques) [**Loday, Nikolov**, 2013].

Ici, on considère des séries sur opérades non symétriques colorées ensemblistes $\mathcal{C}$ sans la condition de trivialité pour $\mathcal{C}(1)$.

# Produit pré-Lie

Le produit pré-Lie $\mathbf{f} \curvearrowleft \mathbf{g}$ de deux séries $\mathbf{f}$ et $\mathbf{g}$ sur $\mathcal{C}$ est défini par

$$\langle x, \mathbf{f} \curvearrowleft \mathbf{g} \rangle := \sum_{\substack{y,z \in \mathcal{C} \\ i \in [|y|] \\ x = y \circ_i z}} \langle y, \mathbf{f} \rangle \langle z, \mathbf{g} \rangle .$$

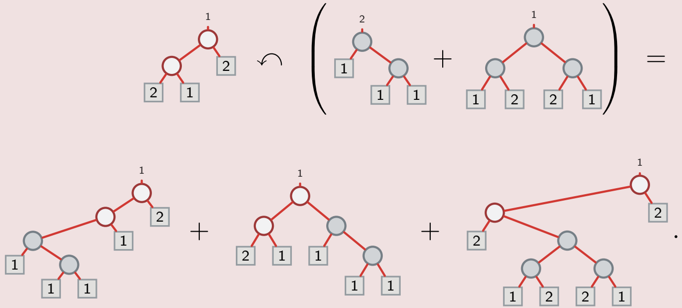
# Produit pré-Lie

Le produit pré-Lie $\mathbf{f} \curvearrowleft \mathbf{g}$ de deux séries $\mathbf{f}$ et $\mathbf{g}$ sur $\mathcal{C}$ est défini par

$$\langle x, \mathbf{f} \curvearrowleft \mathbf{g} \rangle := \sum_{\substack{y,z \in \mathcal{C} \\ i \in [|y|] \\ x = y \circ_i z}} \langle y, \mathbf{f} \rangle \langle z, \mathbf{g} \rangle .$$

## Exemple

Voici un calcul sur des $\mathrm{B}_{\{1,2\}}(\mathsf{Mag})$-séries :



# Propriétés du produit pré-Lie

Le produit pré-Lie $\curvearrowleft$ est

- bilinéaire ;
- défini totalement si les $\mathcal{C}(n)$ sont finis ;
- admet $\mathbf{u}$ comme unité à gauche (mais pas à droite), où $\mathbf{u}$ est la série des unités colorées de $\mathcal{C}$ définie par

$$\mathbf{u} := \sum_{c \in \mathscr{C}} \mathbf{1}_c,$$

avec $\mathscr{C}$ l'ensemble des couleurs de $\mathcal{C}$.

# Propriétés du produit pré-Lie

Le produit pré-Lie $\curvearrowleft$ est

- bilinéaire ;
- défini totalement si les $\mathcal{C}(n)$ sont finis ;
- admet $\mathbf{u}$ comme unité à gauche (mais pas à droite), où $\mathbf{u}$ est la série des unités colorées de $\mathcal{C}$ définie par

$$\mathbf{u} := \sum_{c \in \mathscr{C}} \mathbf{1}_c,$$

avec $\mathscr{C}$ l'ensemble des couleurs de $\mathcal{C}$.

## Proposition

Le produit pré-Lie vérifie

$$(\mathbf{f} \curvearrowleft \mathbf{g}) \curvearrowleft \mathbf{h} - \mathbf{f} \curvearrowleft (\mathbf{g} \curvearrowleft \mathbf{h}) = (\mathbf{f} \curvearrowleft \mathbf{h}) \curvearrowleft \mathbf{g} - \mathbf{f} \curvearrowleft (\mathbf{h} \curvearrowleft \mathbf{g}).$$

Ainsi, $(\mathbb{K} \langle\langle \mathcal{C} \rangle\rangle, \curvearrowleft)$ est une algèbre pré-Lie.

# Étoile pré-Lie

Pour tout $\ell \geqslant 0$, soit

$$\mathbf{f}^{\curvearrowleft \ell} := \begin{cases} \mathbf{u} & \text{si } \ell = 0, \\ \mathbf{f}^{\curvearrowleft \ell - 1} \curvearrowleft \mathbf{f} & \text{sinon.} \end{cases}$$

# Étoile pré-Lie

Pour tout $\ell \geqslant 0$, soit

$$\mathbf{f}^{\curvearrowleft \ell} := \begin{cases} \mathbf{u} & \text{si } \ell = 0, \\ \mathbf{f}^{\curvearrowleft \ell-1} \curvearrowleft \mathbf{f} & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'étoile pré-Lie de $\mathbf{f}$ est la série sur $\mathcal{C}$

$$\mathbf{f}^{\curvearrowleft *} := \sum_{\ell \geqslant 0} \mathbf{f}^{\curvearrowleft \ell}.$$

# Étoile pré-Lie

Pour tout $\ell \geqslant 0$, soit

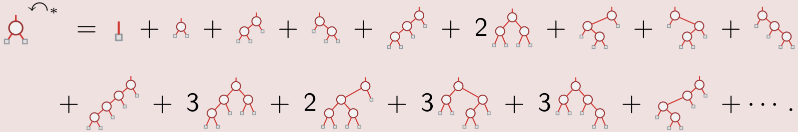
$$\mathbf{f}^{\curvearrowleft_\ell} := \begin{cases} \mathbf{u} & \text{si } \ell = 0, \\ \mathbf{f}^{\curvearrowleft_{\ell-1}} \curvearrowleft \mathbf{f} & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'étoile pré-Lie de $\mathbf{f}$ est la série sur $\mathcal{C}$

$$\mathbf{f}^{\curvearrowleft_*} := \sum_{\ell \geqslant 0} \mathbf{f}^{\curvearrowleft_\ell}.$$

## Exemple

Voici un calcul sur des $\mathrm{B}_{\{1\}}(\mathsf{Mag})$-séries :



Les coefficients de cette série se calculent par la formule des équerres sur les arbres binaires [**Knuth**, 1973].

# Propriétés de l'étoile pré-Lie

Un sous-ensemble $S$ de $\mathcal{C}(1)$ est factorise finiment $\mathcal{C}$ si tout $x \in \mathcal{C}(1)$ admet un nombre fini de factorisations sur $S$.

# Propriétés de l'étoile pré-Lie

Un sous-ensemble $S$ de $\mathcal{C}(1)$ est factorise finiment $\mathcal{C}$ si tout $x \in \mathcal{C}(1)$ admet un nombre fini de factorisations sur $S$.

## Lemme

Si $\mathrm{Supp}(\mathbf{f})(1)$ factorise finiment $\mathcal{C}$, $\mathbf{f}^{\curvearrowleft *}$ est une série sur $\mathcal{C}$ bien définie.

# Propriétés de l'étoile pré-Lie

Un sous-ensemble $S$ de $\mathcal{C}(1)$ est factorise finiment $\mathcal{C}$ si tout $x \in \mathcal{C}(1)$ admet un nombre fini de factorisations sur $S$.

**Lemme**

Si $\mathrm{Supp}(\mathbf{f})(1)$ factorise finiment $\mathcal{C}$, $\mathbf{f}^{\curvearrowleft *}$ est une série sur $\mathcal{C}$ bien définie.

**Proposition**

Si $\mathbf{f}$ est une série sur $\mathcal{C}$ telle que $\mathrm{Supp}(\mathbf{f})(1)$ factorise finiment $\mathcal{C}$,

$$\langle x, \mathbf{f}^{\curvearrowleft *} \rangle = \delta_{x, \mathbf{1}_{\mathrm{s}(x)}} + \sum_{\substack{y,z \in \mathcal{C} \\ i \in [|y|] \\ x = y \circ_i z}} \langle y, \mathbf{f}^{\curvearrowleft *} \rangle \langle z, \mathbf{f} \rangle .$$

# Propriétés de l'étoile pré-Lie

Un sous-ensemble $S$ de $\mathcal{C}(1)$ est factorise finiment $\mathcal{C}$ si tout $x \in \mathcal{C}(1)$ admet un nombre fini de factorisations sur $S$.

## Lemme

Si $\mathrm{Supp}(\mathbf{f})(1)$ factorise finiment $\mathcal{C}$, $\mathbf{f}^{\curvearrowleft *}$ est une série sur $\mathcal{C}$ bien définie.

## Proposition

Si $\mathbf{f}$ est une série sur $\mathcal{C}$ telle que $\mathrm{Supp}(\mathbf{f})(1)$ factorise finiment $\mathcal{C}$,

$$\langle x, \mathbf{f}^{\curvearrowleft *} \rangle = \delta_{x,\mathbf{1}_{\mathrm{s}(x)}} + \sum_{\substack{y,z \in \mathcal{C} \\ i \in [|y|] \\ x = y \circ_i z}} \langle y, \mathbf{f}^{\curvearrowleft *} \rangle \langle z, \mathbf{f} \rangle .$$

## Proposition

Si $\mathbf{f}$ est une série sur $\mathcal{C}$ telle que $\mathrm{Supp}(\mathbf{f})(1)$ factorise finiment $\mathcal{C}$, l'équation

$$\mathbf{x} - \mathbf{x} \curvearrowleft \mathbf{f} = \mathbf{u}$$

admet comme solution unique $\mathbf{x} = \mathbf{f}^{\curvearrowleft *}$.

# Produit de composition

Le produit de composition $\mathbf{f} \odot \mathbf{g}$ de deux séries $\mathbf{f}$ et $\mathbf{g}$ sur $\mathcal{C}$ est défini par

$$\langle x, \mathbf{f} \odot \mathbf{g} \rangle := \sum_{\substack{y, z_1, \ldots, z_{|y|} \in \mathcal{C} \\ x = y \circ \left[z_1, \ldots, z_{|y|}\right]}} \langle y, \mathbf{f} \rangle \prod_{i \in [|y|]} \langle z_i, \mathbf{g} \rangle .$$

# Produit de composition

Le produit de composition $\mathbf{f} \odot \mathbf{g}$ de deux séries $\mathbf{f}$ et $\mathbf{g}$ sur $\mathcal{C}$ est défini par

$$\langle x, \mathbf{f} \odot \mathbf{g} \rangle := \sum_{\substack{y, z_1, \dots, z_{|y|} \in \mathcal{C} \\ x = y \circ \left[z_1, \dots, z_{|y|}\right]}} \langle y, \mathbf{f} \rangle \prod_{i \in [|y|]} \langle z_i, \mathbf{g} \rangle .$$

## Exemple

Voici un calcul sur des $\mathrm{B}_{\{1,2,3\}}(\mathsf{As})$-séries :

$$(2, \star_3, 211) \odot ((2, \star_1, 3) + (1, \star_2, 21) + (2, \star_2, 23)) =$$

$$(2, \star_5, 32121) + (2, \star_6, 232121).$$

# Propriétés du produit de composition

Le produit de composition $\odot$ est

- linéaire à gauche (mais pas à droite) ;
- défini totalement si les $\mathcal{C}(n)$ sont finis ;
- admet $\mathbf{u}$ comme unité à gauche et à droite.

# Propriétés du produit de composition

Le produit de composition $\odot$ est

- linéaire à gauche (mais pas à droite) ;
- défini totalement si les $\mathcal{C}(n)$ sont finis ;
- admet $\mathbf{u}$ comme unité à gauche et à droite.

**Proposition**

Le produit de composition est associatif.

Ainsi, $(\mathbb{K}\langle\langle\mathcal{C}\rangle\rangle, \odot, \mathbf{u})$ est un monoïde.

# Étoile pour la composition

Pour tout $\ell \geqslant 0$, soit

$$\mathbf{f}^{\odot_\ell} := \begin{cases} \mathbf{u} & \text{si } \ell = 0, \\ \mathbf{f}^{\odot_{\ell-1}} \odot \mathbf{f} & \text{sinon.} \end{cases}$$

# Étoile pour la composition

Pour tout $\ell \geqslant 0$, soit

$$\mathbf{f}^{\odot_\ell} := \begin{cases} \mathbf{u} & \text{si } \ell = 0, \\ \mathbf{f}^{\odot_{\ell-1}} \odot \mathbf{f} & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'étoile pour la composition de $\mathbf{f}$ est la série sur $\mathcal{C}$

$$\mathbf{f}^{\odot_*} := \sum_{\ell \geqslant 0} \mathbf{f}^{\odot_\ell}.$$

# Étoile pour la composition

Pour tout $\ell \geqslant 0$, soit

$$\mathbf{f}^{\odot_\ell} := \begin{cases} \mathbf{u} & \text{si } \ell = 0, \\ \mathbf{f}^{\odot_{\ell-1}} \odot \mathbf{f} & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'étoile pour la composition de $\mathbf{f}$ est la série sur $\mathcal{C}$

$$\mathbf{f}^{\odot_*} := \sum_{\ell \geqslant 0} \mathbf{f}^{\odot_\ell}.$$

## Exemple

Voici un calcul sur des $\mathrm{B}_{\{1,2\}}(\mathsf{As})$-séries :

$$((1, \star_2, 22) + (2, \star_2, 11))^{\odot_*} = (1, \star_1, 1) + (2, \star_2, 2) + (1, \star_2, 22)$$
$$+ (2, \star_2, 11) + (1, \star_4, 1111) + (2, \star_4, 2222) + (1, \star_8, 2^8) + (2, \star_8, 1^8)$$
$$+ (1, \star_{16}, 1^{16}) + (2, \star_{16}, 2^{16}) + \cdots .$$

# Propriétés de l'étoile pour la composition

**Lemme**

Si $\mathrm{Supp}(\mathbf{f})(1)$ factorise finiment $\mathcal{C}$, $\mathbf{f}^{\odot *}$ est une série sur $\mathcal{C}$ bien définie.

# Propriétés de l'étoile pour la composition

**Lemme**

Si $\mathrm{Supp}(\mathbf{f})(1)$ factorise finiment $\mathcal{C}$, $\mathbf{f}^{\odot *}$ est une série sur $\mathcal{C}$ bien définie.

**Proposition**

Si $\mathbf{f}$ est une série sur $\mathcal{C}$ telle que $\mathrm{Supp}(\mathbf{f})(1)$ factorise finiment $\mathcal{C}$,

$$\left\langle x, \mathbf{f}^{\odot *} \right\rangle = \delta_{x, \mathbf{1}_{\mathrm{s}(x)}} + \sum_{\substack{y, z_1, \dots, z_{|y|} \in \mathcal{C} \\ x = y \circ \left[z_1, \dots, z_{|y|}\right]}} \left\langle y, \mathbf{f}^{\odot *} \right\rangle \prod_{i \in [|y|]} \langle z_i, \mathbf{f} \rangle .$$

# Propriétés de l'étoile pour la composition

**Lemme**

Si $\mathrm{Supp}(\mathbf{f})(1)$ factorise finiment $\mathcal{C}$, $\mathbf{f}^{\odot *}$ est une série sur $\mathcal{C}$ bien définie.

**Proposition**

Si $\mathbf{f}$ est une série sur $\mathcal{C}$ telle que $\mathrm{Supp}(\mathbf{f})(1)$ factorise finiment $\mathcal{C}$,

$$\left\langle x, \mathbf{f}^{\odot *} \right\rangle = \delta_{x,\mathbf{1}_{\mathrm{s}(x)}} + \sum_{\substack{y, z_1, \dots, z_{|y|} \in \mathcal{C} \\ x = y \circ \left[z_1, \dots, z_{|y|}\right]}} \left\langle y, \mathbf{f}^{\odot *} \right\rangle \prod_{i \in [|y|]} \left\langle z_i, \mathbf{f} \right\rangle .$$

**Proposition**

Si $\mathbf{f}$ est une série sur $\mathcal{C}$ telle que $\mathrm{Supp}(\mathbf{f})(1)$ factorise finiment $\mathcal{C}$, l'équation

$$\mathbf{x} - \mathbf{x} \odot \mathbf{f} = \mathbf{u}$$

admet comme solution unique $\mathbf{x} = \mathbf{f}^{\odot *}$.

# Plan

# Séries synchrones

Soit $\mathcal{B} := (\mathcal{O}, \mathscr{C}, \mathfrak{R}, I, T)$ un système de génération à bourgeons.

La série synchrone de $\mathcal{B}$ est

$$\mathrm{sync}(\mathcal{B}) := \mathbf{i} \odot \mathbf{r}^{\odot_*} \odot \mathbf{t}.$$

où $\mathbf{r}$ (resp. $\mathbf{i}$, $\mathbf{t}$) est la série caractéristique de $\mathfrak{R}$ (resp. $\{\mathbf{1}_c : c \in I\}$, $\{\mathbf{1}_c : c \in T\}$).

# Séries synchrones

Soit $\mathcal{B} := (\mathcal{O}, \mathscr{C}, \mathfrak{R}, I, T)$ un système de génération à bourgeons.

La série synchrone de $\mathcal{B}$ est

$$\mathrm{sync}(\mathcal{B}) := \mathbf{i} \odot \mathbf{r}^{\odot_*} \odot \mathbf{t}.$$

où $\mathbf{r}$ (resp. $\mathbf{i}$, $\mathbf{t}$) est la série caractéristique de $\mathfrak{R}$ (resp. $\{\mathbf{1}_c : c \in I\}$, $\{\mathbf{1}_c : c \in T\}$).

## Théorème

Si $\mathfrak{R}(1)$ factorise finiment $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$,

$$\mathrm{sync}(\mathcal{B}) = \sum_{\substack{\mathfrak{t} \in \mathrm{Free}_{\mathrm{par}}(\mathfrak{R}) \\ \mathrm{s}(\mathfrak{t}) \in I \\ \mathrm{e}(\mathfrak{t}) \in T^*}} \mathrm{eval}_{\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})}(\mathfrak{t}).$$

# Séries synchrones

Soit $\mathcal{B} := (\mathcal{O}, \mathscr{C}, \mathfrak{R}, I, T)$ un système de génération à bourgeons.

La série synchrone de $\mathcal{B}$ est

$$\mathrm{sync}(\mathcal{B}) := \mathbf{i} \odot \mathbf{r}^{\odot_*} \odot \mathbf{t}.$$

où $\mathbf{r}$ (resp. $\mathbf{i}$, $\mathbf{t}$) est la série caractéristique de $\mathfrak{R}$ (resp. $\{\mathbf{1}_c : c \in I\}$, $\{\mathbf{1}_c : c \in T\}$).

## Théorème

Si $\mathfrak{R}(1)$ factorise finiment $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$,

$$\mathrm{sync}(\mathcal{B}) = \sum_{\substack{\mathfrak{t} \in \mathrm{Free}_{\mathrm{par}}(\mathfrak{R}) \\ \mathrm{s}(\mathfrak{t}) \in I \\ \mathrm{e}(\mathfrak{t}) \in T^*}} \mathrm{eval}_{\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})}(\mathfrak{t}).$$

## Proposition

Si $\mathfrak{R}(1)$ factorise finiment $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$, alors $\mathrm{Supp}(\mathrm{sync}(\mathcal{B})) = \mathrm{L}_{\mathrm{S}}(\mathcal{B})$.

# Un outil pour le dénombrement

Soit $X$ un ensemble d'objets combinatoires que l'on souhaite dénombrer.

# Un outil pour le dénombrement

Soit $X$ un ensemble d'objets combinatoires que l'on souhaite dénombrer.

Soit un système de générations à bourgeons $\mathcal{B} := (\mathcal{O}, \mathscr{C}, \mathfrak{R}, I, T)$ tel que

1. $\mathrm{L_S}(\mathcal{B}) = X$ ;
2. la série $\mathrm{sync}(\mathcal{B})$ ne possède que des coefficients à 0 ou 1.

# Un outil pour le dénombrement

Soit $X$ un ensemble d'objets combinatoires que l'on souhaite dénombrer.

Soit un système de générations à bourgeons $\mathcal{B} := (\mathcal{O}, \mathscr{C}, \mathfrak{R}, I, T)$ tel que

1. $\mathrm{L}_{\mathrm{S}}(\mathcal{B}) = X$ ;
2. la série $\mathrm{sync}(\mathcal{B})$ ne possède que des coefficients à 0 ou 1.

Dans ce cas, on a

$$\mathbf{f}_X = \mathrm{sync}(\mathcal{B}),$$

où $\mathbf{f}_X$ est la $X$-série caractéristique de $X$.

# Un outil pour le dénombrement

Soit $X$ un ensemble d'objets combinatoires que l'on souhaite dénombrer.

Soit un système de générations à bourgeons $\mathcal{B} := (\mathcal{O}, \mathscr{C}, \mathfrak{R}, I, T)$ tel que

1. $\mathrm{L_S}(\mathcal{B}) = X$ ;
2. la série $\mathrm{sync}(\mathcal{B})$ ne possède que des coefficients à 0 ou 1.

Dans ce cas, on a

$$\mathbf{f}_X = \mathrm{sync}(\mathcal{B}),$$

où $\mathbf{f}_X$ est la $X$-série caractéristique de $X$.

On peut alors utiliser $\mathcal{B}$ pour obtenir une formule de récurrence pour dénombrer les éléments de $X$.

# Séries des couleurs

Soit $\mathbf{f}$ une série sur $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$.

Soit

$$\mathfrak{cl} : \mathbb{K}\left\langle\left\langle \mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O}) \right\rangle\right\rangle \to \mathbb{K}\left\langle\left\langle \mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathsf{As}) \right\rangle\right\rangle$$

l'application définie par

$$\mathfrak{cl}(\mathbf{f}) := \sum_{x \in \mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})} \langle x, \mathbf{f} \rangle \left(\mathrm{s}(x), \star_{|x|}, \mathrm{e}(x)\right).$$

Cette série est la série des couleurs de $\mathbf{f}$.

# Séries des couleurs

Soit $\mathbf{f}$ une série sur $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$.

Soit

$$\mathfrak{cl} : \mathbb{K}\langle\langle \mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O}) \rangle\rangle \to \mathbb{K}\langle\langle \mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathsf{As}) \rangle\rangle$$

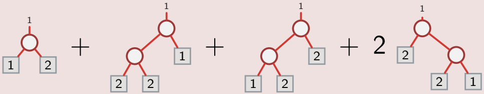
l'application définie par

$$\mathfrak{cl}(\mathbf{f}) := \sum_{x \in \mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})} \langle x, \mathbf{f} \rangle \left( \mathrm{s}(x), \star_{|x|}, \mathrm{e}(x) \right).$$

Cette série est la série des couleurs de $\mathbf{f}$.

## Exemple

Soit la $\mathrm{B}_{\{1,2\}}(\mathsf{Mag})$-série

$\mathbf{f} =$  .

# Séries des couleurs

Soit $\mathbf{f}$ une série sur $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$.

Soit

$$\mathfrak{cl} : \mathbb{K}\langle\langle \mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O}) \rangle\rangle \to \mathbb{K}\langle\langle \mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathsf{As}) \rangle\rangle$$

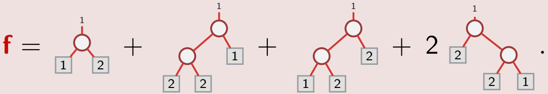
l'application définie par

$$\mathfrak{cl}(\mathbf{f}) := \sum_{x \in \mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})} \langle x, \mathbf{f} \rangle \left( \mathrm{s}(x), \star_{|x|}, \mathrm{e}(x) \right).$$

Cette série est la série des couleurs de $\mathbf{f}$.

## Exemple

Soit la $\mathrm{B}_{\{1,2\}}(\mathsf{Mag})$-série



On a alors

$$\mathfrak{cl}(\mathbf{f}) = (1, \star_2, 12) + 3(1, \star_3, 221) + (1, \star_3, 122).$$

# Séries des types de couleurs

Soient $\mathbb{X}_{\mathscr{C}} := \{x_{c_1}, \dots, x_{c_k}\}$ et $\mathbb{Y}_{\mathscr{C}} := \{y_{c_1}, \dots, y_{c_k}\}$ deux alphabets.

Soit

$$\mathfrak{tcl} : \mathbb{K}\langle\langle \mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O}) \rangle\rangle \to \mathbb{K}[[\mathbb{X}_{\mathscr{C}} \sqcup \mathbb{Y}_{\mathscr{C}}]]$$

l'application définie par

$$\mathfrak{tcl}(\mathbf{f}) := \sum_{z \in \mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})} \langle z, \mathbf{f} \rangle \; x_{\mathrm{s}(y)} \mathbb{Y}_{\mathscr{C}}^{\mathrm{e}(y)}$$

Cette série est la la série des types de couleurs de $\mathbf{f}$.

# Séries des types de couleurs

Soient $\mathbb{X}_{\mathscr{C}} := \{x_{c_1}, \ldots, x_{c_k}\}$ et $\mathbb{Y}_{\mathscr{C}} := \{y_{c_1}, \ldots, y_{c_k}\}$ deux alphabets.

Soit

$$\mathfrak{tcl} : \mathbb{K}\langle\langle \mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})\rangle\rangle \to \mathbb{K}[[\mathbb{X}_{\mathscr{C}} \sqcup \mathbb{Y}_{\mathscr{C}}]]$$

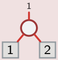
l'application définie par

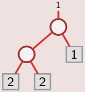
$$\mathfrak{tcl}(\mathbf{f}) := \sum_{z \in \mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})} \langle z, \mathbf{f}\rangle \; x_{\mathrm{s}(y)} \mathbb{Y}_{\mathscr{C}}^{\mathrm{e}(y)}$$

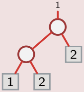
Cette série est la la série des types de couleurs de $\mathbf{f}$.

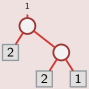
## Exemple

Soit la $\mathrm{B}_{\{1,2\}}(\mathrm{Mag})$-série

$\mathbf{f} =$ 

$+$ 

$+$ 

$+ \; 2$ 

.

# Séries des types de couleurs

Soient $\mathbb{X}_{\mathscr{C}} := \{x_{c_1}, \dots, x_{c_k}\}$ et $\mathbb{Y}_{\mathscr{C}} := \{y_{c_1}, \dots, y_{c_k}\}$ deux alphabets.

Soit

$$\mathfrak{tcl} : \mathbb{K}\langle\langle \mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})\rangle\rangle \to \mathbb{K}[[\mathbb{X}_{\mathscr{C}} \sqcup \mathbb{Y}_{\mathscr{C}}]]$$

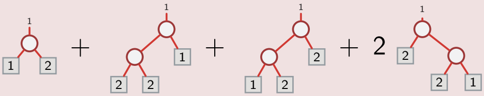
l'application définie par

$$\mathfrak{tcl}(\mathbf{f}) := \sum_{z \in \mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})} \langle z, \mathbf{f}\rangle \; x_{\mathrm{s}(y)} \mathbb{Y}_{\mathscr{C}}^{\mathrm{e}(y)}$$

Cette série est la la série des types de couleurs de $\mathbf{f}$.

## Exemple

Soit la $\mathrm{B}_{\{1,2\}}(\mathsf{Mag})$-série

$\mathbf{f} =$  .

On a alors

$$\mathfrak{tcl}(\mathbf{f}) = x_1 y_1 y_2 + 4 x_1 y_1 y_2^2.$$

# Dénombrement des arbres binaires équilibrés

Reprenons le système de génération à bourgeons

$$\mathcal{B} := (\mathsf{Mag}, \{1, 2\}, \mathfrak{R}, \{1\}, \{1\})$$

où

$$\mathfrak{R} := \left\{ \left(1, \ , 11\right), \left(1, \ , 12\right), \left(1, \ , 21\right), (2, \mathbf{1}, 1) \right\}.$$

# Dénombrement des arbres binaires équilibrés

Reprenons le système de génération à bourgeons

$$\mathcal{B} := (\mathrm{Mag}, \{1, 2\}, \mathfrak{R}, \{1\}, \{1\})$$

où

$\mathfrak{R} := \Big\{ \Big(1,$  $, 11\Big), \Big(1,$  $, 12\Big), \Big(1,$  $, 21\Big), (2, \mathbf{1}, 1) \Big\}.$

Quelques propriétés :

1. le langage synchrone de $\mathcal{B}$ est en bijection avec l'ensemble des arbres binaires équilibrés ;

# Dénombrement des arbres binaires équilibrés

Reprenons le système de génération à bourgeons

$$\mathcal{B} := (\mathrm{Mag}, \{1, 2\}, \mathfrak{R}, \{1\}, \{1\})$$

où

$$\mathfrak{R} := \left\{ \left(1, \right.\right.$$  $$\left.\left., 11\right), \left(1, \right.\right.$$  $$\left.\left., 12\right), \left(1, \right.\right.$$  $$\left.\left., 21\right), (2, \mathbf{1}, 1) \right\}.$$

Quelques propriétés :

1. le langage synchrone de $\mathcal{B}$ est en bijection avec l'ensemble des arbres binaires équilibrés ;
2. la série $\mathrm{sync}(\mathcal{B}) = \mathbf{i} \odot \mathbf{r}^{\odot_*} \odot \mathbf{t}$ ne possède que des coefficients à 0 ou 1.

# Dénombrement des arbres binaires équilibrés

Reprenons le système de génération à bourgeons

$$\mathcal{B} := (\mathrm{Mag}, \{1, 2\}, \mathfrak{R}, \{1\}, \{1\})$$

où

$$\mathfrak{R} := \left\{ \left(1, \right. \right.$$  $$\left. , 11 \right), \left(1, \right.$$  $$\left. , 12 \right), \left(1, \right.$$  $$\left. \left. , 21 \right), (2, \mathbf{1}, 1) \right\}.$$

Quelques propriétés :

1. le langage synchrone de $\mathcal{B}$ est en bijection avec l'ensemble des arbres binaires équilibrés ;
2. la série $\mathrm{sync}(\mathcal{B}) = \mathbf{i} \odot \mathbf{r}^{\odot_*} \odot \mathbf{t}$ ne possède que des coefficients à 0 ou 1.

La série génératrice des arbres binaires équilibrés (comptés selon leur nombre de feuilles) est ainsi la série $\frac{1}{x_1}\mathfrak{tcl}(\mathrm{sync}(\mathcal{B}))$.

# Dénombrement des arbres binaires équilibrés

D'après l'une des propositions précédentes,

$$\mathbf{r}^{\odot *} - \mathbf{r}^{\odot *} \odot \mathbf{r} = \mathbf{u}.$$

# Dénombrement des arbres binaires équilibrés

D'après l'une des propositions précédentes,

$$\mathbf{r}^{\odot_*} - \mathbf{r}^{\odot_*} \odot \mathbf{r} = \mathbf{u}.$$

De plus,

$$\mathfrak{cl}\left(\mathbf{r}^{\odot_*} - \mathbf{r}^{\odot_*} \odot \mathbf{r}\right) = \mathfrak{cl}(\mathbf{u})$$

# Dénombrement des arbres binaires équilibrés

D'après l'une des propositions précédentes,

$$\mathbf{r}^{\odot_*} - \mathbf{r}^{\odot_*} \odot \mathbf{r} = \mathbf{u}.$$

De plus,

$$\mathfrak{cl}\left(\mathbf{r}^{\odot_*} - \mathbf{r}^{\odot_*} \odot \mathbf{r}\right) = \mathfrak{cl}(\mathbf{u})$$

et ainsi,

$$\mathfrak{cl}(\mathbf{r})^{\odot_*} - \mathfrak{cl}(\mathbf{r})^{\odot_*} \odot \mathfrak{cl}(\mathbf{r}) = \mathfrak{cl}(\mathbf{u}).$$

# Dénombrement des arbres binaires équilibrés

D'après l'une des propositions précédentes,

$$\mathbf{r}^{\odot_*} - \mathbf{r}^{\odot_*} \odot \mathbf{r} = \mathbf{u}.$$

De plus,

$$\mathfrak{cl}\left(\mathbf{r}^{\odot_*} - \mathbf{r}^{\odot_*} \odot \mathbf{r}\right) = \mathfrak{cl}(\mathbf{u})$$

et ainsi,

$$\mathfrak{cl}(\mathbf{r})^{\odot_*} - \mathfrak{cl}(\mathbf{r})^{\odot_*} \odot \mathfrak{cl}(\mathbf{r}) = \mathfrak{cl}(\mathbf{u}).$$

En posant

$$\mathbf{f} := \mathfrak{cl}(\mathbf{r}) = (2, \star_1, 1) + (1, \star_2, 11) + (1, \star_2, 12) + (1, \star_2, 21),$$

# Dénombrement des arbres binaires équilibrés

D'après l'une des propositions précédentes,

$$\mathbf{r}^{\odot_*} - \mathbf{r}^{\odot_*} \odot \mathbf{r} = \mathbf{u}.$$

De plus,

$$\mathfrak{cl}\left(\mathbf{r}^{\odot_*} - \mathbf{r}^{\odot_*} \odot \mathbf{r}\right) = \mathfrak{cl}(\mathbf{u})$$

et ainsi,

$$\mathfrak{cl}(\mathbf{r})^{\odot_*} - \mathfrak{cl}(\mathbf{r})^{\odot_*} \odot \mathfrak{cl}(\mathbf{r}) = \mathfrak{cl}(\mathbf{u}).$$

En posant

$$\mathbf{f} := \mathfrak{cl}(\mathbf{r}) = (2, \star_1, 1) + (1, \star_2, 11) + (1, \star_2, 12) + (1, \star_2, 21),$$

on obtient donc

$$\mathbf{f}^{\odot_*} - \mathbf{f}^{\odot_*} \odot \mathbf{f} = (1, \star_1, 1) + (2, \star_1, 2).$$

# Dénombrement des arbres binaires équilibrés

D'après l'une des propositions précédentes, les coefficients de $\mathbf{f}^{\odot_*}$ vérifient la relation de récurrence

$$\left\langle (1, \star_{|u|}, u), \mathbf{f}^{\odot_*} \right\rangle = \delta_{u,1} + \sum_{\substack{v \in \{1,2\}^+ \setminus \{1\} \\ v \rightsquigarrow u}} \left\langle (1, \star_{|v|}, v), \mathbf{f}^{\odot_*} \right\rangle,$$

où $v \rightsquigarrow u$ signifie que le mot $u \in \{1, 2\}^2$ peut être obtenu à partir du mot $v \in \{1, 2\}^2$ en remplaçant toutes ses lettres simultanément selon la règle de réécriture $\rightarrow$ vérifiant $2 \rightarrow 1$, $1 \rightarrow 11$, $1 \rightarrow 12$ et $1 \rightarrow 21$.

# Dénombrement des arbres binaires équilibrés

D'après l'une des propositions précédentes, les coefficients de $\mathbf{f}^{\odot_*}$ vérifient la relation de récurrence

$$\left\langle (1, \star_{|u|}, u), \mathbf{f}^{\odot_*} \right\rangle = \delta_{u,1} + \sum_{\substack{v \in \{1,2\}^+ \setminus \{1\} \\ v \rightsquigarrow u}} \left\langle (1, \star_{|v|}, v), \mathbf{f}^{\odot_*} \right\rangle,$$

où $v \rightsquigarrow u$ signifie que le mot $u \in \{1,2\}^2$ peut être obtenu à partir du mot $v \in \{1,2\}^2$ en remplaçant toutes ses lettres simultanément selon la règle de réécriture $\to$ vérifiant $2 \to 1$, $1 \to 11$, $1 \to 12$ et $1 \to 21$.

On en déduit que les coefficients de $\mathbf{h} := \mathfrak{tcl}(\mathbf{f}^{\odot_*})$ vérifient

$$\begin{aligned}\langle x_1 y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2}, \mathbf{h} \rangle &= \delta_{(\alpha_1,\alpha_2),(1,0)} \\ &\quad + \sum_{\substack{\beta_1 + 2\beta_2 + \beta_3 + \beta_4 = \alpha_1 \\ \beta_3 + \beta_4 = \alpha_2}} \binom{\beta_1}{\beta_1} \binom{\beta_2 + \beta_3 + \beta_4}{\beta_2, \beta_3, \beta_4} \left\langle x_1 y_1^{\beta_2+\beta_3+\beta_4} y_2^{\beta_1}, \mathbf{h} \right\rangle.\end{aligned}$$

# Dénombrement des arbres binaires équilibrés

Finalement, comme $\operatorname{sync}(\mathcal{B}) = \mathbf{i} \odot \mathbf{r}^{\odot_*} \odot \mathbf{t}$,

$$\left\langle x_1 y_1^{\alpha_1} y_2^{0}, \mathfrak{tcl}(\mathbf{r}^{\odot_*}) \right\rangle = \left\langle x_1 y_1^{\alpha_1} y_2^{0}, \mathfrak{tcl}(\operatorname{sync}(\mathcal{B})) \right\rangle .$$

# Dénombrement des arbres binaires équilibrés

Finalement, comme $\mathrm{sync}(\mathcal{B}) = \mathbf{i} \odot \mathbf{r}^{\odot_*} \odot \mathbf{t}$,

$$\left\langle x_1 y_1^{\alpha_1} y_2^{0}, \mathfrak{tcl}(\mathbf{r}^{\odot_*}) \right\rangle = \left\langle x_1 y_1^{\alpha_1} y_2^{0}, \mathfrak{tcl}(\mathrm{sync}(\mathcal{B})) \right\rangle .$$

Le coefficient en $x_1 y_1^{\alpha_1} y_2^{0}$ de $\mathfrak{tcl}(\mathrm{sync}(\mathcal{B}))$ compte les arbres binaires équilibrés avec $\alpha_1$ feuilles.

# Dénombrement des arbres binaires équilibrés

Finalement, comme $\mathrm{sync}(\mathcal{B}) = \mathbf{i} \odot \mathbf{r}^{\odot_*} \odot \mathbf{t}$,

$$\left\langle x_1 y_1^{\alpha_1} y_2^0, \mathfrak{tcl}(\mathbf{r}^{\odot_*})\right\rangle = \left\langle x_1 y_1^{\alpha_1} y_2^0, \mathfrak{tcl}(\mathrm{sync}(\mathcal{B}))\right\rangle .$$

Le coefficient en $x_1 y_1^{\alpha_1} y_2^0$ de $\mathfrak{tcl}(\mathrm{sync}(\mathcal{B}))$ compte les arbres binaires équilibrés avec $\alpha_1$ feuilles.

On obtient ainsi la récurrence

$$\langle x_1 y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2}, \mathbf{h}\rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } (\alpha_1, \alpha_2) = (1, 0), \\ \displaystyle\sum_{\beta_1 + 2\beta_2 + \alpha_2 = \alpha_1} \tbinom{\beta_2 + \alpha_2}{\beta_2} 2^{\alpha_2} \left\langle x_1 y_1^{\beta_2 + \alpha_2} y_2^{\beta_1}, \mathbf{h}\right\rangle & \text{sinon} \end{cases}$$

pour les coefficients de $\mathbf{h} := \mathfrak{tcl}(\mathrm{sync}(\mathcal{B}))$.

# Plan

# Plan

# The bud operad of free operads

The free operad $\mathrm{Free}(G)$ over $G$, where $G$ is a graded set, is defined by

- $\mathrm{Free}(G)(n)$ is the set of the planar rooted trees with $n$ leaves and where internal nodes are labeled on $G$, respecting the arities of the labels ;
- $\mathfrak{s} \circ_i \mathfrak{t}$ is tree obtained by grafting the root of $\mathfrak{t}$ to the $i$-th leaf of $\mathfrak{s}$.

# The bud operad of free operads

The free operad $\mathrm{Free}(G)$ over $G$, where $G$ is a graded set, is defined by

- $\mathrm{Free}(G)(n)$ is the set of the planar rooted trees with $n$ leaves and where internal nodes are labeled on $G$, respecting the arities of the labels ;
- $\mathfrak{s} \circ_i \mathfrak{t}$ is tree obtained by grafting the root of $\mathfrak{t}$ to the $i$-th leaf of $\mathfrak{s}$.

For any set of colors $\mathscr{C}$,

$$\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathrm{Free}(G)) = \bigsqcup_{n \geqslant 1} \{(a, \mathfrak{t}, u_1 \dots u_n) : a, u_1, \dots, u_n \in \mathscr{C}, \mathfrak{t} \in \mathrm{Free}(G)(n)\} .$$

# The bud operad of free operads

The free operad $\mathrm{Free}(G)$ over $G$, where $G$ is a graded set, is defined by

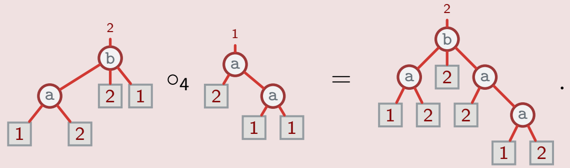
- $\mathrm{Free}(G)(n)$ is the set of the planar rooted trees with $n$ leaves and where internal nodes are labeled on $G$, respecting the arities of the labels;
- $\mathfrak{s} \circ_i \mathfrak{t}$ is tree obtained by grafting the root of $\mathfrak{t}$ to the $i$-th leaf of $\mathfrak{s}$.

For any set of colors $\mathscr{C}$,

$$\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathrm{Free}(G)) = \bigsqcup_{n \geqslant 1} \{(a, \mathfrak{t}, u_1 \dots u_n) : a, u_1, \dots, u_n \in \mathscr{C}, \mathfrak{t} \in \mathrm{Free}(G)(n)\}.$$

## Example

In $\mathrm{B}_{\{1,2\}}(\mathrm{Free}(G))$ where $G := \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$, $|\mathtt{a}| :=: 2$, and $|\mathtt{b}| := 3$,



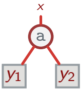
# The bud operad of free operads

In general, $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathrm{Free}(G))$ is not a free colored operad.

# The bud operad of free operads

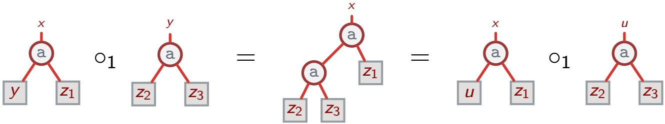
In general, $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathrm{Free}(G))$ is not a free colored operad.

For instance, the colored operad $\mathrm{B}_{\{1,2\}}(\mathrm{Free}(\{\mathtt{a}\}))$ with $|\mathtt{a}| := 2$ is generated by the eight corollas

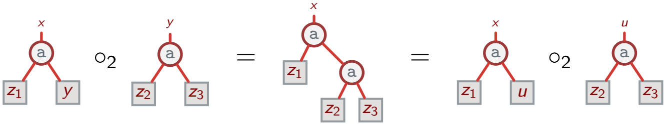



, $\qquad x, y_1, y_2 \in \{1, 2\}$,

and are subject to the nontrivial quadratic relations




, $\qquad y \neq u$,




, $\qquad y \neq u$.

# Plan

# Séries des équerres

Soit $\mathcal{B} := (\mathcal{O}, \mathscr{C}, \mathfrak{R}, I, T)$ un système de génération à bourgeons.

La série des équerres de $\mathcal{B}$ est

$$\text{équ}(\mathcal{B}) := \mathbf{i} \odot \mathbf{r}^{\curvearrowleft *} \odot \mathbf{t},$$

# Séries des équerres

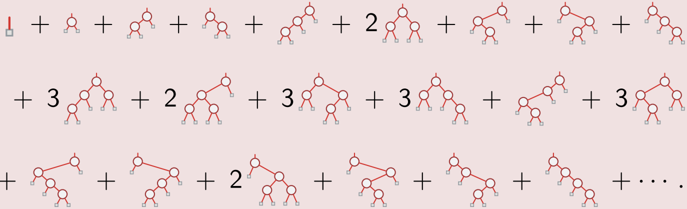
Soit $\mathcal{B} := (\mathcal{O}, \mathscr{C}, \mathfrak{R}, I, T)$ un système de génération à bourgeons.

La série des équerres de $\mathcal{B}$ est

$$\mathrm{équ}(\mathcal{B}) := \mathbf{i} \odot \mathbf{r}^{\curvearrowleft *} \odot \mathbf{t},$$

## Exemple

Pour $\mathcal{B} := (\mathrm{Mag}, \{1\}, \{$  $\}, \{1\}, \{1\})$,

$\mathrm{équ}(\mathcal{B}) =$ 

# Séries des équerres

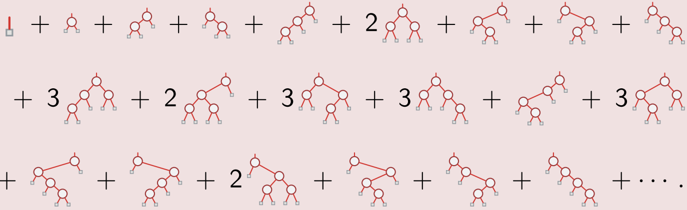
Soit $\mathcal{B} := (\mathcal{O}, \mathscr{C}, \mathfrak{R}, I, T)$ un système de génération à bourgeons.

La série des équerres de $\mathcal{B}$ est

$$\mathrm{équ}(\mathcal{B}) := \mathbf{i} \odot \mathbf{r}^{\curvearrowleft *} \odot \mathbf{t},$$

## Exemple

Pour $\mathcal{B} := (\mathrm{Mag}, \{1\}, \{$  $\}, \{1\}, \{1\})$,

$\mathrm{équ}(\mathcal{B}) =$ 


Les coefficients de $\mathrm{équ}(\mathcal{B})$ peuvent s'obtenir par la formule des équerres sur les arbres binaires [**Knuth**, 1973].

# Analogues de la statistique des équerres

Soient $\mathcal{O}$ une opérade, $G \subseteq \mathcal{O}$ un ensemble générant $\mathcal{O}$ et le système de génération à bourgeons $\mathcal{B}_{\mathcal{O},G} := (\mathcal{O}, \{1\}, G, \{1\}, \{1\})$.

Les coefficients $\langle x, \mathrm{équ}(\mathcal{B}_{\mathcal{O},G}) \rangle$ définissent une statistique sur les éléments de $\mathcal{O}$ analogue à celle des équerres propre aux arbres.

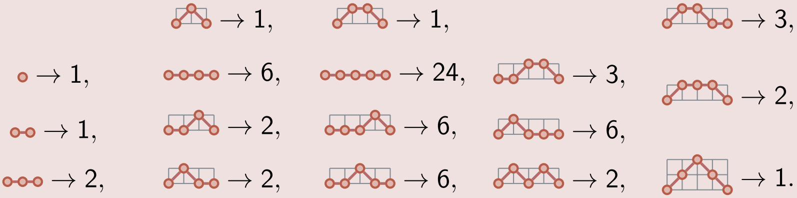
# Analogues de la statistique des équerres

Soient $\mathcal{O}$ une opérade, $G \subseteq \mathcal{O}$ un ensemble générant $\mathcal{O}$ et le système de génération à bourgeons $\mathcal{B}_{\mathcal{O},G} := (\mathcal{O}, \{1\}, G, \{1\}, \{1\})$.

Les coefficients $\langle x, \mathrm{équ}(\mathcal{B}_{\mathcal{O},G}) \rangle$ définissent une statistique sur les éléments de $\mathcal{O}$ analogue à celle des équerres propre aux arbres.

## Exemple

Pour $\mathcal{B}_{\mathrm{Motz},G}$ avec $G := \{$  ,  $\}$, nous obtenons une statistique type équerres pour les chemins de Motzkin :



# Graphes de dérivation

Les coefficients de $\mathrm{équ}(\mathcal{B})$ s'interprètent de manière combinatoire.

# Graphes de dérivation

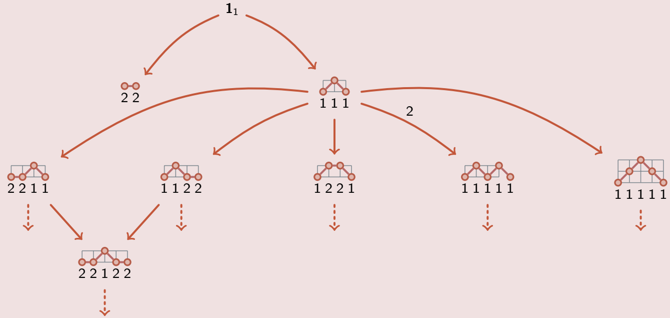
Les coefficients de $\mathrm{équ}(\mathcal{B})$ s'interprètent de manière combinatoire.

Le graphe de dérivation de $\mathcal{B}$ est le multigraphe orienté $\mathrm{DG}(\mathcal{B})$ tel que

- sommets : éléments dérivables depuis $\mathbf{1}_c$, $c \in I$ ;
- arcs : de $x_1$ vers $x_2$ si $x_1 \to x_2$.

## Exemple

Le graphe de dérivation de $\mathcal{B} := (\mathsf{Motz}, \{1, 2\}, \mathfrak{R}, \{1\}, \{1, 2\})$ où
$\mathfrak{R} := \{(1,$  $, 22), (1,$  $, 111)\}$ est



# Graphes de dérivation et série des équerres

## Proposition

Si $\mathfrak{R}(1)$ factorise finiment $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$, pour tout $x \in \mathrm{L}(\mathcal{B})$, le coefficient $\langle x, \mathrm{équ}(\mathcal{B}) \rangle$ est le nombre de multichemins dans $\mathrm{DG}(\mathcal{B})$ depuis $\mathbf{1}_c$, $c \in I$, vers $x$.

# Graphes de dérivation et série des équerres

## Proposition

Si $\mathfrak{R}(1)$ factorise finiment $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$, pour tout $x \in \mathrm{L}(\mathcal{B})$, le coefficient $\langle x, \mathrm{équ}(\mathcal{B})\rangle$ est le nombre de multichemins dans $\mathrm{DG}(\mathcal{B})$ depuis $\mathbf{1}_c$, $c \in I$, vers $x$.

## Théorème

Si $\mathfrak{R}(1)$ factorise finiment $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$,

$$\mathrm{équ}(\mathcal{B}) = \sum_{\substack{\mathfrak{t} \in \mathrm{Free}(\mathfrak{R}) \\ \mathrm{s}(\mathfrak{t}) \in I \\ \mathrm{e}(\mathfrak{t}) \in T^*}} \frac{\deg(\mathfrak{t})!}{\prod_{v \in \mathrm{N}(\mathfrak{t})} \deg(\mathfrak{t}_v)} \mathrm{eval}_{\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})}(\mathfrak{t}).$$

# Graphes de dérivation et série des équerres

## Proposition

Si $\mathfrak{R}(1)$ factorise finiment $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$, pour tout $x \in \mathrm{L}(\mathcal{B})$, le coefficient $\langle x, \mathrm{équ}(\mathcal{B})\rangle$ est le nombre de multichemins dans $\mathrm{DG}(\mathcal{B})$ depuis $\mathbf{1}_c$, $c \in I$, vers $x$.

## Théorème

Si $\mathfrak{R}(1)$ factorise finiment $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$,

$$\mathrm{équ}(\mathcal{B}) = \sum_{\substack{\mathfrak{t} \in \mathrm{Free}(\mathfrak{R}) \\ \mathrm{s}(\mathfrak{t}) \in I \\ \mathrm{e}(\mathfrak{t}) \in T^*}} \frac{\deg(\mathfrak{t})!}{\prod\limits_{v \in \mathrm{N}(\mathfrak{t})} \deg(\mathfrak{t}_v)} \mathrm{eval}_{\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})}(\mathfrak{t}).$$

## Proposition

Si $\mathfrak{R}(1)$ factorise finiment $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$,

$$\mathrm{Supp}(\mathrm{équ}(\mathcal{B})) = \mathrm{L}(\mathcal{B}).$$

# Plan

## Invertible elements for $\odot$

**Proposition**

If $\mathrm{Supp}(\mathbf{f})(1) = \{\mathbf{1}_c : c \in \mathscr{C}\} \sqcup S$ for some $\mathcal{C}$-finitely factorizing set $S$, the equations

$$\mathbf{f} \odot \mathbf{x} = \mathbf{u} \qquad \text{and} \qquad \mathbf{x} \odot \mathbf{f} = \mathbf{u}$$

admit both the unique same solution denoted by $\mathbf{x} = \mathbf{f}^{\odot -1}$.

# Invertible elements for $\odot$

**Proposition**

If $\mathrm{Supp}(\mathbf{f})(1) = \{\mathbf{1}_c : c \in \mathscr{C}\} \sqcup S$ for some $\mathcal{C}$-finitely factorizing set $S$, the equations

$$\mathbf{f} \odot \mathbf{x} = \mathbf{u} \qquad \text{and} \qquad \mathbf{x} \odot \mathbf{f} = \mathbf{u}$$

admit both the unique same solution denoted by $\mathbf{x} = \mathbf{f}^{\odot -1}$.

**Proposition**

If $\mathrm{Supp}(\mathbf{f})(1) = \{\mathbf{1}_c : c \in \mathscr{C}\} \sqcup S$ for some $\mathcal{C}$-finitely factorizing set $S$, $\mathbf{f}^{\odot -1}$ is a well-defined series satisfying

$$\left\langle x, \mathbf{f}^{\odot -1} \right\rangle = \sum_{\substack{\mathfrak{t} \in \mathrm{Free}(\bar{\mathcal{C}}) \\ \mathrm{eval}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{t}) = x}} (-1)^{\deg(\mathfrak{t})} \frac{1}{\left\langle \mathbf{1}_{\mathrm{s}(x)}, \mathbf{f} \right\rangle} \prod_{v \in \mathrm{N}(\mathfrak{t})} \frac{\langle \mathrm{lb}(v), \mathbf{f} \rangle}{\prod_{j \in [|v|]} \left\langle \mathbf{1}_{\mathrm{e}_j(v)}, \mathbf{f} \right\rangle}.$$

Therefore, the monoid $(\mathbb{K} \langle\langle \mathcal{C} \rangle\rangle, \odot)$ contains a (large) group formed by the series with a support satisfying the above description.

# Syntactic generating series

Let $\mathcal{B} := (\mathcal{O}, \mathscr{C}, \mathfrak{R}, I, T)$ be a bud generating system.

The syntactic generating series of $\mathcal{B}$ is

$$\mathrm{synt}(\mathcal{B}) := \mathbf{i} \odot (\mathbf{u} - \mathbf{r})^{\odot_{-1}} \odot \mathbf{t}.$$

# Syntactic generating series

Let $\mathcal{B} := (\mathcal{O}, \mathscr{C}, \mathfrak{R}, I, T)$ be a bud generating system.

The syntactic generating series of $\mathcal{B}$ is

$$\operatorname{synt}(\mathcal{B}) := \mathbf{i} \odot (\mathbf{u} - \mathbf{r})^{\odot_{-1}} \odot \mathbf{t}.$$

**Lemma**

If $\mathfrak{R}(1)$ is $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$-finitely factorizing, $\operatorname{synt}(\mathcal{B})$ is a well-defined series.

# Syntactic generating series

Let $\mathcal{B} := (\mathcal{O}, \mathscr{C}, \mathfrak{R}, I, T)$ be a bud generating system.

The syntactic generating series of $\mathcal{B}$ is

$$\mathrm{synt}(\mathcal{B}) := \mathbf{i} \odot (\mathbf{u} - \mathbf{r})^{\odot_{-1}} \odot \mathbf{t}.$$

**Lemma**

If $\mathfrak{R}(1)$ is $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$-finitely factorizing, $\mathrm{synt}(\mathcal{B})$ is a well-defined series.

We say that $\mathcal{B}$ is unambiguous if all coefficients of $\mathrm{synt}(\mathcal{B})$ are 0 or 1.

# Syntactic generating series

**Theorem**

If $\mathfrak{R}(1)$ is $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$-finitely factorizing,

$$\mathrm{synt}(\mathcal{B}) = \sum_{\substack{\mathfrak{t} \in \mathrm{Free}(\mathfrak{R}) \\ \mathrm{s}(\mathfrak{t}) \in I \\ \mathrm{e}(\mathfrak{t}) \in T^*}} \mathrm{eval}_{\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})}(\mathfrak{t}).$$

# Syntactic generating series

**Theorem**

If $\mathfrak{R}(1)$ is $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$-finitely factorizing,

$$\mathrm{synt}(\mathcal{B}) = \sum_{\substack{\mathfrak{t} \in \mathrm{Free}(\mathfrak{R}) \\ \mathrm{s}(\mathfrak{t}) \in I \\ \mathrm{e}(\mathfrak{t}) \in T^*}} \mathrm{eval}_{\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})}(\mathfrak{t}).$$

**Proposition**

If $\mathfrak{R}(1)$ is $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$-finitely factorizing,

$$\mathrm{Supp}(\mathrm{synt}(\mathcal{B})) = \mathrm{L}(\mathcal{B}).$$

# Syntactic generating series

**Theorem**

If $\mathfrak{R}(1)$ is $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$-finitely factorizing,

$$\mathrm{synt}(\mathcal{B}) = \sum_{\substack{\mathfrak{t} \in \mathrm{Free}(\mathfrak{R}) \\ \mathrm{s}(\mathfrak{t}) \in I \\ \mathrm{e}(\mathfrak{t}) \in T^*}} \mathrm{eval}_{\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})}(\mathfrak{t}).$$

**Proposition**

If $\mathfrak{R}(1)$ is $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$-finitely factorizing,

$$\mathrm{Supp}(\mathrm{synt}(\mathcal{B})) = \mathrm{L}(\mathcal{B}).$$

If $\mathcal{B}$ is unambiguous, each element generated by $\mathcal{B}$ admits exactly one treelike expression.