Grammaires d’opérades colorées

Samuele Giraudo
LIGM, Université Paris-Est Marne-la-Vallée

Séminaire Quantique
Institut de Recherche Mathématique Avancée de Strasbourg

22 février 2016

Plan

Plan

Plan

Règles de production sur les mots

Soit A un alphabet fini partionné en deux parts :

- V, un ensemble de variables ;
- T, un ensemble de symboles terminaux.

Règles de production sur les mots

Soit A un alphabet fini partionné en deux parts :

- V, un ensemble de variables ;
- T, un ensemble de symboles terminaux.

Une règle de production est un couple $(\mathbf{x}, u)$ de $V \times A^*$.

Règles de production sur les mots

Soit A un alphabet fini partionné en deux parts :

- V, un ensemble de variables ;
- T, un ensemble de symboles terminaux.

Une règle de production est un couple $(\mathbf{x}, u)$ de $V \times A^*$.

Un ensemble P de règles de production permet de définir une règle de réécriture sur les mots de A^*. Si $v, w \in A^*$ et $(\mathbf{x}, u) \in P$,

$$v\mathbf{x}w \to vuw.$$

Règles de production sur les mots

Soit A un alphabet fini partionné en deux parts :

- V, un ensemble de variables ;
- T, un ensemble de symboles terminaux.

Une règle de production est un couple $(\mathbf{x}, u)$ de $V \times A^*$.

Un ensemble P de règles de production permet de définir une règle de réécriture sur les mots de A^*. Si $v, w \in A^*$ et $(\mathbf{x}, u) \in P$,

$$v\mathbf{x}w \to vuw.$$

La clôture réflexive et transitive de $\to$ est la relation de dérivation.

Règles de production sur les mots

Soit A un alphabet fini partionné en deux parts :

- V, un ensemble de variables ;
- T, un ensemble de symboles terminaux.

Une règle de production est un couple $(\mathbf{x}, u)$ de $V \times A^*$.

Un ensemble P de règles de production permet de définir une règle de réécriture sur les mots de A^*. Si $v, w \in A^*$ et $(\mathbf{x}, u) \in P$,

$$v\mathbf{x}w \to vuw.$$

La clôture réflexive et transitive de $\to$ est la relation de dérivation.

Exemple

Soient $V := \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$, $T := \{a, b, c\}$ et $P := \{(\mathbf{x}, b), (\mathbf{x}, \mathbf{x}a\mathbf{y}), (\mathbf{y}, ac)\}$.
Comme

$$b\mathbf{xx} \to b\mathbf{x}a\mathbf{yx} \to bba\mathbf{yx} \to bbaac\mathbf{x},$$

le mot $bbaac\mathbf{x}$ est dérivable depuis $b\mathbf{xx}$.

Grammaires non contextuelles

Une grammaire non contextuelle G est un quadruplet $(V, T, P, \mathbf{s})$ t. q.

- V est un ensemble fini de variables ;
- T est un ensemble fini de symboles terminaux ;
- P est un ensemble fini de règles de production ;
- $\mathbf{s}$ est la variable de départ.

Grammaires non contextuelles

Une grammaire non contextuelle G est un quadruplet $(V, T, P, \mathbf{s})$ t. q.

- V est un ensemble fini de variables ;
- T est un ensemble fini de symboles terminaux ;
- P est un ensemble fini de règles de production ;
- $\mathbf{s}$ est la variable de départ.

Un mot $u \in (V \sqcup T)^*$ est engendré par G si

$$\mathbf{s} \to \cdots \to u$$

et u n'a aucune occurrence de variable.

Grammaires non contextuelles

Une grammaire non contextuelle G est un quadruplet $(V, T, P, \mathbf{s})$ t. q.

- V est un ensemble fini de variables ;
- T est un ensemble fini de symboles terminaux ;
- P est un ensemble fini de règles de production ;
- $\mathbf{s}$ est la variable de départ.

Un mot $u \in (V \sqcup T)^*$ est engendré par G si

$$\mathbf{s} \to \cdots \to u$$

et u n'a aucune occurrence de variable.

Exemple

Soit G la grammaire non contextuelle où $V := \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$, $T := \{a, b, c\}$, $P := \{(\mathbf{x}, b), (\mathbf{x}, \mathbf{x}a\mathbf{y}), (\mathbf{y}, ac)\}$ et $\mathbf{s} := \mathbf{x}$. Comme

$$\mathbf{x} \to \mathbf{x}a\mathbf{y} \to ba\mathbf{y} \to baac,$$

let mot $baac$ est engendré par G.

Plan

A-arbres

Soit A un alphabet fini gradué partitionné en deux parts :

- V, un ensemble de variables, où $|\mathbf{x}| = 0$ pour tout $\mathbf{x} \in V$;
- T, un ensemble de symboles terminaux, où $|a| \in \mathbb{N}$ pour tout $a \in T$.

A-arbres

Soit A un alphabet fini gradué partitionné en deux parts :

- V, un ensemble de variables, où $|\mathbf{x}| = 0$ pour tout $\mathbf{x} \in V$;
- T, un ensemble de symboles terminaux, où $|a| \in \mathbb{N}$ pour tout $a \in T$.

Un A-arbre est un arbre plan enraciné dont les nœuds internes sont étiquetés sur T et les feuilles sur A, en respectant les arités des lettres.

A-arbres

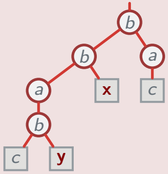
Soit A un alphabet fini gradué partitionné en deux parts :

- V, un ensemble de variables, où $|\mathbf{x}| = 0$ pour tout $\mathbf{x} \in V$;
- T, un ensemble de symboles terminaux, où $|a| \in \mathbb{N}$ pour tout $a \in T$.

Un A-arbre est un arbre plan enraciné dont les nœuds internes sont étiquetés sur T et les feuilles sur A, en respectant les arités des lettres.

Exemple

Soient $V := \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$ et $T := \{a, b, c\}$ où $|a| := 1$, $|b| := 2$ et $|c| := 0$.
L'arbre plan enraciné



est un A-arbre.

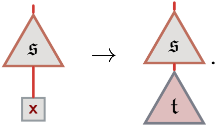
Règles de production sur les arbres

Une règle de production est un couple $(\mathbf{x}, \mathfrak{t})$ de $V \times A^*$, où A^* est l'ensemble des A-arbres.

Règles de production sur les arbres

Une règle de production est un couple $(\mathbf{x}, \mathfrak{t})$ de $V \times A^*$, où A^* est l'ensemble des A-arbres.

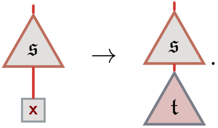
Un ensemble P de règles de production permet de définir une règle de réécriture sur les A-arbres. Si $\mathfrak{s}$ est un A-arbre avec une feuille etiquetée par $\mathbf{x}$ et $(\mathbf{x}, \mathfrak{t}) \in P$,



Règles de production sur les arbres

Une règle de production est un couple $(\mathbf{x}, \mathfrak{t})$ de $V \times A^*$, où A^* est l'ensemble des A-arbres.

Un ensemble P de règles de production permet de définir une règle de réécriture sur les A-arbres. Si $\mathfrak{s}$ est un A-arbre avec une feuille etiquetée par $\mathbf{x}$ et $(\mathbf{x}, \mathfrak{t}) \in P$,



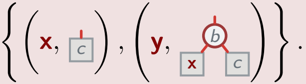
La clôture réflexive et transitive de $\rightarrow$ est la relation de dérivation.

Règles de production sur les arbres

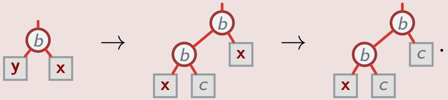
Exemple

Soient $V := \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$, $T := \{a, b, c\}$ où $|a| := 1$, $|b| := 2$ et $|c| := 0$, et

$P :=$



Il y a les dérivations



Grammaires d'arbres régulières

Une grammaire d'arbres régulière G est un quadruplet $(V, T, P, \mathbf{s})$ t. q.

- V est un ensemble fini gradué de variables ;
- T est un ensemble fini gradué de symboles terminaux ;
- P est un ensemble de règles de production ;
- $\mathbf{s}$ est la variable de départ.

Grammaires d'arbres régulières

Une grammaire d'arbres régulière G est un quadruplet $(V, T, P, \mathbf{s})$ t. q.

- V est un ensemble fini gradué de variables ;
- T est un ensemble fini gradué de symboles terminaux ;
- P est un ensemble de règles de production ;
- $\mathbf{s}$ est la variable de départ.

Un A-arbre $\mathfrak{t}$ est engendré par G si

$$\boxed{\mathbf{s}} \to \cdots \to \mathfrak{t}$$

et toutes les feuilles de $\mathfrak{t}$ sont étiquetées sur T.

Grammaires d'arbres régulières

Une grammaire d'arbres régulière G est un quadruplet $(V, T, P, \mathbf{s})$ t. q.

- V est un ensemble fini gradué de variables ;
- T est un ensemble fini gradué de symboles terminaux ;
- P est un ensemble de règles de production ;
- $\mathbf{s}$ est la variable de départ.

Un A-arbre $\mathfrak{t}$ est engendré par G si

$$\boxed{\mathbf{s}} \rightarrow \cdots \rightarrow \mathfrak{t}$$

et toutes les feuilles de $\mathfrak{t}$ sont étiquetées sur T.

Exemple

Soit G la grammaire d'arbres régulière telle que $V := \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$, $T := \{a, b, c\}$ où $|a| := 2$, $|b| := 1$ et $|c| := 0$,

$$P := \left\{ \left(\mathbf{x}, c\right), \left(\mathbf{x}, a(\boxed{\mathbf{y}}, \boxed{\mathbf{y}})\right), \left(\mathbf{y}, c\right), \left(\mathbf{y}, b(\boxed{\mathbf{x}})\right) \right\}$$

et $\mathbf{s} := \mathbf{x}$. Elle engendre les arbres binaires unaires avec une racine unaire.

Plan

Idées générales

Objectifs

Développer des grammaires permettant d'engendrer des objets combinatoires comme

- des mots ;
- différentes espèces d'arbres ;
- des compositions d'entiers ;
- différentes espèces de chemins ;
- *etc.*

Pour cela,

- nous nous appuyons sur la théorie des opérades colorées ;
- nous utilisons une notion de séries formelles sur les opérades colorées.

Plan

Plan

Opérades colorées

Une opérade colorée est un sextuplet $(\mathcal{C}, \mathscr{C}, \mathrm{e}, \mathrm{s}, \circ_i, \mathbf{1}_c)$ où

1. $\mathcal{C}$ est un ensemble gradué $\mathcal{C} := \sqcup_{n \geqslant 1} \mathcal{C}(n)$ où chaque $\mathcal{C}(n)$ est fini ;

Opérades colorées

Une opérade colorée est un sextuplet $(\mathcal{C}, \mathscr{C}, \mathrm{e}, \mathrm{s}, \circ_i, \mathbf{1}_c)$ où

1. $\mathcal{C}$ est un ensemble gradué $\mathcal{C} := \sqcup_{n \geqslant 1} \mathcal{C}(n)$ où chaque $\mathcal{C}(n)$ est fini ;
2. $\mathscr{C}$ est un ensemble fini de couleurs ;

Opérades colorées

Une opérade colorée est un sextuplet $(\mathcal{C}, \mathscr{C}, \mathrm{e}, \mathrm{s}, \circ_i, \mathbf{1}_c)$ où

1. $\mathcal{C}$ est un ensemble gradué $\mathcal{C} := \sqcup_{n \geqslant 1} \mathcal{C}(n)$ où chaque $\mathcal{C}(n)$ est fini ;
2. $\mathscr{C}$ est un ensemble fini de couleurs ;
3. s est une application de couleur de sortie $\mathrm{s} : \mathcal{C} \to \mathscr{C}$;

Opérades colorées

Une opérade colorée est un sextuplet $(\mathcal{C}, \mathscr{C}, \mathrm{e}, \mathrm{s}, \circ_i, \mathbf{1}_c)$ où

1. $\mathcal{C}$ est un ensemble gradué $\mathcal{C} := \sqcup_{n \geqslant 1} \mathcal{C}(n)$ où chaque $\mathcal{C}(n)$ est fini ;
2. $\mathscr{C}$ est un ensemble fini de couleurs ;
3. s est une application de couleur de sortie $\mathrm{s} : \mathcal{C} \to \mathscr{C}$;
4. e est une application de couleurs d'entrée $\mathrm{e} : \mathcal{C}(n) \to \mathscr{C}^n$;

Opérades colorées

Une opérade colorée est un sextuplet $(\mathcal{C}, \mathscr{C}, \mathrm{e}, \mathrm{s}, \circ_i, \mathbf{1}_c)$ où

1. $\mathcal{C}$ est un ensemble gradué $\mathcal{C} := \sqcup_{n \geqslant 1} \mathcal{C}(n)$ où chaque $\mathcal{C}(n)$ est fini ;
2. $\mathscr{C}$ est un ensemble fini de couleurs ;
3. s est une application de couleur de sortie $\mathrm{s} : \mathcal{C} \to \mathscr{C}$;
4. e est une application de couleurs d'entrée $\mathrm{e} : \mathcal{C}(n) \to \mathscr{C}^n$;
5. $\circ_i$ est une application de composition partielle

$$\circ_i : \mathcal{C}(n) \times \mathcal{C}(m) \to \mathcal{C}(n + m - 1), \qquad i \in [n],$$

ou $x \circ_i y$ est défini ssi $\mathrm{s}(y) = \mathrm{e}_i(x)$;

Opérades colorées

Une opérade colorée est un sextuplet $(\mathcal{C}, \mathscr{C}, \mathrm{e}, \mathrm{s}, \circ_i, \mathbf{1}_c)$ où

1. $\mathcal{C}$ est un ensemble gradué $\mathcal{C} := \sqcup_{n \geqslant 1} \mathcal{C}(n)$ où chaque $\mathcal{C}(n)$ est fini ;
2. $\mathscr{C}$ est un ensemble fini de couleurs ;
3. s est une application de couleur de sortie $\mathrm{s} : \mathcal{C} \to \mathscr{C}$;
4. e est une application de couleurs d'entrée $\mathrm{e} : \mathcal{C}(n) \to \mathscr{C}^n$;
5. $\circ_i$ est une application de composition partielle

   $$\circ_i : \mathcal{C}(n) \times \mathcal{C}(m) \to \mathcal{C}(n + m - 1), \qquad i \in [n],$$

   ou $x \circ_i y$ est défini ssi $\mathrm{s}(y) = \mathrm{e}_i(x)$;
6. $\mathbf{1}_c$ est l'unité de couleur $c \in \mathscr{C}$ et vérifie $\mathrm{e}(\mathbf{1}_c) = c = \mathrm{s}(\mathbf{1}_c)$.

Opérades colorées

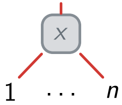
Une opérade colorée est un sextuplet $(\mathcal{C}, \mathscr{C}, \mathrm{e}, \mathrm{s}, \circ_i, \mathbf{1}_c)$ où

1. $\mathcal{C}$ est un ensemble gradué $\mathcal{C} := \sqcup_{n \geqslant 1} \mathcal{C}(n)$ où chaque $\mathcal{C}(n)$ est fini ;
2. $\mathscr{C}$ est un ensemble fini de couleurs ;
3. s est une application de couleur de sortie $\mathrm{s} : \mathcal{C} \to \mathscr{C}$;
4. e est une application de couleurs d'entrée $\mathrm{e} : \mathcal{C}(n) \to \mathscr{C}^n$;
5. $\circ_i$ est une application de composition partielle
$$\circ_i : \mathcal{C}(n) \times \mathcal{C}(m) \to \mathcal{C}(n + m - 1), \qquad i \in [n],$$
ou $x \circ_i y$ est défini ssi $\mathrm{s}(y) = \mathrm{e}_i(x)$;
6. $\mathbf{1}_c$ est l'unité de couleur $c \in \mathscr{C}$ et vérifie $\mathrm{e}(\mathbf{1}_c) = c = \mathrm{s}(\mathbf{1}_c)$.

La composition partielle $\circ_i$ vérifie des relations.

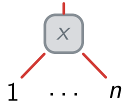
Opérades colorées

Un élément x d'arité n d'une opérade colorée $\mathcal{C}$ peut être vu comme un opérateur abstrait d'arité n dont les entrées et la sortie sont coloriées par des couleurs de $\mathscr{C}$:

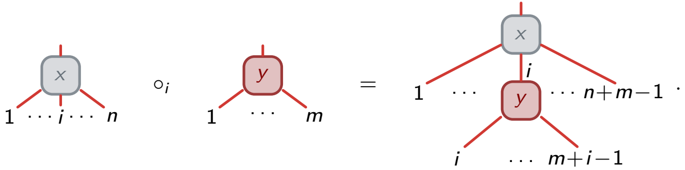


Opérades colorées

Un élément x d'arité n d'une opérade colorée $\mathcal{C}$ peut être vu comme un opérateur abstrait d'arité n dont les entrées et la sortie sont coloriées par des couleurs de $\mathscr{C}$:



La composition partielle de deux éléments x et y de $\mathcal{C}$ peut être vue comme une composition d'opérateurs :



Opérades à bourgeons

Soient $\mathcal{O}$ une opérade non colorée et $\mathscr{C}$ un ensemble fini.

L'opérade à bourgeons de $\mathcal{O}$ est l'opérade colorée $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$ définie par

$$\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})(n) := \mathscr{C} \times \mathcal{O}(n) \times \mathscr{C}^n, \qquad n \geqslant 1,$$

Opérades à bourgeons

Soient $\mathcal{O}$ une opérade non colorée et $\mathscr{C}$ un ensemble fini.

L'opérade à bourgeons de $\mathcal{O}$ est l'opérade colorée $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$ définie par

$$\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})(n) := \mathscr{C} \times \mathcal{O}(n) \times \mathscr{C}^n, \qquad n \geqslant 1,$$

dans laquelle

$$\mathrm{s}((a, x, u)) := a,$$

$$\mathrm{e}((a, x, u)) := u$$

et

$$(a, x, u) \circ_i (b, y, v) := (a, x \circ_i y, u \hookleftarrow_i v),$$

où $u \hookleftarrow_i v$ est le mot obtenu en remplaçant la i^{e} lettre de u par v.

Opérades à bourgeons

Soient $\mathcal{O}$ une opérade non colorée et $\mathscr{C}$ un ensemble fini.

L'opérade à bourgeons de $\mathcal{O}$ est l'opérade colorée $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$ définie par

$$\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})(n) := \mathscr{C} \times \mathcal{O}(n) \times \mathscr{C}^n, \qquad n \geqslant 1,$$

dans laquelle

$$\mathrm{s}((a, x, u)) := a,$$

$$\mathrm{e}((a, x, u)) := u$$

et

$$(a, x, u) \circ_i (b, y, v) := (a, x \circ_i y, u \hookleftarrow_i v),$$

où $u \hookleftarrow_i v$ est le mot obtenu en remplaçant la i^{e} lettre de u par v.

Proposition

La construction $\mathcal{O} \mapsto \mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$ est un foncteur de la catégorie des opérades non colorées vers la catégorie des opérades $\mathscr{C}$-colorées.

L'opérade à bourgeons de l'opérade associative

L'opérade associative As est définie par

- $\mathsf{As}(n) := \{\star_n\}, n \geqslant 1$;
- $\star_n \circ_i \star_m := \star_{n+m-1}$.

L'opérade à bourgeons de l'opérade associative

L'opérade associative As est définie par

- $\mathrm{As}(n) := \{\star_n\}, n \geqslant 1$;
- $\star_n \circ_i \star_m := \star_{n+m-1}$.

Pour tout ensemble $\mathscr{C}$ de couleurs,

$$\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathrm{As}) = \bigsqcup_{n \geqslant 1} \{(a, \star_n, u_1 \dots u_n) : a, u_1, \dots, u_n \in \mathscr{C}\}.$$

L'opérade à bourgeons de l'opérade associative

L'opérade associative As est définie par

- $\mathrm{As}(n) := \{\star_n\}, n \geqslant 1$;
- $\star_n \circ_i \star_m := \star_{n+m-1}$.

Pour tout ensemble $\mathscr{C}$ de couleurs,

$$\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathrm{As}) = \bigsqcup_{n \geqslant 1} \{(a, \star_n, u_1 \dots u_n) : a, u_1, \dots, u_n \in \mathscr{C}\}.$$

Exemple

Dans $\mathrm{B}_{\{1,2,3\}}(\mathrm{As})$,

$$(2, \star_4, 3112) \circ_2 (1, \star_3, 233) = (2, \star_6, 323312).$$

L'opérade des chemins de Motzkin

L'opérade des chemins de Motzkin Motz est définie par

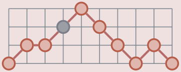
- $\mathsf{Motz}(n)$ est l'ensemble des chemins de Motzkin à $n - 1$ pas ;
- la composition partielle $x \circ_i y$ de deux chemins de Motzkin revient à remplacer le i^{e} point de x par y.

L'opérade des chemins de Motzkin

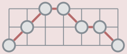
L'opérade des chemins de Motzkin Motz est définie par

- $\mathsf{Motz}(n)$ est l'ensemble des chemins de Motzkin à $n - 1$ pas ;
- la composition partielle $x \circ_i y$ de deux chemins de Motzkin revient à remplacer le i^{e} point de x par y.

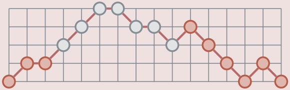
Exemple



$\circ_4$



$=$

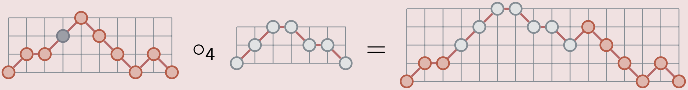


L'opérade des chemins de Motzkin

L'opérade des chemins de Motzkin Motz est définie par

- $\mathrm{Motz}(n)$ est l'ensemble des chemins de Motzkin à $n-1$ pas ;
- la composition partielle $x \circ_i y$ de deux chemins de Motzkin revient à remplacer le i^{e} point de x par y.

Exemple



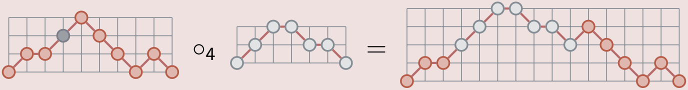
Pour tout ensemble $\mathscr{C}$ de couleurs, un élément de $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathrm{Motz})$ possède une couleur pour chacun de ses points et une couleur de sortie.

L'opérade des chemins de Motzkin

L'opérade des chemins de Motzkin Motz est définie par

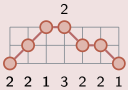
- $\mathrm{Motz}(n)$ est l'ensemble des chemins de Motzkin à $n-1$ pas ;
- la composition partielle $x \circ_i y$ de deux chemins de Motzkin revient à remplacer le i^{e} point de x par y.

Exemple



Pour tout ensemble $\mathscr{C}$ de couleurs, un élément de $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathrm{Motz})$ possède une couleur pour chacun de ses points et une couleur de sortie.

Exemple



est un élémet de $\mathrm{B}_{\{1,2,3\}}(\mathrm{Motz})$ avec 2 comme couleur de sortie et 2213221 comme couleurs d'entrée.

Plan

Systèmes de génération à bourgeons

Un système de génération à bourgeons $\mathcal{B}$ est un quintuplet $(\mathcal{O}, \mathscr{C}, \mathfrak{R}, I, T)$ où

- $\mathcal{O}$ est une opérade non colorée ;
- $\mathscr{C}$ est un ensemble fini de couleurs ;
- $\mathfrak{R}$ est un sous-ensemble fini de $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$ de règles de production ;
- I est un sous-ensemble de couleurs initiales de $\mathscr{C}$;
- T est un sous-ensemble de couleurs finales de $\mathscr{C}$.

Règles de production

Une règle de production est un élément de $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$.

Règles de production

Une règle de production est un élément de $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$.

Un ensemble $\mathfrak{R}$ de règles de production permet de définir une règle de réécriture sur $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$. Pour tous $x_1, x_2 \in \mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$, on pose

$$x_1 \to x_2$$

à condition qu'il existe $i \in \mathbb{N}$ et $r \in \mathfrak{R}$ tels que

$$x_2 = x_1 \circ_i r.$$

Règles de production

Une règle de production est un élément de $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$.

Un ensemble $\mathfrak{R}$ de règles de production permet de définir une règle de réécriture sur $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$. Pour tous $x_1, x_2 \in \mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$, on pose

$$x_1 \to x_2$$

à condition qu'il existe $i \in \mathbb{N}$ et $r \in \mathfrak{R}$ tels que

$$x_2 = x_1 \circ_i r.$$

La clôture réflexive et transitive de $\to$ est la relation de dérivation.

Éléments engendrés

Un élément $x \in \mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$ est engendré par $\mathcal{B}$ si

$$\mathbf{1}_c \to \cdots \to x$$

où $c \in I$ et toutes les couleurs de $\mathrm{e}(x)$ sont dans T.

Éléments engendrés

Un élément $x \in \mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$ est engendré par $\mathcal{B}$ si

$$\mathbf{1}_c \to \cdots \to x$$

où $c \in I$ et toutes les couleurs de $\mathrm{e}(x)$ sont dans T.

Ainsi, x est engendré par $\mathcal{B}$ ssi il existe $c \in \mathscr{C}$, $r_1, \ldots, r_k \in \mathfrak{R}$ et $i_2, \ldots, i_k \in \mathbb{N}$ tels que

$$x = (\ldots((\mathbf{1}_c \circ_1 r_1) \circ_{i_2} r_2) \ldots) \circ_{i_k} r_k$$

et $\mathrm{e}(x) \in T^*$.

Éléments engendrés

Un élément $x \in \mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$ est engendré par $\mathcal{B}$ si

$$\mathbf{1}_c \to \cdots \to x$$

où $c \in I$ et toutes les couleurs de $\mathrm{e}(x)$ sont dans T.

Ainsi, x est engendré par $\mathcal{B}$ ssi il existe $c \in \mathscr{C}$, $r_1, \ldots, r_k \in \mathfrak{R}$ et $i_2, \ldots, i_k \in \mathbb{N}$ tels que

$$x = (\ldots((\mathbf{1}_c \circ_1 r_1) \circ_{i_2} r_2) \ldots) \circ_{i_k} r_k$$

et $\mathrm{e}(x) \in T^*$.

Le langage de $\mathcal{B}$ est l'ensemble $\mathrm{L}(\mathcal{B})$ des éléments engendrés par $\mathcal{B}$.

Chemins de Motzkin

Soit le système de génération à bourgeons
$\mathcal{B} := (\mathsf{Motz}, \{1, 2\}, \mathfrak{R}, \{1\}, \{1, 2\})$ où

$$\mathfrak{R} := \{(1,\ $$  $$,\ 22), (1,\ $$  $$,\ 111)\}.$$

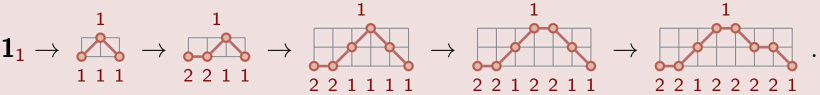
Chemins de Motzkin

Soit le système de génération à bourgeons
$\mathcal{B} := (\text{Motz}, \{1, 2\}, \mathfrak{R}, \{1\}, \{1, 2\})$ où

$\mathfrak{R} := \{(1,$  $, 22), (1,$  $, 111)\}.$

Exemple

Il y a dans $\mathcal{B}$ les dérivations



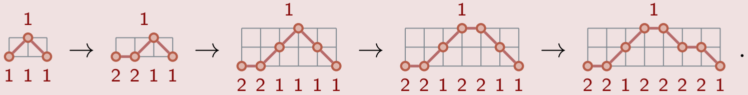
Chemins de Motzkin

Soit le système de génération à bourgeons
$\mathcal{B} := (\text{Motz}, \{1, 2\}, \mathfrak{R}, \{1\}, \{1, 2\})$ où

$\mathfrak{R} := \{(1,$  $, 22), (1,$  $, 111)\}.$

Exemple

Il y a dans $\mathcal{B}$ les dérivations

$\mathbf{1}_1 \to$ 

Proposition

$\mathrm{L}(\mathcal{B})$ est en bijection avec l'ensemble des chemins de Motzkin sans pas horizontaux consécutifs.

Ces chemins sont dénombrés par la suite **A104545** :

$$1, 1, 1, 3, 5, 11, 25, 55, 129, 303, 721, 1743.$$

Règles de production synchrones

Une règle de production synchrone est un élément de $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$.

Règles de production synchrones

Une règle de production synchrone est un élément de $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$.

Un ensemble $\mathfrak{R}$ de règles de production synchrones permet de définir une règle de réécriture sur on $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$. Pour tous $x_1, x_2 \in \mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$, on pose

$$x_1 \rightsquigarrow x_2$$

à condition qu'il existe $r_1, \dots, r_{|x_1|} \in \mathfrak{R}$ tels que

$$x_2 = x_1 \circ \left[r_1, \dots, r_{|x_1|} \right].$$

Règles de production synchrones

Une règle de production synchrone est un élément de $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$.

Un ensemble $\mathfrak{R}$ de règles de production synchrones permet de définir une règle de réécriture sur on $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$. Pour tous $x_1, x_2 \in \mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$, on pose

$$x_1 \rightsquigarrow x_2$$

à condition qu'il existe $r_1, \ldots, r_{|x_1|} \in \mathfrak{R}$ tels que

$$x_2 = x_1 \circ \left[r_1, \ldots, r_{|x_1|} \right].$$

La clôture réflexive et transitive de $\rightsquigarrow$ est la relation de dérivation synchrone.

Éléments engendrés de manière synchrone

Un élément $x \in \mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$ est engendré de manière synchrone par $\mathcal{B}$ si

$$\mathbf{1}_c \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow x$$

où $c \in I$ et toutes les couleurs de $\mathrm{e}(x)$ sont dans T.

Éléments engendrés de manière synchrone

Un élément $x \in \mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$ est engendré de manière synchrone par $\mathcal{B}$ si

$$\mathbf{1}_c \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow x$$

où $c \in I$ et toutes les couleurs de $\mathrm{e}(x)$ sont dans T.

Ainsi, x est engendré de manière synchrone par $\mathcal{B}$ ssi il existe $c \in \mathscr{C}$ et $r_{1,1}, r_{2,1}, \ldots, r_{2,j_2}, \ldots r_{k,1}, \ldots, r_{k,j_k} \in \mathfrak{R}$ tels que

$$x = (\ldots((\mathbf{1}_c \circ [r_{1,1}]) \circ [r_{2,1}, \ldots, r_{2,j_2}]) \ldots) \circ [r_{k,1}, \ldots, r_{k,j_k}]$$

et $\mathrm{e}(x) \in T^*$.

Éléments engendrés de manière synchrone

Un élément $x \in \mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$ est engendré de manière synchrone par $\mathcal{B}$ si

$$\mathbf{1}_c \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow x$$

où $c \in I$ et toutes les couleurs de $\mathrm{e}(x)$ sont dans T.

Ainsi, x est engendré de manière synchrone par $\mathcal{B}$ ssi il existe $c \in \mathscr{C}$ et $r_{1,1}, r_{2,1}, \dots, r_{2,j_2}, \dots r_{k,1}, \dots, r_{k,j_k} \in \mathfrak{R}$ tels que

$$x = (\dots((\mathbf{1}_c \circ [r_{1,1}]) \circ [r_{2,1}, \dots, r_{2,j_2}]) \dots) \circ [r_{k,1}, \dots, r_{k,j_k}]$$

et $\mathrm{e}(x) \in T^*$.

Le langage synchrone de $\mathcal{B}$ est l'ensemble $\mathrm{L}_{\mathrm{S}}(\mathcal{B})$ des éléments engendrés de manière synchrone par $\mathcal{B}$.

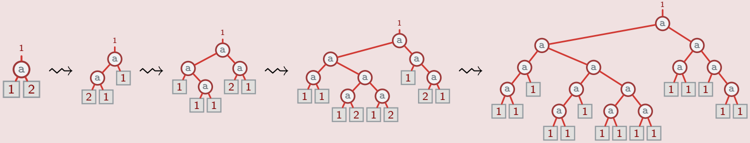
Arbres binaires équilibrés

Soit le système de génération à bourgeons
$\mathcal{B} := (\mathsf{Mag}, \{1, 2\}, \mathfrak{R}, \{1\}, \{1\})$ où $\mathsf{Mag} := \mathrm{Free}(\{\mathsf{a}\})$, $|\mathsf{a}| := 2$ et

$$\mathfrak{R} := \left\{ \left(1, \mathsf{a}, 11\right), \left(1, \mathsf{a}, 12\right), \left(1, \mathsf{a}, 21\right), (2, \mathbf{1}, 1) \right\}.$$

Exemple

Il y a dans $\mathcal{B}$ les dérivations

$\mathbf{1}_1 \rightsquigarrow$  .

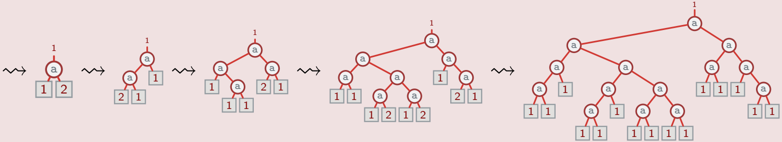
Arbres binaires équilibrés

Soit le système de génération à bourgeons
$\mathcal{B} := (\mathrm{Mag}, \{1, 2\}, \mathfrak{R}, \{1\}, \{1\})$ où $\mathrm{Mag} := \mathrm{Free}(\{\mathsf{a}\})$, $|\mathsf{a}| := 2$ et

$\mathfrak{R} := \Big\{ \Big(1,$  $, 11\Big), \Big(1,$  $, 12\Big), \Big(1,$  $, 21\Big), (2, \mathbf{1}, 1) \Big\}.$

Exemple

Il y a dans $\mathcal{B}$ les dérivations

$\mathbf{1}_1 \rightsquigarrow$  .

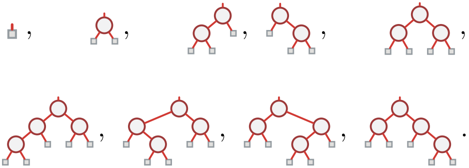
Proposition

$\mathrm{L_S}(\mathcal{B})$ est en bijection avec l'ensemble des arbres binaires équilibrés.

Arbres binaires équilibrés

Un arbre binaire équilibré est un arbre binaire $\mathfrak{t}$ tel que, pour tout nœud interne x de $\mathfrak{t}$, la hauteur du sous-arbre gauche et du sous-arbre droit de $\mathfrak{t}$ diffèrent d'au plus 1.

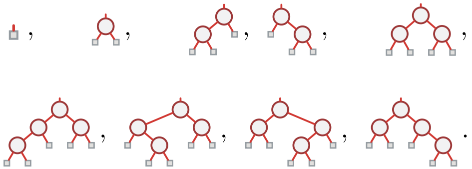
Les premiers arbres binaires équilibrés sont



Arbres binaires équilibrés

Un arbre binaire équilibré est un arbre binaire $\mathfrak{t}$ tel que, pour tout nœud interne x de $\mathfrak{t}$, la hauteur du sous-arbre gauche et du sous-arbre droit de $\mathfrak{t}$ diffèrent d'au plus 1.

Les premiers arbres binaires équilibrés sont



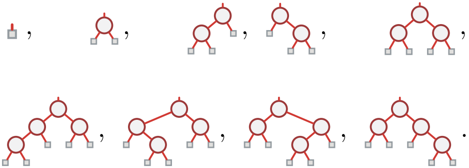
Ces arbres sont dénombrés par la suite **A006265** :

$$1, 1, 2, 1, 4, 6, 4, 17, 32, 44, 60, 70.$$

Arbres binaires équilibrés

Un arbre binaire équilibré est un arbre binaire $\mathfrak{t}$ tel que, pour tout nœud interne x de $\mathfrak{t}$, la hauteur du sous-arbre gauche et du sous-arbre droit de $\mathfrak{t}$ diffèrent d'au plus 1.

Les premiers arbres binaires équilibrés sont



Ces arbres sont dénombrés par la suite **A006265** :

$$1, 1, 2, 1, 4, 6, 4, 17, 32, 44, 60, 70.$$

Leur série génératrice est $F(x, 0)$ où

$$F(x, y) = x + F(x^2 + 2xy, x).$$

Plan

Proposition

Si $\mathcal{B} := (\mathcal{O}, \mathscr{C}, \mathfrak{R}, I, T)$ est un système de génération à bourgeons,

$$\mathrm{L}(\mathcal{B}) = \{x \in \mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O}) : x \in \mathcal{C}, \mathrm{s}(x) \in I, \mathrm{e}(x) \in T^*\},$$

où $\mathcal{C}$ est la sous-opérade colorée de $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$ engendrée par $\mathfrak{R}$.

Langages

Proposition

Si $\mathcal{B} := (\mathcal{O}, \mathscr{C}, \mathfrak{R}, I, T)$ est un système de génération à bourgeons,

$$\mathrm{L}(\mathcal{B}) = \{x \in \mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O}) : x \in \mathcal{C}, \mathrm{s}(x) \in I, \mathrm{e}(x) \in T^*\},$$

où $\mathcal{C}$ est la sous-opérade colorée de $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$ engendrée par $\mathfrak{R}$.

Proposition

Si $\mathcal{B}$ est un système de génération à bourgeons, $\mathrm{L}_{\mathrm{S}}(\mathcal{B}) \subseteq \mathrm{L}(\mathcal{B})$.

Émulation des grammaires non contextuelles

Soit $G := (V, T, P, \mathbf{s})$ une grammaire non contextuelle propre, c.-à-d., telle que pour tout $(\mathbf{x}, u) \in P$, $|u| \geqslant 1$.

Émulation des grammaires non contextuelles

Soit $G := (V, T, P, \mathbf{s})$ une grammaire non contextuelle propre, c.-à-d., telle que pour tout $(\mathbf{x}, u) \in P$, $|u| \geqslant 1$.

Soit le système de génération à bourgeons

$$\mathcal{B} := (\mathsf{As}, V \sqcup T, \mathfrak{R}, \{\mathbf{s}\}, T)$$

où

$$\mathfrak{R} := \left\{ \left(\mathbf{x}, \star_{|u|}, u\right) : (\mathbf{x}, u) \in P \right\}.$$

Émulation des grammaires non contextuelles

Soit $G := (V, T, P, \mathbf{s})$ une grammaire non contextuelle propre, c.-à-d., telle que pour tout $(\mathbf{x}, u) \in P$, $|u| \geqslant 1$.

Soit le système de génération à bourgeons

$$\mathcal{B} := (\mathrm{As}, V \sqcup T, \mathfrak{R}, \{\mathbf{s}\}, T)$$

où

$$\mathfrak{R} := \left\{ \left(\mathbf{x}, \star_{|u|}, u\right) : (\mathbf{x}, u) \in P \right\}.$$

Proposition

L'application $\mathrm{e} : \mathrm{L}(\mathcal{B}) \to W$, où W est l'ensemble des mots engendrés par G, est une bijection.

Ainsi, toute grammaire non contextuelle propre peut être émulée par un système de génération à bourgeons reposant sur l'opérade associative.

Émulation des grammaires non contextuelles

Exemple

Soit $G := (\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}, \{a, b\}, P, \mathbf{x})$ une grammaire non contextuelle propre où

$$P := \{(\mathbf{x}, a), (\mathbf{x}, b\mathbf{y}), (\mathbf{y}, b), (\mathbf{y}, \mathbf{xy})\}.$$

Le système de génération à bourgeons
$\mathcal{B} := (\mathsf{As}, \{\mathbf{x}, \mathbf{y}, a, b\}, \mathfrak{R}, \{\mathbf{x}\}, \{a, b\})$ où

$$\mathfrak{R} := \{(\mathbf{x}, \star_1, a), (\mathbf{x}, \star_2, b\mathbf{y}), (\mathbf{y}, \star_1, b), (\mathbf{y}, \star_2, \mathbf{xy})\}$$

émule G.

Émulation des grammaires non contextuelles

Exemple

La suite de dérivations

$$\mathbf{x} \to b\mathbf{y} \to b\mathbf{xy} \to bb\mathbf{yy} \to bbb\mathbf{y} \to bbb\mathbf{xy} \to bbba\mathbf{y} \to bbbab$$

dans G donne lieu à la suite de dérivations

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_{\mathbf{x}} &\to (\mathbf{x}, \star_2, b\mathbf{y}) \to (\mathbf{x}, \star_3, b\mathbf{xy}) \to (\mathbf{x}, \star_4, bb\mathbf{yy}) \to (\mathbf{x}, \star_4, bbb\mathbf{y}) \\ &\to (\mathbf{x}, \star_5, bbb\mathbf{xy}) \to (\mathbf{x}, \star_5, bbba\mathbf{y}) \to (\mathbf{x}, \star_5, bbbab) \end{aligned}$$

dans $\mathcal{B}$.

Émulation des grammaires d'arbres régulières

Soit $G := (V, T, P, \mathbf{s})$ une grammaire d'arbres régulière.

Soit le système de génération à bourgeons

$$\mathcal{B} := (\mathrm{Free}(T \setminus T(0)), V \sqcup T(0), \mathfrak{R}, \{\mathbf{s}\}, T(0))$$

où

$$\mathfrak{R} := \{(\mathbf{x}, \mathfrak{t}, u) : (\mathbf{x}, \mathfrak{t}_u) \in P\},$$

où $\mathfrak{t}_u$ est le $V \sqcup T$-arbre obtenu en étiquetant les feuilles de $\mathfrak{t}$ par u.

Émulation des grammaires d'arbres régulières

Soit $G := (V, T, P, \mathbf{s})$ une grammaire d'arbres régulière.

Soit le système de génération à bourgeons

$$\mathcal{B} := (\mathrm{Free}(T \setminus T(0)), V \sqcup T(0), \mathfrak{R}, \{\mathbf{s}\}, T(0))$$

où

$$\mathfrak{R} := \{(\mathbf{x}, \mathfrak{t}, u) : (\mathbf{x}, \mathfrak{t}_u) \in P\},$$

où $\mathfrak{t}_u$ est le $V \sqcup T$-arbre obtenu en étiquetant les feuilles de $\mathfrak{t}$ par u.

Proposition

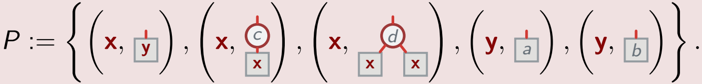
L'application $\phi : \mathrm{L}(\mathcal{B}) \to W$ définie par $\phi((\mathbf{x}, \mathfrak{t}, u)) := \mathfrak{t}_u$, où W est l'ensemble des $V \sqcup T$-arbres engendrés par G, est une bijection.

Ainsi, toute grammaire d'arbres régulière propre peut être émulée par un système de génération à bourgeons reposant sur une opérade libre.

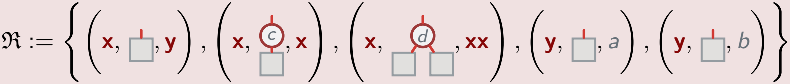
Émulation des grammaires d'arbres régulières

Exemple

Soit $G := (\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}, \{a, b, c, d\}, P, \mathbf{x})$ la grammaire d'arbres régulière où $|a| := 0$, $|b| := 0$, $|c| := 1$, $|d| := 2$ et



Le système de génération à bourgeons $\mathcal{B} := (\mathrm{Free}(\{c, d\}, \{\mathbf{x}, \mathbf{y}, a, b\}, \mathfrak{R}, \{\mathbf{x}\}, \{a, b\}))$ où

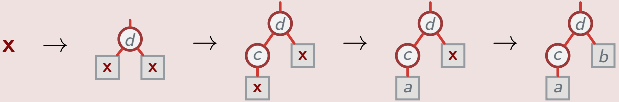


émule G.

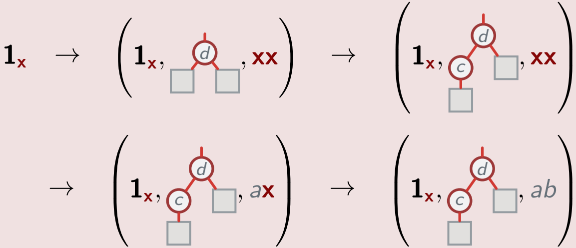
Émulation des grammaires d'arbres régulières

Exemple

La suite de dérivations



dans G donne lieu à la suite de dérivations



dans $\mathcal{B}$.

Plan

Plan

Séries sur les opérades colorées

Soient $\mathcal{C}$ une opérade colorée et $\mathbb{K}$ un corps ($\mathbb{K} := \mathbb{Q}(q_0, q_1, \dots)$).

Une série sur $\mathcal{C}$ est une application

$$\mathbf{f} : \mathcal{C} \to \mathbb{K}.$$

L'ensemble de ces séries est noté $\mathbb{K}\langle\langle\mathcal{C}\rangle\rangle$.

Séries sur les opérades colorées

Soient $\mathcal{C}$ une opérade colorée et $\mathbb{K}$ un corps ($\mathbb{K} := \mathbb{Q}(q_0, q_1, \dots)$).

Une série sur $\mathcal{C}$ est une application

$$\mathbf{f} : \mathcal{C} \to \mathbb{K}.$$

L'ensemble de ces séries est noté $\mathbb{K}\left\langle\left\langle \mathcal{C} \right\rangle\right\rangle$.

Le coefficient $\mathbf{f}(x)$ de $x \in \mathcal{C}$ dans $\mathbf{f}$ est noté $\langle x, \mathbf{f} \rangle$.

Séries sur les opérades colorées

Soient $\mathcal{C}$ une opérade colorée et $\mathbb{K}$ un corps ($\mathbb{K} := \mathbb{Q}(q_0, q_1, \ldots)$).

Une série sur $\mathcal{C}$ est une application

$$\mathbf{f} : \mathcal{C} \to \mathbb{K}.$$

L'ensemble de ces séries est noté $\mathbb{K} \langle\langle \mathcal{C} \rangle\rangle$.

Le coefficient $\mathbf{f}(x)$ de $x \in \mathcal{C}$ dans $\mathbf{f}$ est noté $\langle x, \mathbf{f} \rangle$.

Le support de $\mathbf{f}$ est l'ensemble

$$\operatorname{Supp}(\mathbf{f}) := \{x \in \mathcal{C} : \langle x, \mathbf{f} \rangle \neq 0\}.$$

Séries sur les opérades colorées

L'ensemble $\mathbb{K}\left\langle\left\langle\mathcal{C}\right\rangle\right\rangle$, muni de l'addition point par point et de la multiplication par un scalaire, forme un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Séries sur les opérades colorées

L'ensemble $\mathbb{K}\langle\langle\mathcal{C}\rangle\rangle$, muni de l'addition point par point et de la multiplication par un scalaire, forme un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

La notation étendue d'une série $\mathbf{f}$ sur $\mathcal{C}$ est

$$\mathbf{f} = \sum_{x \in \mathcal{C}} \langle x, \mathbf{f} \rangle \, x.$$

Séries sur les opérades colorées

L'ensemble $\mathbb{K}\langle\langle\mathcal{C}\rangle\rangle$, muni de l'addition point par point et de la multiplication par un scalaire, forme un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

La notation étendue d'une série $\mathbf{f}$ sur $\mathcal{C}$ est

$$\mathbf{f} = \sum_{x \in \mathcal{C}} \langle x, \mathbf{f} \rangle \, x.$$

La série des unités colorées est

$$\mathbf{u} := \sum_{c \in \mathscr{C}} \mathbf{1}_c,$$

où $\mathscr{C}$ est l'ensemble des couleurs de $\mathcal{C}$.

Séries et opérades

Les séries sur $\mathcal{C}$ forment une généralisation des séries génératrices habituelles.

Il y en a d'autres :

- les séries sur les monoïdes [**Salomaa, Soittola**, 1978] ;
- les séries sur les arbres [**Berstel, Reutenauer**, 1982] ;
- les séries sur les opérades [**Chapoton**, 2002].

Séries et opérades

Les séries sur $\mathcal{C}$ forment une généralisation des séries génératrices habituelles.

Il y en a d'autres :

- les séries sur les monoïdes [**Salomaa, Soittola**, 1978] ;
- les séries sur les arbres [**Berstel, Reutenauer**, 1982] ;
- les séries sur les opérades [**Chapoton**, 2002].

Il existe plusieurs sortes de séries sur les opérades en fonction des spécificités des opérades considérées :

- opérades algébriques (et symétriques) [**Chapoton**, 2002, 2009] ;
- opérades algébriques non symétriques [**van der Laan**, 2004] ;
- opérades ensemblistes non symétriques $\mathcal{O}$ avec $\mathcal{O}(1) := \{\mathbf{1}\}$ [**Frabetti**, 2008] ;
- opérades algébriques (et symétriques) [**Loday, Nikolov**, 2013].

Produit pré-Lie

Le produit pré-Lie $\mathbf{f} \curvearrowleft \mathbf{g}$ de deux séries $\mathbf{f}$ et $\mathbf{g}$ sur $\mathcal{C}$ est défini par

$$\langle x, \mathbf{f} \curvearrowleft \mathbf{g} \rangle := \sum_{\substack{y, z \in \mathcal{C} \\ i \in [|y|] \\ x = y \circ_i z}} \langle y, \mathbf{f} \rangle \langle z, \mathbf{g} \rangle .$$

Produit pré-Lie

Le produit pré-Lie $\mathbf{f} \curvearrowleft \mathbf{g}$ de deux séries $\mathbf{f}$ et $\mathbf{g}$ sur $\mathcal{C}$ est défini par

$$\langle x, \mathbf{f} \curvearrowleft \mathbf{g} \rangle := \sum_{\substack{y,z \in \mathcal{C} \\ i \in [|y|] \\ x = y \circ_i z}} \langle y, \mathbf{f} \rangle \langle z, \mathbf{g} \rangle .$$

Le produit $\curvearrowleft$ est

- bilinéaire ;
- défini totalement (car les $\mathcal{C}(n)$ sont finis) ;
- admet $\mathbf{u}$ comme unité à gauche (mais pas à droite).

Produit pré-Lie

Le produit pré-Lie $\mathbf{f} \curvearrowleft \mathbf{g}$ de deux séries $\mathbf{f}$ et $\mathbf{g}$ sur $\mathcal{C}$ est défini par

$$\langle x, \mathbf{f} \curvearrowleft \mathbf{g} \rangle := \sum_{\substack{y,z \in \mathcal{C} \\ i \in [|y|] \\ x = y \circ_i z}} \langle y, \mathbf{f} \rangle \langle z, \mathbf{g} \rangle .$$

Le produit $\curvearrowleft$ est

- bilinéaire ;
- défini totalement (car les $\mathcal{C}(n)$ sont finis) ;
- admet $\mathbf{u}$ comme unité à gauche (mais pas à droite).

Proposition

Le produit pré-Lie vérifie

$$(\mathbf{f} \curvearrowleft \mathbf{g}) \curvearrowleft \mathbf{h} - \mathbf{f} \curvearrowleft (\mathbf{g} \curvearrowleft \mathbf{h}) = (\mathbf{f} \curvearrowleft \mathbf{h}) \curvearrowleft \mathbf{g} - \mathbf{f} \curvearrowleft (\mathbf{h} \curvearrowleft \mathbf{g}).$$

Ainsi, $(\mathbb{K} \langle\langle \mathcal{C} \rangle\rangle , \curvearrowleft)$ est une algèbre pré-Lie.

Étoile pré-Lie

Pour tout $\ell \geqslant 0$, soit

$$\mathbf{f}^{\curvearrowleft \ell} := \begin{cases} \mathbf{u} & \text{si } \ell = 0, \\ \mathbf{f}^{\curvearrowleft \ell - 1} \curvearrowleft \mathbf{f} & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'étoile pré-Lie de $\mathbf{f}$ est la série sur $\mathcal{C}$

$$\mathbf{f}^{\curvearrowleft *} := \sum_{\ell \geqslant 0} \mathbf{f}^{\curvearrowleft \ell}.$$

Étoile pré-Lie

Pour tout $\ell \geqslant 0$, soit

$$\mathbf{f}^{\curvearrowleft \ell} := \begin{cases} \mathbf{u} & \text{si } \ell = 0, \\ \mathbf{f}^{\curvearrowleft \ell-1} \curvearrowleft \mathbf{f} & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'étoile pré-Lie de $\mathbf{f}$ est la série sur $\mathcal{C}$

$$\mathbf{f}^{\curvearrowleft *} := \sum_{\ell \geqslant 0} \mathbf{f}^{\curvearrowleft \ell}.$$

Lemme

Si $\mathrm{Supp}(\mathbf{f})(1)$ factorise finiment $\mathcal{C}$, $\mathbf{f}^{\curvearrowleft *}$ est une série sur $\mathcal{C}$ bien définie.

Étoile pré-Lie

Pour tout $\ell \geqslant 0$, soit

$$\mathbf{f}^{\curvearrowleft \ell} := \begin{cases} \mathbf{u} & \text{si } \ell = 0, \\ \mathbf{f}^{\curvearrowleft \ell - 1} \curvearrowleft \mathbf{f} & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'étoile pré-Lie de $\mathbf{f}$ est la série sur $\mathcal{C}$

$$\mathbf{f}^{\curvearrowleft *} := \sum_{\ell \geqslant 0} \mathbf{f}^{\curvearrowleft \ell}.$$

Un sous-ensemble S de $\mathcal{C}(1)$ est factorise finiment $\mathcal{C}$ si tout $x \in \mathcal{C}(1)$ admet un nombre fini de factorisations sur S.

Lemme

Si $\mathrm{Supp}(\mathbf{f})(1)$ factorise finiment $\mathcal{C}$, $\mathbf{f}^{\curvearrowleft *}$ est une série sur $\mathcal{C}$ bien définie.

Étoile pré-Lie

Proposition

Si $\mathbf{f}$ est une série sur $\mathcal{C}$ telle que $\mathrm{Supp}(\mathbf{f})(1)$ factorise finiment $\mathcal{C}$,

$$\left\langle x, \mathbf{f}^{\curvearrowleft *} \right\rangle = \delta_{x,\mathbf{1}_{\mathrm{s}(x)}} + \sum_{\substack{y,z \in \mathcal{C} \\ i \in [|y|] \\ x = y \circ_i z}} \left\langle y, \mathbf{f}^{\curvearrowleft *} \right\rangle \left\langle z, \mathbf{f} \right\rangle .$$

Étoile pré-Lie

Proposition

Si $\mathbf{f}$ est une série sur $\mathcal{C}$ telle que $\mathrm{Supp}(\mathbf{f})(1)$ factorise finiment $\mathcal{C}$,

$$\left\langle x, \mathbf{f}^{\curvearrowleft *} \right\rangle = \delta_{x, \mathbf{1}_{\mathrm{s}(x)}} + \sum_{\substack{y, z \in \mathcal{C} \\ i \in [|y|] \\ x = y \circ_i z}} \left\langle y, \mathbf{f}^{\curvearrowleft *} \right\rangle \left\langle z, \mathbf{f} \right\rangle .$$

Proposition

Si $\mathbf{f}$ est une série sur $\mathcal{C}$ telle que $\mathrm{Supp}(\mathbf{f})(1)$ factorise finiment $\mathcal{C}$, l'équation

$$\mathbf{x} - \mathbf{x} \curvearrowleft \mathbf{f} = \mathbf{u}$$

admet comme solution unique $\mathbf{x} = \mathbf{f}^{\curvearrowleft *}$.

Produit de composition

Le produit de composition $\mathbf{f} \odot \mathbf{g}$ de deux séries $\mathbf{f}$ et $\mathbf{g}$ sur $\mathcal{C}$ est défini par

$$\langle x, \mathbf{f} \odot \mathbf{g} \rangle := \sum_{\substack{y, z_1, \ldots, z_{|y|} \in \mathcal{C} \\ x = y \circ \left[z_1, \ldots, z_{|y|}\right]}} \langle y, \mathbf{f} \rangle \prod_{i \in [|y|]} \langle z_i, \mathbf{g} \rangle .$$

Produit de composition

Le produit de composition $\mathbf{f} \odot \mathbf{g}$ de deux séries $\mathbf{f}$ et $\mathbf{g}$ sur $\mathcal{C}$ est défini par

$$\langle x, \mathbf{f} \odot \mathbf{g} \rangle := \sum_{\substack{y, z_1, \dots, z_{|y|} \in \mathcal{C} \\ x = y \circ \left[z_1, \dots, z_{|y|}\right]}} \langle y, \mathbf{f} \rangle \prod_{i \in [|y|]} \langle z_i, \mathbf{g} \rangle \,.$$

Le produit $\odot$ est

- linéaire à gauche (mais pas à droite) ;
- défini totalement (car les $\mathcal{C}(n)$ sont finis) ;
- admet $\mathbf{u}$ comme unité à gauche et à droite.

Produit de composition

Le produit de composition $\mathbf{f} \odot \mathbf{g}$ de deux séries $\mathbf{f}$ et $\mathbf{g}$ sur $\mathcal{C}$ est défini par

$$\langle x, \mathbf{f} \odot \mathbf{g} \rangle := \sum_{\substack{y, z_1, \ldots, z_{|y|} \in \mathcal{C} \\ x = y \circ \left[z_1, \ldots, z_{|y|}\right]}} \langle y, \mathbf{f} \rangle \prod_{i \in [|y|]} \langle z_i, \mathbf{g} \rangle .$$

Le produit $\odot$ est

- linéaire à gauche (mais pas à droite) ;
- défini totalement (car les $\mathcal{C}(n)$ sont finis) ;
- admet $\mathbf{u}$ comme unité à gauche et à droite.

Proposition

Le produit de composition est associatif et ainsi $(\mathbb{K} \langle\langle \mathcal{C} \rangle\rangle, \odot)$ est un monoïde.

Étoile pour la composition

Pour tout $\ell \geqslant 0$, soit

$$\mathbf{f}^{\odot_\ell} := \begin{cases} \mathbf{u} & \text{si } \ell = 0, \\ \mathbf{f}^{\odot_{\ell-1}} \odot \mathbf{f} & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'étoile pour la composition de $\mathbf{f}$ est la série sur $\mathcal{C}$

$$\mathbf{f}^{\odot_*} := \sum_{\ell \geqslant 0} \mathbf{f}^{\odot_\ell}.$$

Étoile pour la composition

Pour tout $\ell \geqslant 0$, soit

$$\mathbf{f}^{\odot_\ell} := \begin{cases} \mathbf{u} & \text{si } \ell = 0, \\ \mathbf{f}^{\odot_{\ell-1}} \odot \mathbf{f} & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'étoile pour la composition de $\mathbf{f}$ est la série sur $\mathcal{C}$

$$\mathbf{f}^{\odot_*} := \sum_{\ell \geqslant 0} \mathbf{f}^{\odot_\ell}.$$

Lemme

Si $\mathrm{Supp}(\mathbf{f})(1)$ factorise finiment $\mathcal{C}$, $\mathbf{f}^{\odot_*}$ est une série sur $\mathcal{C}$ bien définie.

Étoile pour la composition

Proposition

Si $\mathbf{f}$ est une série sur $\mathcal{C}$ telle que $\mathrm{Supp}(\mathbf{f})(1)$ factorise finiment $\mathcal{C}$,

$$\left\langle x, \mathbf{f}^{\odot *} \right\rangle = \delta_{x,\mathbf{1}_{\mathrm{s}(x)}} + \sum_{\substack{y, z_1, \ldots, z_{|y|} \in \mathcal{C} \\ x = y \circ \left[z_1, \ldots, z_{|y|}\right]}} \left\langle y, \mathbf{f}^{\odot *} \right\rangle \prod_{i \in [|y|]} \langle z_i, \mathbf{f} \rangle .$$

Étoile pour la composition

Proposition

Si $\mathbf{f}$ est une série sur $\mathcal{C}$ telle que $\mathrm{Supp}(\mathbf{f})(1)$ factorise finiment $\mathcal{C}$,

$$\left\langle x, \mathbf{f}^{\odot *} \right\rangle = \delta_{x,\mathbf{1}_{\mathrm{s}(x)}} + \sum_{\substack{y, z_1, \dots, z_{|y|} \in \mathcal{C} \\ x = y \circ \left[z_1, \dots, z_{|y|}\right]}} \left\langle y, \mathbf{f}^{\odot *} \right\rangle \prod_{i \in [|y|]} \langle z_i, \mathbf{f} \rangle .$$

Proposition

Si $\mathbf{f}$ est une série sur $\mathcal{C}$ telle que $\mathrm{Supp}(\mathbf{f})(1)$ factorise finiment $\mathcal{C}$, l'équation

$$\mathbf{x} - \mathbf{x} \odot \mathbf{f} = \mathbf{u}$$

admet comme solution unique $\mathbf{x} = \mathbf{f}^{\odot *}$.

Plan

Série des équerres

La série des équerres de $\mathcal{B}$ est

$$\text{équ}(\mathcal{B}) := \mathbf{i} \odot \mathbf{r}^{\curvearrowleft *} \odot \mathbf{t},$$

où $\mathbf{r}$ (resp. $\mathbf{i}$, $\mathbf{t}$) est la série caractéristique de $\mathfrak{R}$ (resp. $\{\mathbf{1}_c : c \in I\}$, $\{\mathbf{1}_c : c \in T\}$).

Série des équerres

La série des équerres de $\mathcal{B}$ est

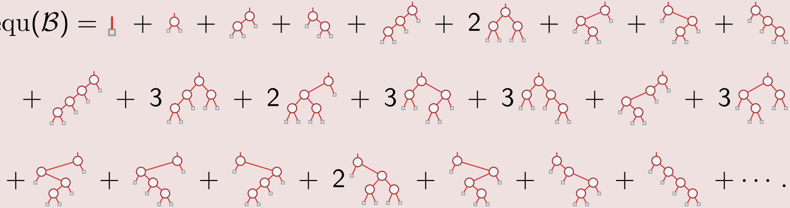
$$\mathrm{équ}(\mathcal{B}) := \mathbf{i} \odot \mathbf{r}^{\curvearrowleft *} \odot \mathbf{t},$$

où $\mathbf{r}$ (resp. $\mathbf{i}$, $\mathbf{t}$) est la série caractéristique de $\mathfrak{R}$ (resp. $\{\mathbf{1}_c : c \in I\}$, $\{\mathbf{1}_c : c \in T\}$).

Exemple

Pour $\mathcal{B} := (\mathrm{Mag}, \{1\},$ {  }, $\{1\}, \{1\})$,

$\mathrm{équ}(\mathcal{B}) =$



Série des équerres

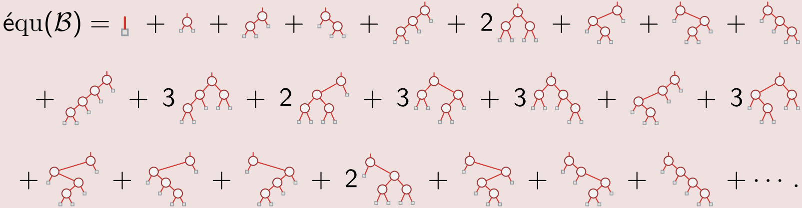
La série des équerres de $\mathcal{B}$ est

$$\mathrm{équ}(\mathcal{B}) := \mathbf{i} \odot \mathbf{r}^{\curvearrowleft *} \odot \mathbf{t},$$

où $\mathbf{r}$ (resp. $\mathbf{i}$, $\mathbf{t}$) est la série caractéristique de $\mathfrak{R}$ (resp. $\{\mathbf{1}_c : c \in I\}$, $\{\mathbf{1}_c : c \in T\}$).

Exemple

Pour $\mathcal{B} := (\mathrm{Mag}, \{1\}, \{\ \}, \{1\}, \{1\})$,



Cet exemple explique le nom de $\mathrm{équ}(\mathcal{B})$: les coefficients de cette série peuvent s'obtenir par la formule des équerres sur les arbres binaires [**Knuth**, 1973].

Analogues de la statistique des équerres

Soient $\mathcal{O}$ une opérade, $G \subseteq \mathcal{O}$ un ensemble générant $\mathcal{O}$ et le système de génération à bourgeons $\mathcal{B}_{\mathcal{O},G} := (\mathcal{O}, \{1\}, G, \{1\}, \{1\})$.

Les coefficients $\langle x, \mathrm{équ}(\mathcal{B}_{\mathcal{O},G})\rangle$ définissent une statistique sur les éléments de $\mathcal{O}$ analogue à celle des équerres propre aux arbres.

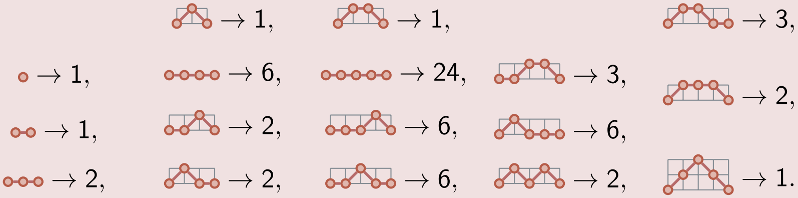
Analogues de la statistique des équerres

Soient $\mathcal{O}$ une opérade, $G \subseteq \mathcal{O}$ un ensemble générant $\mathcal{O}$ et le système de génération à bourgeons $\mathcal{B}_{\mathcal{O},G} := (\mathcal{O}, \{1\}, G, \{1\}, \{1\})$.

Les coefficients $\langle x, \mathrm{équ}(\mathcal{B}_{\mathcal{O},G})\rangle$ définissent une statistique sur les éléments de $\mathcal{O}$ analogue à celle des équerres propre aux arbres.

Exemple

Pour $\mathcal{B}_{\mathrm{Motz},G}$ avec $G := \{$ ,  $\}$, nous obtenons une statistique type équerres pour les chemins de Motzkin :



Graphes de dérivation

Les coefficients de $\text{équ}(\mathcal{B})$ s'interprètent de manière combinatoire.

Graphes de dérivation

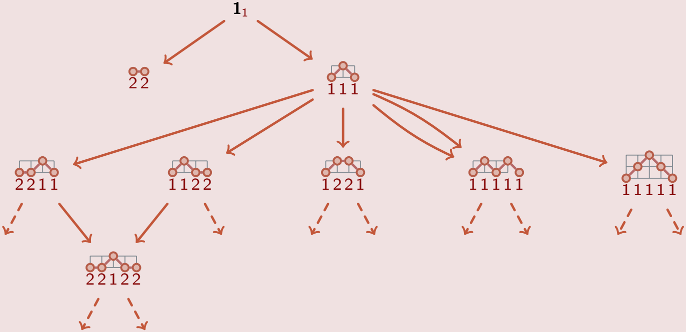
Les coefficients de $\mathrm{équ}(\mathcal{B})$ s'interprètent de manière combinatoire.

Le graphe de dérivation de $\mathcal{B}$ est le multigraphe orienté $\mathrm{DG}(\mathcal{B})$ tel que

- sommets : éléments dérivables depuis $\mathbf{1}_c$, $c \in I$;
- arcs : de x_1 vers x_2 si $x_1 \to x_2$.

Exemple

Le graphe de dérivation de $\mathcal{B} := (\mathrm{Motz}, \{1, 2\}, \mathfrak{R}, \{1\}, \{1, 2\})$ où $\mathfrak{R} := \{(1, \text{[Motzkin path]}, 22), (1, \text{[Motzkin path]}, 111)\}$ est



.

Graphes de dérivation et série des équerres

Proposition

Si $\mathfrak{R}(1)$ factorise finiment $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$, pour tout $x \in \mathrm{L}(\mathcal{B})$, le coefficient $\langle x, \mathrm{équ}(\mathcal{B})\rangle$ est le nombre de multichemins dans $\mathrm{DG}(\mathcal{B})$ depuis $\mathbf{1}_c$, $c \in I$, vers x.

Graphes de dérivation et série des équerres

Proposition

Si $\mathfrak{R}(1)$ factorise finiment $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$, pour tout $x \in \mathrm{L}(\mathcal{B})$, le coefficient $\langle x, \mathrm{équ}(\mathcal{B})\rangle$ est le nombre de multichemins dans $\mathrm{DG}(\mathcal{B})$ depuis $\mathbf{1}_c$, $c \in I$, vers x.

Théorème

Si $\mathfrak{R}(1)$ factorise finiment $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$,

$$\mathrm{équ}(\mathcal{B}) = \sum_{\substack{\mathfrak{t} \in \mathrm{Free}(\mathfrak{R}) \\ \mathrm{s}(\mathfrak{t}) \in I \\ \mathrm{e}(\mathfrak{t}) \in T^*}} \frac{\deg(\mathfrak{t})!}{\prod_{v \in \mathrm{N}(\mathfrak{t})} \deg(\mathfrak{t}_v)} \mathrm{eval}_{\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})}(\mathfrak{t}).$$

Graphes de dérivation et série des équerres

Proposition

Si $\mathfrak{R}(1)$ factorise finiment $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$, pour tout $x \in \mathrm{L}(\mathcal{B})$, le coefficient $\langle x, \mathrm{équ}(\mathcal{B})\rangle$ est le nombre de multichemins dans $\mathrm{DG}(\mathcal{B})$ depuis $\mathbf{1}_c$, $c \in I$, vers x.

Théorème

Si $\mathfrak{R}(1)$ factorise finiment $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$,

$$\mathrm{équ}(\mathcal{B}) = \sum_{\substack{\mathfrak{t} \in \mathrm{Free}(\mathfrak{R}) \\ \mathrm{s}(\mathfrak{t}) \in I \\ \mathrm{e}(\mathfrak{t}) \in T^*}} \frac{\deg(\mathfrak{t})!}{\prod_{v \in \mathrm{N}(\mathfrak{t})} \deg(\mathfrak{t}_v)} \mathrm{eval}_{\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})}(\mathfrak{t}).$$

Proposition

Si $\mathfrak{R}(1)$ factorise finiment $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$,

$$\mathrm{Supp}(\mathrm{équ}(\mathcal{B})) = \mathrm{L}(\mathcal{B}).$$

Série synchrone

La série synchrone de $\mathcal{B}$ est

$$\mathrm{sync}(\mathcal{B}) := \mathbf{i} \odot \mathbf{r}^{\odot *} \odot \mathbf{t}.$$

Série synchrone

La série synchrone de $\mathcal{B}$ est

$$\mathrm{sync}(\mathcal{B}) := \mathbf{i} \odot \mathbf{r}^{\odot_*} \odot \mathbf{t}.$$

Théorème

Si $\mathfrak{R}(1)$ factorise finiment $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$,

$$\mathrm{sync}(\mathcal{B}) = \sum_{\substack{\mathfrak{t} \in \mathrm{Free}_{\mathrm{par}}(\mathfrak{R}) \\ \mathrm{s}(\mathfrak{t}) \in I \\ \mathrm{e}(\mathfrak{t}) \in T^*}} \mathrm{eval}_{\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})}(\mathfrak{t}).$$

Série synchrone

La série synchrone de $\mathcal{B}$ est

$$\mathrm{sync}(\mathcal{B}) := \mathbf{i} \odot \mathbf{r}^{\odot_*} \odot \mathbf{t}.$$

Théorème

Si $\mathfrak{R}(1)$ factorise finiment $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$,

$$\mathrm{sync}(\mathcal{B}) = \sum_{\substack{\mathfrak{t} \in \mathrm{Free}_{\mathrm{par}}(\mathfrak{R}) \\ \mathrm{s}(\mathfrak{t}) \in I \\ \mathrm{e}(\mathfrak{t}) \in T^*}} \mathrm{eval}_{\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})}(\mathfrak{t}).$$

Proposition

Si $\mathfrak{R}(1)$ factorise finiment $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$,

$$\mathrm{Supp}(\mathrm{sync}(\mathcal{B})) = \mathrm{L}_{\mathrm{S}}(\mathcal{B}).$$

Plan

Séries des couleurs

Soit $\mathbf{f}$ une série sur $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$.

Soit

$$\mathfrak{cl} : \mathbb{K}\langle\langle \mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O}) \rangle\rangle \to \mathbb{K}\langle\langle \mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathsf{As}) \rangle\rangle$$

l'application définie par

$$\langle (a, \star_n, u), \mathfrak{cl}(\mathbf{f}) \rangle := \sum_{(a,x,u) \in \mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})} \langle (a, x, u), \mathbf{f} \rangle \,.$$

Séries des couleurs

Soit $\mathbf{f}$ une série sur $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$.

Soit

$$\mathfrak{cl} : \mathbb{K}\langle\langle \mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O}) \rangle\rangle \to \mathbb{K}\langle\langle \mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathsf{As}) \rangle\rangle$$

l'application définie par

$$\langle (a, \star_n, u), \mathfrak{cl}(\mathbf{f}) \rangle := \sum_{(a,x,u) \in \mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})} \langle (a, x, u), \mathbf{f} \rangle .$$

Cette série est la série des couleurs de $\mathbf{f}$.

La série $\mathfrak{cl}(\mathbf{f})$ est une version de $\mathbf{f}$ dans laquelle seules les couleurs des éléments de son support sont prises en compte.

Séries des types de couleurs

Soit

$$\mathfrak{tcl} : \mathbb{K}\langle\langle \mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})\rangle\rangle \to \mathbb{K}[[\mathscr{C}]] \otimes \mathbb{K}[[\mathscr{C}]]$$

l'application définie par

$$\langle a \otimes u, \mathfrak{tcl}(\mathbf{f})\rangle := \sum_{\substack{(a,x,v) \in \mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathrm{As}) \\ \mathrm{type}(v) = u}} \langle (a, x, v), \mathfrak{cl}(\mathbf{f})\rangle ,$$

où $\mathrm{type}(v)$ est l'image commutative de v.

Séries des types de couleurs

Soit

$$\mathfrak{tcl} : \mathbb{K}\langle\langle \mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})\rangle\rangle \to \mathbb{K}[[\mathscr{C}]] \otimes \mathbb{K}[[\mathscr{C}]]$$

l'application définie par

$$\langle a \otimes u, \mathfrak{tcl}(\mathbf{f})\rangle := \sum_{\substack{(a,x,v)\in \mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathsf{As}) \\ \mathrm{type}(v)=u}} \langle (a,x,v), \mathfrak{cl}(\mathbf{f})\rangle\,,$$

où $\mathrm{type}(v)$ est l'image commutative de v.

Cette série est la la série des types de couleurs de $\mathbf{f}$.

La série $\mathfrak{tcl}(\mathbf{f})$ est une version de $\mathbf{f}$ dans laquelle seules les couleurs de sortie et les images commutatives des couleurs d'entrée des éléments de son support sont prises en compte.

Séries des types de couleurs

Soit

$$\mathfrak{tcl} : \mathbb{K}\langle\langle \mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})\rangle\rangle \to \mathbb{K}[[\mathscr{C}]] \otimes \mathbb{K}[[\mathscr{C}]]$$

l'application définie par

$$\langle a \otimes u, \mathfrak{tcl}(\mathbf{f})\rangle := \sum_{\substack{(a,x,v) \in \mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathsf{As}) \\ \mathrm{type}(v) = u}} \langle (a, x, v), \mathfrak{cl}(\mathbf{f})\rangle ,$$

où $\mathrm{type}(v)$ est l'image commutative de v.

Cette série est la la série des types de couleurs de $\mathbf{f}$.

La série $\mathfrak{tcl}(\mathbf{f})$ est une version de $\mathbf{f}$ dans laquelle seules les couleurs de sortie et les images commutatives des couleurs d'entrée des éléments de son support sont prises en compte.

But

Obtenir une expression pour $\mathfrak{tcl}(\mathrm{sync}(\mathcal{B}))$, dénombrant les éléments engendrés de manière synchrone par $\mathcal{B}$ par rapport à leurs couleurs de sortie et d'entrée.

Séries synchrones

On pose $\mathscr{C} := \{c_1, \ldots, c_k\}$ and $\mathfrak{R} := \{r_1, \ldots, r_\ell\}$.

Soit $\mathcal{M}^{\mathrm{e}}$ la matrice $\ell \times k$ définie par

$$\mathcal{M}^{\mathrm{e}}_{i,j} := |\mathrm{e}(r_i)|_{c_j}.$$

Séries synchrones

On pose $\mathscr{C} := \{c_1, \ldots, c_k\}$ and $\mathfrak{R} := \{r_1, \ldots, r_\ell\}$.

Soit $\mathcal{M}^{\mathrm{e}}$ la matrice $\ell \times k$ définie par

$$\mathcal{M}^{\mathrm{e}}_{i,j} := |\mathrm{e}(r_i)|_{c_j}.$$

Soit $\mathcal{M}^{\mathrm{s}}$ la matrice $\ell \times k$ définie par

$$\mathcal{M}^{\mathrm{s}}_{i,j} := \begin{cases} 1 & \text{si } \mathrm{s}(r_i) = c_j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Séries synchrones

On pose $\mathscr{C} := \{c_1, \ldots, c_k\}$ and $\mathfrak{R} := \{r_1, \ldots, r_\ell\}$.

Soit $\mathcal{M}^{\mathrm{e}}$ la matrice $\ell \times k$ définie par

$$\mathcal{M}^{\mathrm{e}}_{i,j} := |\mathrm{e}(r_i)|_{c_j}.$$

Soit $\mathcal{M}^{\mathrm{s}}$ la matrice $\ell \times k$ définie par

$$\mathcal{M}^{\mathrm{s}}_{i,j} := \begin{cases} 1 & \text{si } \mathrm{s}(r_i) = c_j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exemple

Pour $\mathcal{B} := (\mathrm{Mag}, \{1, 2\}, \mathfrak{R}, \{1\}, \{1\})$ où

$\mathfrak{R} := \Big\{ \Big(1,$  $, 11\Big), \Big(1,$  $, 12\Big), \Big(1,$  $, 21\Big), (2, \mathbf{1}, 1) \Big\},$

nous avons

$$\mathcal{M}^{\mathrm{e}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{M}^{\mathrm{s}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Séries synchrones

Pour toute matrice d'entiers positifs α de dimensions $1 \times k$, $\mathscr{C}^\alpha$ est le monôme ${c_1}^{\alpha_1} \dots {c_k}^{\alpha_k}$.

Pour tout ensemble $S := \{s_1, \dots, s_n\}$ d'entiers strictement positifs, $S!$ est le multinomial $\binom{s_1+\dots+s_n}{s_1,\dots,s_n}$.

Séries synchrones

Pour toute matrice d'entiers positifs α de dimensions $1 \times k$, $\mathscr{C}^\alpha$ est le monôme ${c_1}^{\alpha_1} \dots {c_k}^{\alpha_k}$.

Pour tout ensemble $S := \{s_1, \dots, s_n\}$ d'entiers strictement positifs, $S!$ est le multinomial $\binom{s_1 + \cdots + s_n}{s_1, \dots, s_n}$.

Théorème

Si $\mathfrak{R}(1)$ factorise finiment $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathscr{O})$, pour tout $a \in \mathscr{C}$ et $\alpha \in \mathrm{Mat}(1, k)$,

$$\left\langle a \otimes \mathscr{C}^\alpha, \mathfrak{tcl}\left(\mathbf{r}^{\odot_*}\right)\right\rangle = \delta_{\alpha,\mathrm{type}(a)} + \sum_{\substack{\zeta \in \mathrm{Mat}(1,\ell) \\ \zeta \mathcal{M}^{\mathrm{e}} = \alpha}} \left(\prod_{j \in [k]} \{\zeta_i : \mathcal{M}^{\mathrm{s}}_{i,j} = 1\}! \right) \left\langle a \otimes \mathscr{C}^{\zeta \mathcal{M}^{\mathrm{s}}}, \mathfrak{tcl}\left(\mathbf{r}^{\odot_*}\right)\right\rangle .$$

Dénombrement des arbres binaires équilibrés

Le langage synchrone du système de génération à bourgeons
$\mathcal{B} := (\mathsf{Mag}, \{1, 2\}, \mathfrak{R}, \{1\}, \{1\})$ où

$\mathfrak{R} := \Big\{ \Big(1,$  $, 11\Big), \Big(1,$  $, 12\Big), \Big(1,$  $, 21\Big), (2, \mathbf{1}, 1) \Big\},$

est l'ensemble des arbres binaires équilibrés.

Dénombrement des arbres binaires équilibrés

Le langage synchrone du système de génération à bourgeons $\mathcal{B} := (\mathrm{Mag}, \{1, 2\}, \mathfrak{R}, \{1\}, \{1\})$ où

$\mathfrak{R} := \{ (1,$  $, 11), (1,$  $, 12), (1,$  $, 21), (2, \mathbf{1}, 1) \},$

est l'ensemble des arbres binaires équilibrés.

Puisque

$$\mathcal{M}^{\mathrm{e}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{M}^{\mathrm{s}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

la série $\mathfrak{tcl}(\mathbf{r}^{\odot_*})$ vérifie

$$\left\langle 1 \otimes 1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2}, \mathfrak{tcl}\left(\mathbf{r}^{\odot_*}\right) \right\rangle = \delta_{(\alpha_1, \alpha_2), (1,0)}$$

$$+ \sum_{\substack{2\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 + \zeta_4 = \alpha_1 \\ \zeta_2 + \zeta_3 = \alpha_2}} \binom{\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3}{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3} \left\langle 1 \otimes 1^{\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3} 2^{\zeta_4}, \mathfrak{tcl}\left(\mathbf{r}^{\odot_*}\right) \right\rangle.$$

Dénombrement des arbres binaires équilibrés

Comme $\mathrm{sync}(\mathcal{B}) = \mathsf{i} \odot \mathsf{r}^{\odot_*} \odot \mathsf{t}$,

$$\left\langle 1 \otimes 1^{\alpha_1} 2^{0}, \mathfrak{tcl}(\mathsf{r}^{\odot_*}) \right\rangle = \left\langle 1 \otimes 1^{\alpha_1} 2^{0}, \mathfrak{tcl}(\mathrm{sync}(\mathcal{B})) \right\rangle .$$

Dénombrement des arbres binaires équilibrés

Comme $\mathrm{sync}(\mathcal{B}) = \mathbf{i} \odot \mathbf{r}^{\odot_*} \odot \mathbf{t}$,

$$\left\langle 1 \otimes 1^{\alpha_1} 2^0, \mathfrak{tcl}(\mathbf{r}^{\odot_*}) \right\rangle = \left\langle 1 \otimes 1^{\alpha_1} 2^0, \mathfrak{tcl}(\mathrm{sync}(\mathcal{B})) \right\rangle.$$

Le coefficient en $1 \otimes 1^{\alpha_1} 2^0$ de $\mathfrak{tcl}(\mathrm{sync}(\mathcal{B}))$ compte les arbres binaires équilibrés avec α_1 feuilles.

Dénombrement des arbres binaires équilibrés

Comme $\mathrm{sync}(\mathcal{B}) = \mathbf{i} \odot \mathbf{r}^{\odot_*} \odot \mathbf{t}$,

$$\left\langle 1 \otimes 1^{\alpha_1} 2^0, \mathfrak{tcl}(\mathbf{r}^{\odot_*})\right\rangle = \left\langle 1 \otimes 1^{\alpha_1} 2^0, \mathfrak{tcl}(\mathrm{sync}(\mathcal{B}))\right\rangle.$$

Le coefficient en $1 \otimes 1^{\alpha_1} 2^0$ de $\mathfrak{tcl}(\mathrm{sync}(\mathcal{B}))$ compte les arbres binaires équilibrés avec α_1 feuilles.

On obtient ainsi la récurrence

$$\langle 1 \otimes 1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2}, \mathbf{h}\rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } (\alpha_1, \alpha_2) = (1, 0), \\ \sum_{\zeta_1+\alpha_2+\zeta_4=\alpha_1} \binom{\zeta_1+\alpha_2}{\zeta_1} 2^{\alpha_2} \left\langle 1 \otimes 1^{\zeta_1+\alpha_2} 2^{\zeta_4}, \mathbf{h}\right\rangle & \text{sinon} \end{cases}$$

pour les coefficients de $\mathbf{h} := \mathfrak{tcl}(\mathrm{sync}(\mathcal{B}))$.

Dénombrement des arbres binaires équilibrés

Comme $\mathrm{sync}(\mathcal{B}) = \mathbf{i} \odot \mathbf{r}^{\odot_*} \odot \mathbf{t}$,

$$\left\langle 1 \otimes 1^{\alpha_1} 2^0, \mathfrak{tcl}(\mathbf{r}^{\odot_*})\right\rangle = \left\langle 1 \otimes 1^{\alpha_1} 2^0, \mathfrak{tcl}(\mathrm{sync}(\mathcal{B}))\right\rangle.$$

Le coefficient en $1 \otimes 1^{\alpha_1} 2^0$ de $\mathfrak{tcl}(\mathrm{sync}(\mathcal{B}))$ compte les arbres binaires équilibrés avec α_1 feuilles.

On obtient ainsi la récurrence

$$\langle 1 \otimes 1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2}, \mathbf{h}\rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } (\alpha_1, \alpha_2) = (1, 0), \\ \sum_{\zeta_1+\alpha_2+\zeta_4=\alpha_1} \binom{\zeta_1+\alpha_2}{\zeta_1} 2^{\alpha_2} \left\langle 1 \otimes 1^{\zeta_1+\alpha_2} 2^{\zeta_4}, \mathbf{h}\right\rangle & \text{sinon} \end{cases}$$

pour les coefficients de $\mathbf{h} := \mathfrak{tcl}(\mathrm{sync}(\mathcal{B}))$.

$$(\mathbf{f} \odot \mathbf{i})^{\curvearrowleft_n}$$

Plan

Annexes

The bud operad of free operads

The free operad $\mathrm{Free}(G)$ over G, where G is a graded set, is defined by

- $\mathrm{Free}(G)(n)$ is the set of the planar rooted trees with n leaves and where internal nodes are labeled on G, respecting the arities of the labels ;
- $\mathfrak{s} \circ_i \mathfrak{t}$ is tree obtained by grafting the root of $\mathfrak{t}$ to the i-th leaf of $\mathfrak{s}$.

The bud operad of free operads

The free operad $\mathrm{Free}(G)$ over G, where G is a graded set, is defined by

- $\mathrm{Free}(G)(n)$ is the set of the planar rooted trees with n leaves and where internal nodes are labeled on G, respecting the arities of the labels ;
- $\mathfrak{s} \circ_i \mathfrak{t}$ is tree obtained by grafting the root of $\mathfrak{t}$ to the i-th leaf of $\mathfrak{s}$.

For any set of colors $\mathscr{C}$,

$$\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathrm{Free}(G)) = \bigsqcup_{n \geqslant 1} \{(a, \mathfrak{t}, u_1 \dots u_n) : a, u_1, \dots, u_n \in \mathscr{C}, \mathfrak{t} \in \mathrm{Free}(G)(n)\} .$$

The bud operad of free operads

The free operad $\mathrm{Free}(G)$ over G, where G is a graded set, is defined by

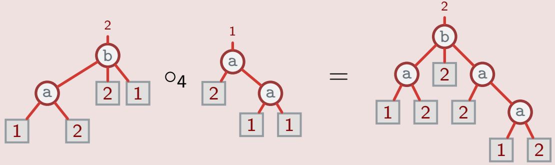
- $\mathrm{Free}(G)(n)$ is the set of the planar rooted trees with n leaves and where internal nodes are labeled on G, respecting the arities of the labels ;
- $\mathfrak{s} \circ_i \mathfrak{t}$ is tree obtained by grafting the root of $\mathfrak{t}$ to the i-th leaf of $\mathfrak{s}$.

For any set of colors $\mathscr{C}$,

$$\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathrm{Free}(G)) = \bigsqcup_{n \geqslant 1} \{(a, \mathfrak{t}, u_1 \dots u_n) : a, u_1, \dots, u_n \in \mathscr{C}, \mathfrak{t} \in \mathrm{Free}(G)(n)\}.$$

Example

In $\mathrm{B}_{\{1,2\}}(\mathrm{Free}(G))$ where $G := \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$, $|\mathtt{a}| :=: 2$, and $|\mathtt{b}| := 3$,



.

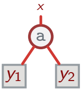
The bud operad of free operads

In general, $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathrm{Free}(G))$ is not a free colored operad.

The bud operad of free operads

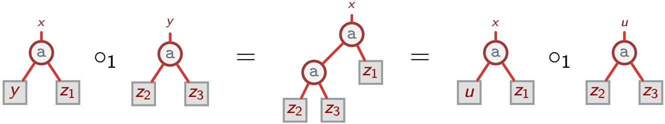
In general, $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathrm{Free}(G))$ is not a free colored operad.

For instance, the colored operad $\mathrm{B}_{\{1,2\}}(\mathrm{Free}(\{\mathtt{a}\}))$ with $|\mathtt{a}| := 2$ is generated by the eight corollas

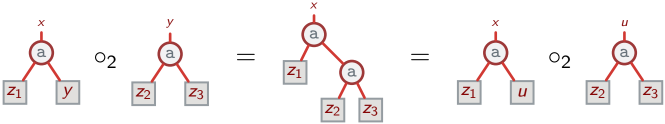


, $\quad x, y_1, y_2 \in \{1, 2\}$,

and are subject to the nontrivial quadratic relations



, $\quad y \neq u$,



, $\quad y \neq u$.

Invertible elements for $\odot$

Proposition

If $\mathrm{Supp}(\mathbf{f})(1) = \{\mathbf{1}_c : c \in \mathscr{C}\} \sqcup S$ for some $\mathcal{C}$-finitely factorizing set S, the equations

$$\mathbf{f} \odot \mathbf{x} = \mathbf{u} \qquad \text{and} \qquad \mathbf{x} \odot \mathbf{f} = \mathbf{u}$$

admit both the unique same solution denoted by $\mathbf{x} = \mathbf{f}^{\odot -1}$.

Invertible elements for $\odot$

Proposition

If $\mathrm{Supp}(\mathbf{f})(1) = \{\mathbf{1}_c : c \in \mathscr{C}\} \sqcup S$ for some $\mathcal{C}$-finitely factorizing set S, the equations

$$\mathbf{f} \odot \mathbf{x} = \mathbf{u} \qquad \text{and} \qquad \mathbf{x} \odot \mathbf{f} = \mathbf{u}$$

admit both the unique same solution denoted by $\mathbf{x} = \mathbf{f}^{\odot -1}$.

Proposition

If $\mathrm{Supp}(\mathbf{f})(1) = \{\mathbf{1}_c : c \in \mathscr{C}\} \sqcup S$ for some $\mathcal{C}$-finitely factorizing set S, $\mathbf{f}^{\odot -1}$ is a well-defined series satisfying

$$\left\langle x, \mathbf{f}^{\odot -1} \right\rangle = \sum_{\substack{\mathfrak{t} \in \mathrm{Free}(\bar{\mathcal{C}}) \\ \mathrm{eval}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{t}) = x}} (-1)^{\deg(\mathfrak{t})} \frac{1}{\left\langle \mathbf{1}_{\mathrm{s}(x)}, \mathbf{f} \right\rangle} \prod_{v \in \mathrm{N}(\mathfrak{t})} \frac{\langle \mathrm{lb}(v), \mathbf{f} \rangle}{\prod_{j \in [|v|]} \left\langle \mathbf{1}_{\mathrm{e}_j(v)}, \mathbf{f} \right\rangle}.$$

Therefore, the monoid $(\mathbb{K}\langle\langle\mathcal{C}\rangle\rangle, \odot)$ contains a (large) group formed by the series with a support satisfying the above description.

Syntactic generating series

Let $\mathcal{B} := (\mathcal{O}, \mathscr{C}, \mathfrak{R}, I, T)$ be a bud generating system.

The syntactic generating series of $\mathcal{B}$ is

$$\mathrm{synt}(\mathcal{B}) := \mathbf{i} \odot (\mathbf{u} - \mathbf{r})^{\odot_{-1}} \odot \mathbf{t}.$$

Syntactic generating series

Let $\mathcal{B} := (\mathcal{O}, \mathscr{C}, \mathfrak{R}, I, T)$ be a bud generating system.

The syntactic generating series of $\mathcal{B}$ is

$$\mathrm{synt}(\mathcal{B}) := \mathbf{i} \odot (\mathbf{u} - \mathbf{r})^{\odot_{-1}} \odot \mathbf{t}.$$

Lemma

If $\mathfrak{R}(1)$ is $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$-finitely factorizing, $\mathrm{synt}(\mathcal{B})$ is a well-defined series.

Syntactic generating series

Let $\mathcal{B} := (\mathcal{O}, \mathscr{C}, \mathfrak{R}, I, T)$ be a bud generating system.

The syntactic generating series of $\mathcal{B}$ is

$$\mathrm{synt}(\mathcal{B}) := \mathbf{i} \odot (\mathbf{u} - \mathbf{r})^{\odot_{-1}} \odot \mathbf{t}.$$

Lemma

If $\mathfrak{R}(1)$ is $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$-finitely factorizing, $\mathrm{synt}(\mathcal{B})$ is a well-defined series.

We say that $\mathcal{B}$ is unambiguous if all coefficients of $\mathrm{synt}(\mathcal{B})$ are 0 or 1.

Syntactic generating series

Theorem

If $\mathfrak{R}(1)$ is $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$-finitely factorizing,

$$\operatorname{synt}(\mathcal{B}) = \sum_{\substack{\mathfrak{t} \in \mathrm{Free}(\mathfrak{R}) \\ \mathrm{s}(\mathfrak{t}) \in I \\ \mathrm{e}(\mathfrak{t}) \in T^*}} \operatorname{eval}_{\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})}(\mathfrak{t}).$$

Syntactic generating series

Theorem

If $\mathfrak{R}(1)$ is $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$-finitely factorizing,

$$\mathrm{synt}(\mathcal{B}) = \sum_{\substack{\mathfrak{t}\in\mathrm{Free}(\mathfrak{R}) \\ \mathrm{s}(\mathfrak{t})\in I \\ \mathrm{e}(\mathfrak{t})\in T^*}} \mathrm{eval}_{\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})}(\mathfrak{t}).$$

Proposition

If $\mathfrak{R}(1)$ is $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$-finitely factorizing,

$$\mathrm{Supp}(\mathrm{synt}(\mathcal{B})) = \mathrm{L}(\mathcal{B}).$$

Syntactic generating series

Theorem

If $\mathfrak{R}(1)$ is $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$-finitely factorizing,

$$\mathrm{synt}(\mathcal{B}) = \sum_{\substack{\mathfrak{t} \in \mathrm{Free}(\mathfrak{R}) \\ \mathrm{s}(\mathfrak{t}) \in I \\ \mathrm{e}(\mathfrak{t}) \in T^*}} \mathrm{eval}_{\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})}(\mathfrak{t}).$$

Proposition

If $\mathfrak{R}(1)$ is $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$-finitely factorizing,

$$\mathrm{Supp}(\mathrm{synt}(\mathcal{B})) = \mathrm{L}(\mathcal{B}).$$

If $\mathcal{B}$ is unambiguous, each element generated by $\mathcal{B}$ admits exactly one treelike expression.