

Découpage d'associativité généralisé

Samuele Giraud

LIGM, Université Paris-Est Marne-la-Vallée

Séminaire de l'IRIF

15 juin 2017

Plan

Algèbres dendriformes

Opérades

Opérade dendriforme

Opérades polydendriformes

Plan

Algèbres dendriformes

Découper une opération

Soit

$$\star : \mathcal{V} \otimes \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$$

une **opération binaire associative**, agissant sur un \mathbb{K} -espace vectoriel \mathcal{V} .

Découper une opération

Soit

$$\star : \mathcal{V} \otimes \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$$

une **opération binaire associative**, agissant sur un \mathbb{K} -espace vectoriel \mathcal{V} .

Découper \star consiste à exprimer \star comme une somme

$$\star = \prec + \succ$$

où \prec (gauche) et \succ (droite) sont deux opérations binaires.

Découper une opération

Soit

$$\star : \mathcal{V} \otimes \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$$

une **opération binaire associative**, agissant sur un \mathbb{K} -espace vectoriel \mathcal{V} .

Découper \star consiste à exprimer \star comme une somme

$$\star = \prec + \succ$$

où \prec (gauche) et \succ (droite) sont deux opérations binaires.

Le produit de deux éléments $x, y \in \mathcal{V}$ s'exprime ainsi comme

$$x \star y = (x \prec y) + (x \succ y).$$

Découper une opération

Soit

$$\star : \mathcal{V} \otimes \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$$

une **opération binaire associative**, agissant sur un \mathbb{K} -espace vectoriel \mathcal{V} .

Découper \star consiste à exprimer \star comme une somme

$$\star = \prec + \succ$$

où \prec (gauche) et \succ (droite) sont deux opérations binaires.

Le produit de deux éléments $x, y \in \mathcal{V}$ s'exprime ainsi comme

$$x \star y = (x \prec y) + (x \succ y).$$

Ces opérations \prec et \succ doivent vérifier des axiomes.

Exemple : l'algèbre de mélange

Considérons l'espace $\mathbb{Q}\langle a, b \rangle$ des polynômes non commutatifs.

Exemple

$$a + 6aa - 2aaba \in \mathbb{Q}\langle a, b \rangle$$

Exemple : l'algèbre de mélange

Considérons l'espace $\mathbb{Q}\langle a, b \rangle$ des polynômes non commutatifs.

Exemple

$$a + 6aa - 2aaba \in \mathbb{Q}\langle a, b \rangle$$

On munit cet espace du **produit de mélange** \sqcup .

Exemple

$$ab \sqcup ba = abba + abba + abab + baba + baab + baab$$

Exemple : l'algèbre de mélange

Considérons l'espace $\mathbb{Q}\langle a, b \rangle$ des polynômes non commutatifs.

Exemple

$$a + 6aa - 2aaba \in \mathbb{Q}\langle a, b \rangle$$

On munit cet espace du **produit de mélange** \sqcup .

Exemple

$$\begin{aligned} ab \sqcup ba &= abba + abba + abab + baba + baab + baab \\ &= 2abba + abab + baba + 2baab \end{aligned}$$

Exemple : l'algèbre de mélange

Considérons l'espace $\mathbb{Q}\langle a, b \rangle$ des polynômes non commutatifs.

Exemple

$$a + 6aa - 2aaba \in \mathbb{Q}\langle a, b \rangle$$

On munit cet espace du **produit de mélange** \sqcup .

Exemple

$$\begin{aligned} ab \sqcup ba &= abba + abba + abab + baba + baab + baab \\ &= 2abba + abab + baba + 2baab \end{aligned}$$

\sqcup se découpe en deux parties \prec et \succ suivant l'**origine de la dernière lettre** (1^{er} ou 2^e opérande) des mots obtenus :

Exemple

$$ab \prec ba = abab + baab + baab$$

$$ab \succ ba = abba + abba + baba$$

Exemple : l'algèbre des polynômes

Soit $A := \{a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots\}$ un alphabet totalement ordonné.

Exemple : l'algèbre des polynômes

Soit $A := \{a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots\}$ un alphabet totalement ordonné.

L'espace des polynômes non commutatifs $\mathbb{Q}\langle A \rangle$ est muni de la multiplication habituelle \cdot :

Exemple

$$a_0 a_2 a_0 \cdot a_1 a_2 = a_0 a_2 a_0 a_1 a_2$$

Exemple : l'algèbre des polynômes

Soit $A := \{a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots\}$ un alphabet totalement ordonné.

L'espace des polynômes non commutatifs $\mathbb{Q}\langle A \rangle$ est muni de la multiplication habituelle \cdot :

Exemple

$$a_0 a_2 a_0 \cdot a_1 a_2 = a_0 a_2 a_0 a_1 a_2$$

\cdot se découpe en deux parties \prec et \succ suivant l'**origine de la plus grande lettre** (1^{er} ou 2^e opérande) du mot obtenu :

$$u \prec v := \begin{cases} uv & \text{si } \max(u) > \max(v), \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad u \succ v := \begin{cases} uv & \text{si } \max(u) \leq \max(v), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exemple : l'algèbre des polynômes

Soit $A := \{a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots\}$ un alphabet totalement ordonné.

L'espace des polynômes non commutatifs $\mathbb{Q}\langle A \rangle$ est muni de la multiplication habituelle \cdot :

Exemple

$$a_0 a_2 a_0 \cdot a_1 a_2 = a_0 a_2 a_0 a_1 a_2$$

\cdot se découpe en deux parties \prec et \succ suivant l'origine de la plus grande lettre (1^{er} ou 2^e opérande) du mot obtenu :

$$u \prec v := \begin{cases} uv & \text{si } \max(u) > \max(v), \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad u \succ v := \begin{cases} uv & \text{si } \max(u) \leq \max(v), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exemple

$$a_0 a_2 \prec a_1 a_0 = a_0 a_2 a_1 a_0$$

$$a_0 a_2 \succ a_1 a_0 = 0$$

$$a_0 a_2 a_0 \prec a_1 a_2 = 0$$

$$a_0 a_2 a_0 \succ a_1 a_2 = a_0 a_2 a_0 a_1 a_2$$

Algèbres dendriformes

Une **algèbre dendriforme** [Loday, 2001] est un \mathbb{K} -espace vectoriel \mathcal{V} muni de deux opérations binaires

$$\prec : \mathcal{V} \otimes \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V} \quad \text{et} \quad \succ : \mathcal{V} \otimes \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$$

vérifiant, pour tous $x, y, z \in \mathcal{V}$, les relations

$$\begin{aligned}(x \prec y) \prec z &= x \prec (y \prec z) + x \prec (y \succ z), \\(x \succ y) \prec z &= x \succ (y \prec z), \\(x \prec y) \succ z + (x \succ y) \succ z &= x \succ (y \succ z).\end{aligned}$$

Algèbres dendriformes

Une **algèbre dendriforme** [Loday, 2001] est un \mathbb{K} -espace vectoriel \mathcal{V} muni de deux opérations binaires

$$\prec : \mathcal{V} \otimes \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V} \quad \text{et} \quad \succ : \mathcal{V} \otimes \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$$

vérifiant, pour tous $x, y, z \in \mathcal{V}$, les relations

$$\begin{aligned}(x \prec y) \prec z &= x \prec (y \prec z) + x \prec (y \succ z), \\(x \succ y) \prec z &= x \succ (y \prec z), \\(x \prec y) \succ z + (x \succ y) \succ z &= x \succ (y \succ z).\end{aligned}$$

Proposition [Loday, 2001]

Si $(\mathcal{V}, \prec, \succ)$ est une algèbre dendriforme, l'opération $\prec + \succ$ est associative.

Exemple : l'algèbre dendriforme de mélange

Dans l'algèbre de mélange, \prec et \succ vérifient

$$ua \prec v = (u \sqcup v)a \quad \text{et} \quad u \succ vb = (u \sqcup v)b.$$

Exemple : l'algèbre dendriforme de mélange

Dans l'algèbre de mélange, \prec et \succ vérifient

$$u\mathbf{a} \prec v = (u \sqcup v)\mathbf{a} \quad \text{et} \quad u \succ v\mathbf{b} = (u \sqcup v)\mathbf{b}.$$

Ces opérations forment une algèbre dendriforme.

Exemple : l'algèbre dendriforme de mélange

Dans l'algèbre de mélange, \prec et \succ vérifient

$$ua \prec v = (u \sqcup v)a \quad \text{et} \quad u \succ vb = (u \sqcup v)b.$$

Ces opérations forment une algèbre dendriforme.

De plus, comme

$$ua \sqcup vb = ua \prec vb + ua \succ vb,$$

Exemple : l'algèbre dendriforme de mélange

Dans l'algèbre de mélange, \prec et \succ vérifient

$$ua \prec v = (u \sqcup v)a \quad \text{et} \quad u \succ vb = (u \sqcup v)b.$$

Ces opérations forment une algèbre dendriforme.

De plus, comme

$$ua \sqcup vb = ua \prec vb + ua \succ vb,$$

on peut écrire

$$ua \sqcup vb = (u \sqcup vb)a + (ua \sqcup v)b,$$

Exemple : l'algèbre dendriforme de mélange

Dans l'algèbre de mélange, \prec et \succ vérifient

$$ua \prec v = (u \sqcup v)a \quad \text{et} \quad u \succ vb = (u \sqcup v)b.$$

Ces opérations forment une algèbre dendriforme.

De plus, comme

$$ua \sqcup vb = ua \prec vb + ua \succ vb,$$

on peut écrire

$$ua \sqcup vb = (u \sqcup v)a + (ua \sqcup v)b,$$

avec

$$ua \sqcup \epsilon = ua = \epsilon \sqcup ua.$$

Exemple : l'algèbre dendriforme de mélange

Dans l'algèbre de mélange, \prec et \succ vérifient

$$ua \prec v = (u \sqcup v)a \quad \text{et} \quad u \succ vb = (u \sqcup v)b.$$

Ces opérations forment une algèbre dendriforme.

De plus, comme

$$ua \sqcup vb = ua \prec vb + ua \succ vb,$$

on peut écrire

$$ua \sqcup vb = (u \sqcup v)a + (ua \sqcup v)b,$$

avec

$$ua \sqcup \epsilon = ua = \epsilon \sqcup ua.$$

C'est la **définition récursive de Ree** du produit de mélange [Ree, 1957], [Schützenberger, 1958].

Quelques propriétés des algèbres dendriformes

Découper une opération associative permet de mettre en évidence certaines de ses propriétés [Foissy, 2005].

Quelques propriétés des algèbres dendrifformes

Découper une opération associative permet de mettre en évidence certaines de ses propriétés [Foissy, 2005].

Plusieurs analogues du produit de mélange (sur des arbres, permutations, partitions ensemblistes, *etc.*) sont définis à partir d'opérations \prec et \succ [Loday, 2001], [Foissy, 2005], [Novelli, Thibon, 2007].

Quelques propriétés des algèbres dendriformes

Découper une opération associative permet de mettre en évidence certaines de ses propriétés [Foissy, 2005].

Plusieurs analogues du produit de mélange (sur des arbres, permutations, partitions ensemblistes, *etc.*) sont définis à partir d'opérations \prec et \succ [Loday, 2001], [Foissy, 2005], [Novelli, Thibon, 2007].

Il existe de nombreux liens entre les algèbres dendriformes, la théorie des algèbres de Hopf et l'algorithmique (insertion dans un arbre binaire de recherche) [Hivert, Novelli, Thibon, 2005].

Quelques propriétés des algèbres dendriformes

Découper une opération associative permet de mettre en évidence certaines de ses propriétés [Foissy, 2005].

Plusieurs analogues du produit de mélange (sur des arbres, permutations, partitions ensemblistes, *etc.*) sont définis à partir d'opérations \prec et \succ [Loday, 2001], [Foissy, 2005], [Novelli, Thibon, 2007].

Il existe de nombreux liens entre les algèbres dendriformes, la théorie des algèbres de Hopf et l'algorithmique (insertion dans un arbre binaire de recherche) [Hivert, Novelli, Thibon, 2005].

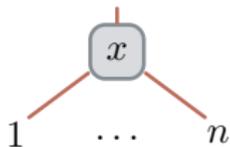
L'opérade dendriforme [Loday, 2001] décrit toutes les algèbres dendriformes.

Plan

Opérades

Opérateurs

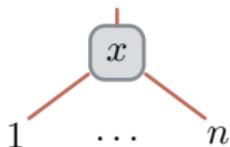
Un **opérateur** est une entité ayant $n \geq 1$ entrées et une sortie.



Son **arité** est son nombre n d'entrées.

Opérateurs

Un **opérateur** est une entité ayant $n \geq 1$ entrées et une sortie.



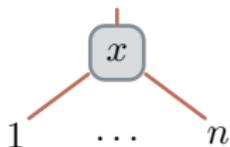
Son **arité** est son nombre n d'entrées.

Composer deux opérateurs x et y consiste à

1. choisir une entrée de x , identifiée par sa position i ;
2. greffer la sortie de y sur cette entrée.

Opérateurs

Un **opérateur** est une entité ayant $n \geq 1$ entrées et une sortie.

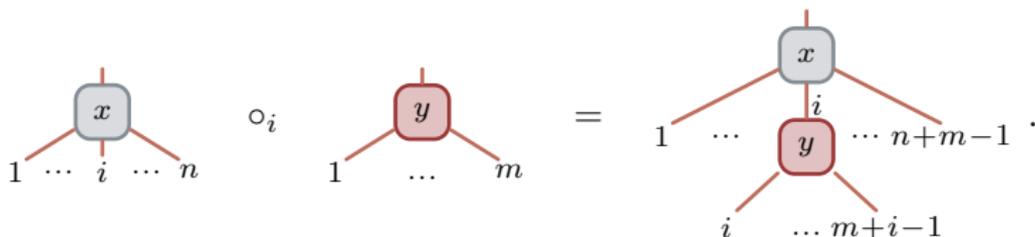


Son **arité** est son nombre n d'entrées.

Composer deux opérateurs x et y consiste à

1. choisir une entrée de x , identifiée par sa position i ;
2. greffer la sortie de y sur cette entrée.

Ceci produit un nouvel opérateur $x \circ_i y$ d'arité $n + m - 1$:



Opérades

Les opérades sont des structures algébriques formalisant la notion d'opérateur de leur composition.

Opérades

Les opérades sont des structures algébriques formalisant la notion d'opérateur de leur composition.

Une **opérade** (non symétrique) est un triplet $(\mathcal{O}, \circ_i, \mathbf{1})$ où

1. \mathcal{O} est un \mathbb{K} -espace vectoriel gradué

$$\mathcal{O} := \bigoplus_{n \geq 1} \mathcal{O}(n) ;$$

Opérades

Les opérades sont des structures algébriques formalisant la notion d'opérateur de leur composition.

Une **opérade** (non symétrique) est un triplet $(\mathcal{O}, \circ_i, \mathbb{1})$ où

1. \mathcal{O} est un \mathbb{K} -espace vectoriel gradué

$$\mathcal{O} := \bigoplus_{n \geq 1} \mathcal{O}(n) ;$$

2. \circ_i est une application linéaire de **composition partielle**,

$$\circ_i : \mathcal{O}(n) \otimes \mathcal{O}(m) \rightarrow \mathcal{O}(n + m - 1), \quad n, m \geq 1, i \in [n] ;$$

Opérades

Les opérades sont des structures algébriques formalisant la notion d'opérateur de leur composition.

Une **opérade** (non symétrique) est un triplet $(\mathcal{O}, \circ_i, \mathbb{1})$ où

1. \mathcal{O} est un \mathbb{K} -espace vectoriel gradué

$$\mathcal{O} := \bigoplus_{n \geq 1} \mathcal{O}(n) ;$$

2. \circ_i est une application linéaire de **composition partielle**,

$$\circ_i : \mathcal{O}(n) \otimes \mathcal{O}(m) \rightarrow \mathcal{O}(n + m - 1), \quad n, m \geq 1, i \in [n] ;$$

3. $\mathbb{1}$ est un élément de $\mathcal{O}(1)$, appelé **unité**.

Opérades

Les opérades sont des structures algébriques formalisant la notion d'opérateur de leur composition.

Une **opérade** (non symétrique) est un triplet $(\mathcal{O}, \circ_i, \mathbb{1})$ où

1. \mathcal{O} est un \mathbb{K} -espace vectoriel gradué

$$\mathcal{O} := \bigoplus_{n \geq 1} \mathcal{O}(n) ;$$

2. \circ_i est une application linéaire de **composition partielle**,

$$\circ_i : \mathcal{O}(n) \otimes \mathcal{O}(m) \rightarrow \mathcal{O}(n + m - 1), \quad n, m \geq 1, i \in [n] ;$$

3. $\mathbb{1}$ est un élément de $\mathcal{O}(1)$, appelé **unité**.

Ces objets doivent vérifier des axiomes.

Axiomes des opérades

Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$

$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$

$$i \in [n], j \in [m]$$

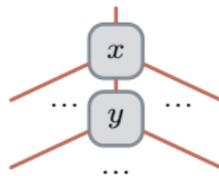
Axiomes des opérades

Associativité :

$$(x \circ_i y)$$

$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$

$$i \in [n], j \in [m]$$



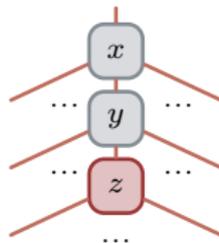
Axiomes des opérades

Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z$$

$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$

$$i \in [n], j \in [m]$$



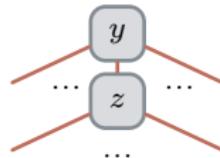
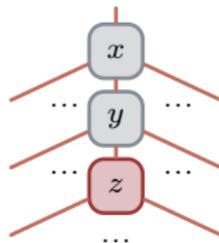
Axiomes des opérades

Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z \quad (y \circ_j z)$$

$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$

$$i \in [n], j \in [m]$$



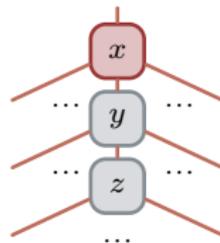
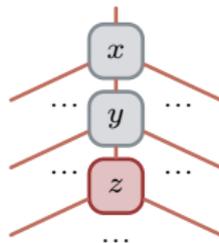
Axiomes des opérades

Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$

$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$

$$i \in [n], j \in [m]$$



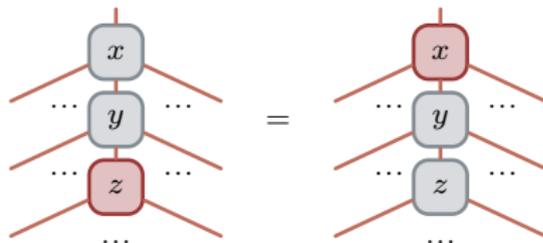
Axiomes des opérades

Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$

$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$

$$i \in [n], j \in [m]$$



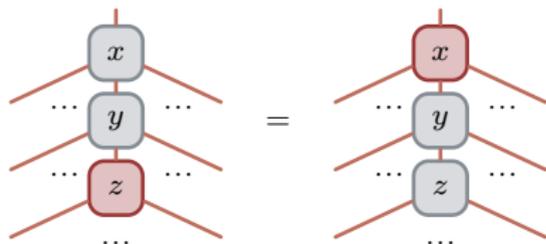
Axiomes des opérades

Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$

$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$

$$i \in [n], j \in [m]$$



Commutativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{j+m-1} z = (x \circ_j z) \circ_i y$$

$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$

$$1 \leq i < j \leq n$$

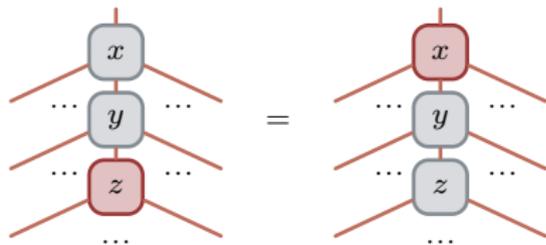
Axiomes des opérades

Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$

$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$

$$i \in [n], j \in [m]$$

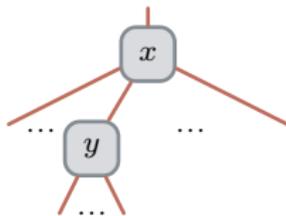


Commutativité :

$$(x \circ_i y)$$

$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$

$$1 \leq i < j \leq n$$



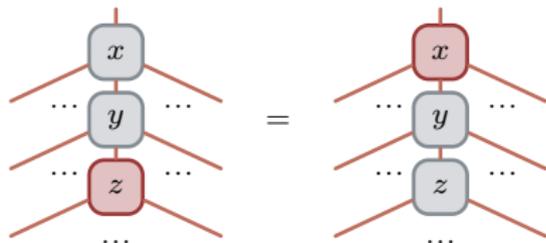
Axiomes des opérades

Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$

$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$

$$i \in [n], j \in [m]$$

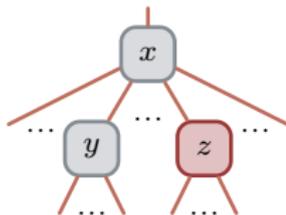


Commutativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{j+m-1} z$$

$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$

$$1 \leq i < j \leq n$$



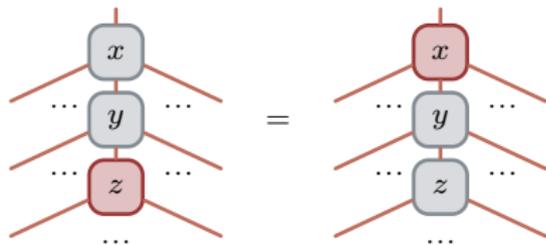
Axiomes des opérades

Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$

$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$

$$i \in [n], j \in [m]$$

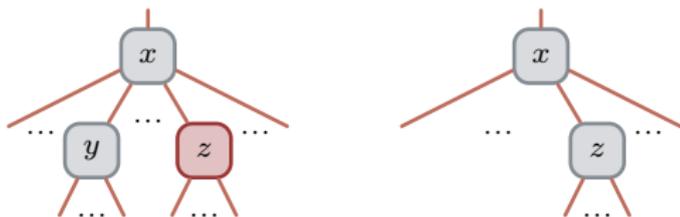


Commutativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{j+m-1} z = (x \circ_j z)$$

$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$

$$1 \leq i < j \leq n$$



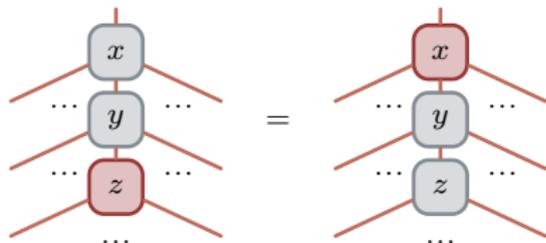
Axiomes des opérades

Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$

$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$

$$i \in [n], j \in [m]$$

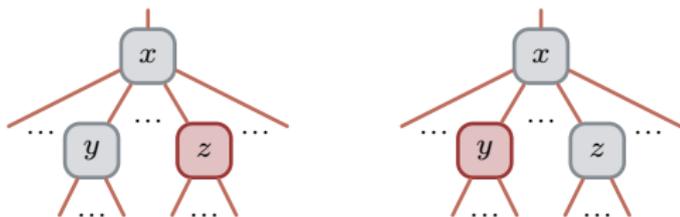


Commutativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{j+m-1} z = (x \circ_j z) \circ_i y$$

$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$

$$1 \leq i < j \leq n$$



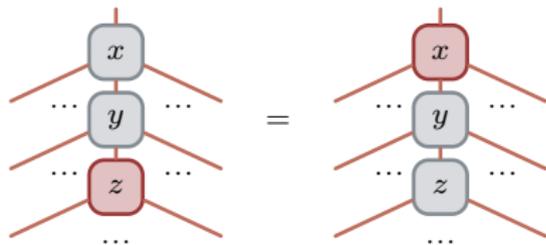
Axiomes des opérades

Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$

$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$

$$i \in [n], j \in [m]$$

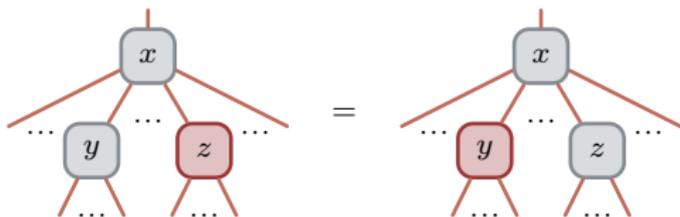


Commutativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{j+m-1} z = (x \circ_j z) \circ_i y$$

$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$

$$1 \leq i < j \leq n$$



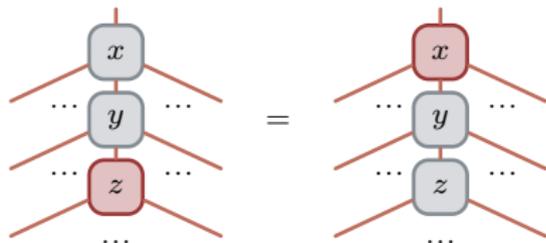
Axiomes des opérades

Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$

$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$

$$i \in [n], j \in [m]$$

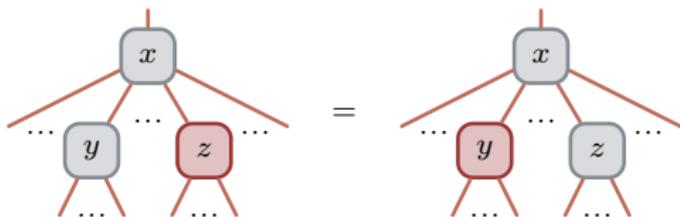


Commutativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{j+m-1} z = (x \circ_j z) \circ_i y$$

$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$

$$1 \leq i < j \leq n$$



Unitalité :

$$\mathbb{1} \circ_1 x = x = x \circ_i \mathbb{1}$$

$$x \in \mathcal{O}(n)$$

$$i \in [n]$$

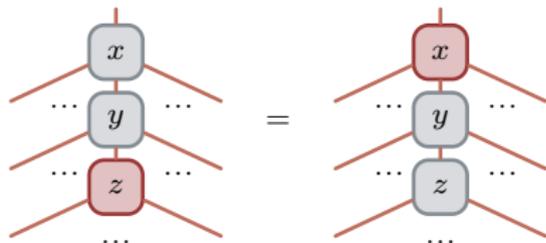
Axiomes des opérades

Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$

$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$

$$i \in [n], j \in [m]$$

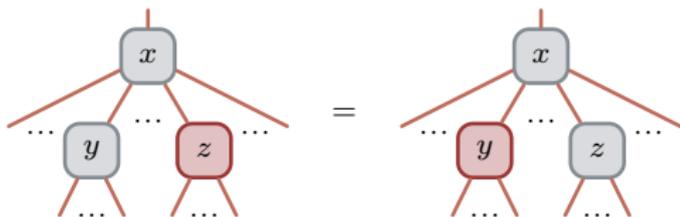


Commutativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{j+m-1} z = (x \circ_j z) \circ_i y$$

$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$

$$1 \leq i < j \leq n$$

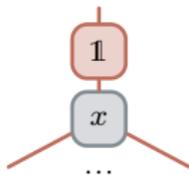


Unitalité :

$$\mathbb{1} \circ_1 x$$

$$x \in \mathcal{O}(n)$$

$$i \in [n]$$



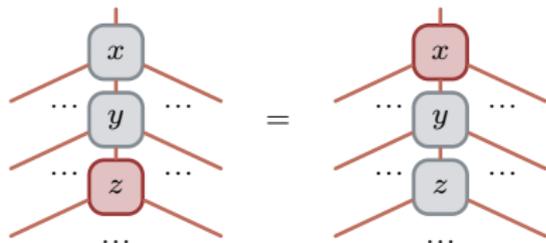
Axiomes des opérades

Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$

$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$

$$i \in [n], j \in [m]$$

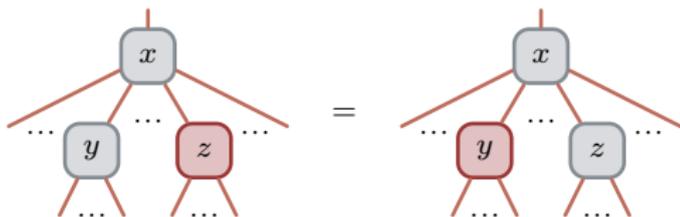


Commutativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{j+m-1} z = (x \circ_j z) \circ_i y$$

$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$

$$1 \leq i < j \leq n$$



Unitalité :

$$\mathbb{1} \circ_1 x = x$$

$$x \in \mathcal{O}(n)$$

$$i \in [n]$$



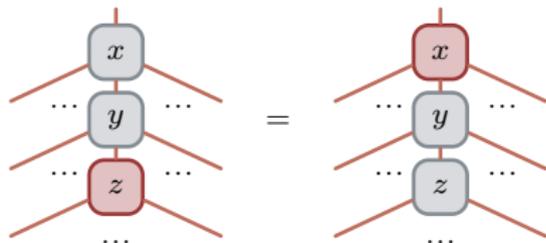
Axiomes des opérades

Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$

$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$

$$i \in [n], j \in [m]$$

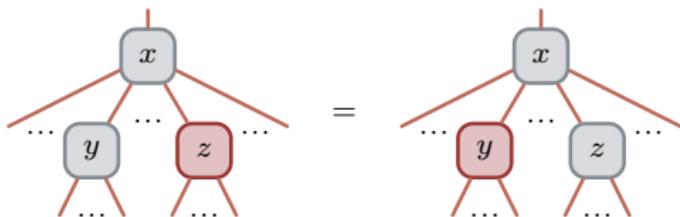


Commutativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{j+m-1} z = (x \circ_j z) \circ_i y$$

$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$

$$1 \leq i < j \leq n$$

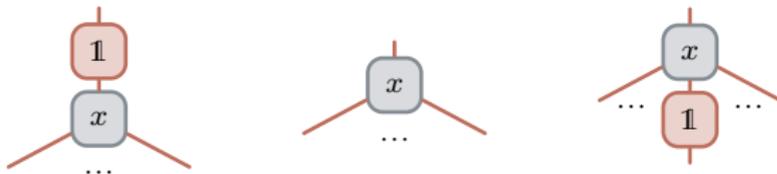


Unitalité :

$$\mathbb{1} \circ_1 x \quad x \quad x \circ_i \mathbb{1}$$

$$x \in \mathcal{O}(n)$$

$$i \in [n]$$



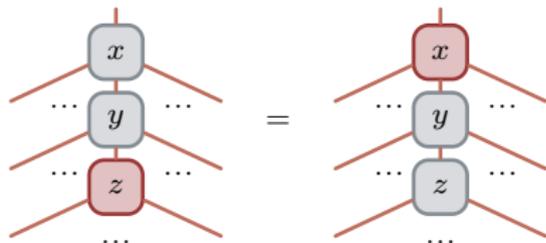
Axiomes des opérades

Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$

$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$

$$i \in [n], j \in [m]$$

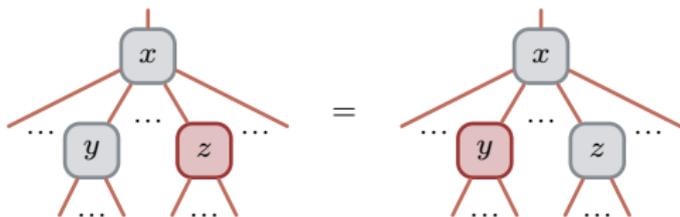


Commutativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{j+m-1} z = (x \circ_j z) \circ_i y$$

$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$

$$1 \leq i < j \leq n$$

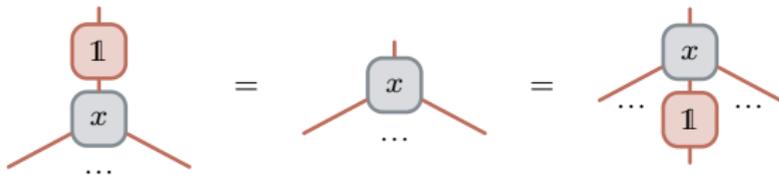


Unitalité :

$$\mathbb{1} \circ_1 x = x = x \circ_i \mathbb{1}$$

$$x \in \mathcal{O}(n)$$

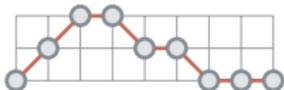
$$i \in [n]$$



Exemple : une opérade de chemins de Motzkin

L'opérade **Motz** est définie par :

- **Motz**(n) est l'espace engendré par les chemins de Motzkin ayant $n - 1$ pas. P.ex.,

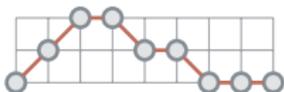


est un chemin de Motzkin
d'arité 9;

Exemple : une opérade de chemins de Motzkin

L'opérade **Motz** est définie par :

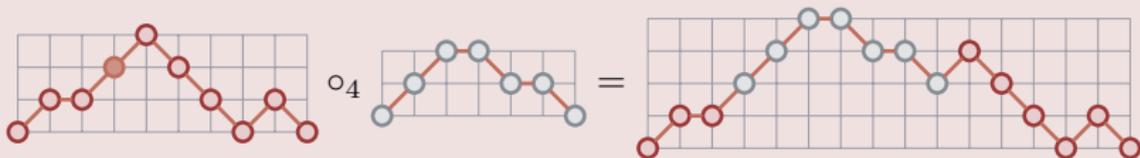
- **Motz**(n) est l'espace engendré par les chemins de Motzkin ayant $n - 1$ pas. P.ex.,



est un chemin de Motzkin
d'arité 9;

- la composition partielle $x \circ_i y$ de deux chemins de Motzkin consiste à insérer y dans le i^{e} point de x ;

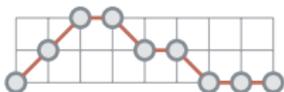
Exemple



Exemple : une opérade de chemins de Motzkin

L'opérade **Motz** est définie par :

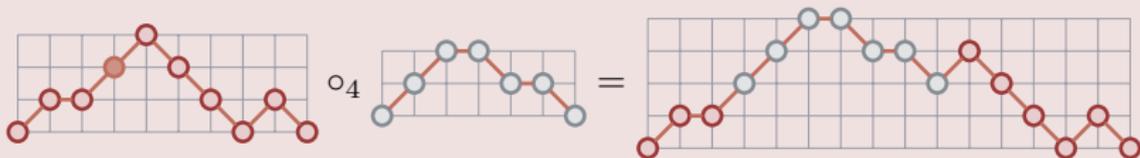
- ▶ **Motz**(n) est l'espace engendré par les chemins de Motzkin ayant $n - 1$ pas. P.ex.,



est un chemin de Motzkin
d'arité 9;

- ▶ la composition partielle $x \circ_i y$ de deux chemins de Motzkin consiste à insérer y dans le i^{e} point de x ;
- ▶ l'unité est le chemin \circ fait de 0 pas.

Exemple



Exemple : propriétés de Motz

1. Série de Hilbert :

$$\mathcal{H}_{\text{Motz}}(t) = t + t^2 + 2t^3 + 4t^4 + 9t^5 + 21t^6 + 51t^7 + 127t^8 + \dots$$

(les coefficients forment la suite **A001006**).

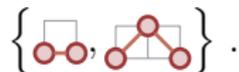
Exemple : propriétés de Motz

1. Série de Hilbert :

$$\mathcal{H}_{\text{Motz}}(t) = t + t^2 + 2t^3 + 4t^4 + 9t^5 + 21t^6 + 51t^7 + 127t^8 + \dots$$

(les coefficients forment la suite **A001006**).

2. Famille génératrice minimale :



Exemple : propriétés de Motz

1. Série de Hilbert :

$$\mathcal{H}_{\text{Motz}}(t) = t + t^2 + 2t^3 + 4t^4 + 9t^5 + 21t^6 + 51t^7 + 127t^8 + \dots$$

(les coefficients forment la suite **A001006**).

2. Famille génératrice minimale :

$$\left\{ \begin{array}{c} \square \\ \circ - \circ \end{array}, \begin{array}{c} \circ \\ \circ - \circ \\ \circ \end{array} \right\} .$$

3. Relations non triviales :

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} \square \\ \circ - \circ \end{array} \circ_1 \begin{array}{c} \square \\ \circ - \circ \end{array} = \begin{array}{c} \square \\ \circ - \circ \end{array} \circ_2 \begin{array}{c} \square \\ \circ - \circ \end{array}, \\ \begin{array}{c} \circ \\ \circ - \circ \\ \circ \end{array} \circ_1 \begin{array}{c} \square \\ \circ - \circ \end{array} = \begin{array}{c} \square \\ \circ - \circ \end{array} \circ_2 \begin{array}{c} \circ \\ \circ - \circ \\ \circ \end{array}, \\ \begin{array}{c} \square \\ \circ - \circ \end{array} \circ_1 \begin{array}{c} \circ \\ \circ - \circ \\ \circ \end{array} = \begin{array}{c} \circ \\ \circ - \circ \\ \circ \end{array} \circ_3 \begin{array}{c} \square \\ \circ - \circ \end{array}, \\ \begin{array}{c} \circ \\ \circ - \circ \\ \circ \end{array} \circ_1 \begin{array}{c} \circ \\ \circ - \circ \\ \circ \end{array} = \begin{array}{c} \circ \\ \circ - \circ \\ \circ \end{array} \circ_3 \begin{array}{c} \circ \\ \circ - \circ \\ \circ \end{array}. \end{array}$$

Opérades libres

Soit $\mathfrak{G} := \sqcup_{n \geq 1} \mathfrak{G}(n)$ un ensemble gradué

Opérades libres

Soit $\mathfrak{G} := \sqcup_{n \geq 1} \mathfrak{G}(n)$ un ensemble gradué

L'opérade libre sur \mathfrak{G} est l'opérade $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})$ telle que :

- ▶ $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})(n)$ est l'espace des arbres syntaxiques sur \mathfrak{G} avec n feuilles ;
- ▶ la composition partielle est une greffe d'arbres ;
- ▶ l'unité est l'arbre fait d'une feuille.

Opérades libres

Soit $\mathfrak{G} := \sqcup_{n \geq 1} \mathfrak{G}(n)$ un ensemble gradué

L'opérade libre sur \mathfrak{G} est l'opérade $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})$ telle que :

- ▶ $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})(n)$ est l'espace des arbres syntaxiques sur \mathfrak{G} avec n feuilles ;
- ▶ la composition partielle est une greffe d'arbres ;
- ▶ l'unité est l'arbre fait d'une feuille.

Exemple

Soit $\mathfrak{G} := \mathfrak{G}(2) \sqcup \mathfrak{G}(3)$ avec $\mathfrak{G}(2) := \{a, b\}$ et $\mathfrak{G}(3) := \{c\}$.

Opérades libres

Soit $\mathfrak{G} := \sqcup_{n \geq 1} \mathfrak{G}(n)$ un ensemble gradué

L'opérade libre sur \mathfrak{G} est l'opérade $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})$ telle que :

- ▶ $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})(n)$ est l'espace des arbres syntaxiques sur \mathfrak{G} avec n feuilles;
- ▶ la composition partielle est une greffe d'arbres;
- ▶ l'unité est l'arbre fait d'une feuille.

Exemple

Soit $\mathfrak{G} := \mathfrak{G}(2) \sqcup \mathfrak{G}(3)$ avec $\mathfrak{G}(2) := \{a, b\}$ et $\mathfrak{G}(3) := \{c\}$.

Les arbres syntaxiques de $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})(3)$ sont



Opérades libres

Soit $\mathfrak{G} := \sqcup_{n \geq 1} \mathfrak{G}(n)$ un ensemble gradué

L'opérade libre sur \mathfrak{G} est l'opérade $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})$ telle que :

- ▶ $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})(n)$ est l'espace des arbres syntaxiques sur \mathfrak{G} avec n feuilles;
- ▶ la composition partielle est une greffe d'arbres;
- ▶ l'unité est l'arbre fait d'une feuille.

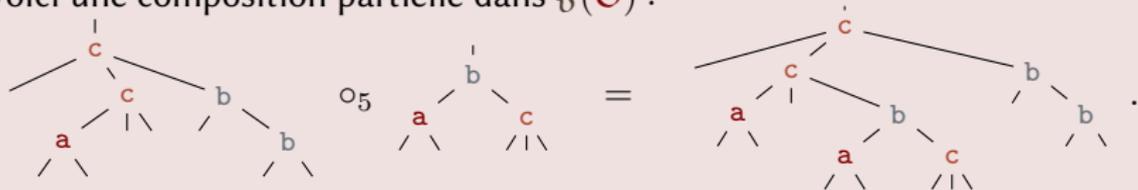
Exemple

Soit $\mathfrak{G} := \mathfrak{G}(2) \sqcup \mathfrak{G}(3)$ avec $\mathfrak{G}(2) := \{a, b\}$ et $\mathfrak{G}(3) := \{c\}$.

Les arbres syntaxiques de $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})(3)$ sont



Voici une composition partielle dans $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})$:



Quotients d'opéades libres

Un sous-espace \mathcal{V} de $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})$ est un idéal d'opéade de $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})$ si

$x \in \mathfrak{F}(\mathfrak{G})$ et $y \in \mathcal{V}$ impliquent $x \circ_i y \in \mathcal{V}$ et $y \circ_j x \in \mathcal{V}$.

Quotients d'opérides libres

Un sous-espace \mathcal{V} de $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})$ est un idéal d'opéride de $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})$ si

$$x \in \mathfrak{F}(\mathfrak{G}) \text{ et } y \in \mathcal{V} \quad \text{impliquent} \quad x \circ_i y \in \mathcal{V} \text{ et } y \circ_j x \in \mathcal{V}.$$

L'opéride quotient $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})/\mathcal{V}$ est définie de manière habituelle.

Quotients d'opéades libres

Un sous-espace \mathcal{V} de $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})$ est un **idéal d'opéade** de $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})$ si

$$x \in \mathfrak{F}(\mathfrak{G}) \text{ et } y \in \mathcal{V} \quad \text{impliquent} \quad x \circ_i y \in \mathcal{V} \text{ et } y \circ_j x \in \mathcal{V}.$$

L'**opéade quotient** $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})/\mathcal{V}$ est définie de manière habituelle.

Exemple

Soit $\mathfrak{G} := \mathfrak{G}(2)$ avec $\mathfrak{G}(2) := \{a\}$.

$\mathfrak{F}(\mathfrak{G})$ est l'**opéade magmatique** (espace des arbres binaires).

Quotients d'opérides libres

Un sous-espace \mathcal{V} de $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})$ est un **idéal d'opéride** de $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})$ si

$$x \in \mathfrak{F}(\mathfrak{G}) \text{ et } y \in \mathcal{V} \quad \text{impliquent} \quad x \circ_i y \in \mathcal{V} \text{ et } y \circ_j x \in \mathcal{V}.$$

L'**opéride quotient** $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})/\mathcal{V}$ est définie de manière habituelle.

Exemple

Soit $\mathfrak{G} := \mathfrak{G}(2)$ avec $\mathfrak{G}(2) := \{a\}$.

$\mathfrak{F}(\mathfrak{G})$ est l'**opéride magmatique** (espace des arbres binaires).

Soit \mathcal{V} l'idéal d'opérides $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})$ engendré par

$$a \circ_1 a - a \circ_2 a.$$

Quotients d'opérades libres

Un sous-espace \mathcal{V} de $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})$ est un **idéal d'opérade** de $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})$ si

$$x \in \mathfrak{F}(\mathfrak{G}) \text{ et } y \in \mathcal{V} \quad \text{impliquent} \quad x \circ_i y \in \mathcal{V} \text{ et } y \circ_j x \in \mathcal{V}.$$

L'**opérade quotient** $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})/\mathcal{V}$ est définie de manière habituelle.

Exemple

Soit $\mathfrak{G} := \mathfrak{G}(2)$ avec $\mathfrak{G}(2) := \{a\}$.

$\mathfrak{F}(\mathfrak{G})$ est l'**opérade magmatique** (espace des arbres binaires).

Soit \mathcal{V} l'idéal d'opérades $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})$ engendré par

$$a \circ_1 a - a \circ_2 a.$$

Comme dans $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})/\mathcal{V}$, les arbres syntaxiques $a \circ_1 a$ et $a \circ_2 a$ sont équivalents, $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})/\mathcal{V}$ est l'espace des peignes gauches.

Quotients d'opérades libres

Un sous-espace \mathcal{V} de $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})$ est un **idéal d'opérade** de $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})$ si

$$x \in \mathfrak{F}(\mathfrak{G}) \text{ et } y \in \mathcal{V} \quad \text{impliquent} \quad x \circ_i y \in \mathcal{V} \text{ et } y \circ_j x \in \mathcal{V}.$$

L'**opérade quotient** $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})/\mathcal{V}$ est définie de manière habituelle.

Exemple

Soit $\mathfrak{G} := \mathfrak{G}(2)$ avec $\mathfrak{G}(2) := \{a\}$.

$\mathfrak{F}(\mathfrak{G})$ est l'**opérade magmatique** (espace des arbres binaires).

Soit \mathcal{V} l'idéal d'opérades $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})$ engendré par

$$a \circ_1 a - a \circ_2 a.$$

Comme dans $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})/\mathcal{V}$, les arbres syntaxiques $a \circ_1 a$ et $a \circ_2 a$ sont équivalents, $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})/\mathcal{V}$ est l'espace des peignes gauches.

C'est l'**opérade associative** As .

Présentations d'opérades

Soit \mathcal{O} une opérade.

Présentations d'opérades

Soit \mathcal{O} une opérade.

Une **présentation** de \mathcal{O} est un couple $(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}}, \mathfrak{R}_{\mathcal{O}})$ tel que

- ▶ $\mathfrak{G}_{\mathcal{O}}$ est un ensemble gradué, appelé **ensemble générateur**;

Présentations d'opérades

Soit \mathcal{O} une opérade.

Une **présentation** de \mathcal{O} est un couple $(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}}, \mathfrak{R}_{\mathcal{O}})$ tel que

- ▶ $\mathfrak{G}_{\mathcal{O}}$ est un ensemble gradué, appelé **ensemble générateur** ;
- ▶ $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}}$ est un sous-espace de $\mathfrak{F}(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}})$, appelé **espace des relations** ;

Présentations d'opérades

Soit \mathcal{O} une opérade.

Une **présentation** de \mathcal{O} est un couple $(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}}, \mathfrak{R}_{\mathcal{O}})$ tel que

- ▶ $\mathfrak{G}_{\mathcal{O}}$ est un ensemble gradué, appelé **ensemble générateur**;
- ▶ $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}}$ est un sous-espace de $\mathfrak{F}(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}})$, appelé **espace des relations**;

tel que

$$\mathcal{O} \simeq \mathfrak{F}(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}}) / \langle \mathfrak{R}_{\mathcal{O}} \rangle,$$

où $\langle \mathfrak{R}_{\mathcal{O}} \rangle$ est l'idéal d'opérade engendré par $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}}$.

Présentations d'opérades

Soit \mathcal{O} une opérade.

Une **présentation** de \mathcal{O} est un couple $(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}}, \mathfrak{R}_{\mathcal{O}})$ tel que

- ▶ $\mathfrak{G}_{\mathcal{O}}$ est un ensemble gradué, appelé **ensemble générateur**;
- ▶ $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}}$ est un sous-espace de $\mathfrak{F}(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}})$, appelé **espace des relations**;

tel que

$$\mathcal{O} \simeq \mathfrak{F}(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}}) / \langle \mathfrak{R}_{\mathcal{O}} \rangle,$$

où $\langle \mathfrak{R}_{\mathcal{O}} \rangle$ est l'idéal d'opérade engendré par $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}}$.

La présentation $(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}}, \mathfrak{R}_{\mathcal{O}})$ est

- ▶ **binaire** quand tous les élément de $\mathfrak{G}_{\mathcal{O}}$ sont d'arité 2;

Présentations d'opérades

Soit \mathcal{O} une opérade.

Une **présentation** de \mathcal{O} est un couple $(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}}, \mathfrak{R}_{\mathcal{O}})$ tel que

- ▶ $\mathfrak{G}_{\mathcal{O}}$ est un ensemble gradué, appelé **ensemble générateur**;
- ▶ $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}}$ est un sous-espace de $\mathfrak{F}(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}})$, appelé **espace des relations**;

tel que

$$\mathcal{O} \simeq \mathfrak{F}(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}}) / \langle \mathfrak{R}_{\mathcal{O}} \rangle,$$

où $\langle \mathfrak{R}_{\mathcal{O}} \rangle$ est l'idéal d'opérade engendré par $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}}$.

La présentation $(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}}, \mathfrak{R}_{\mathcal{O}})$ est

- ▶ **binaire** quand tous les éléments de $\mathfrak{G}_{\mathcal{O}}$ sont d'arité 2;
- ▶ **quadratique** quand toutes les éléments de $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}}$ ne font intervenir que des arbres syntaxiques à deux nœuds internes.

Exemples : présentations de Motz et de DA.

Exemple

Motz admet la présentation $(\mathcal{G}_{\text{Motz}}, \mathfrak{R}_{\text{Motz}})$ où

$\mathcal{G}_{\text{Motz}} := \mathcal{G}_{\text{Motz}}(2) \sqcup \mathcal{G}_{\text{Motz}}(3) := \{a\} \sqcup \{b\}$ et $\mathfrak{R}_{\text{Motz}}$ est l'espace engendré par

$$a \circ_1 a - a \circ_2 a, \quad b \circ_1 a - a \circ_2 b, \quad a \circ_1 b - b \circ_3 a, \quad b \circ_1 b - b \circ_3 b.$$

Cette présentation est **non binaire** (b est d'arité 3) mais est **quadratique**.

Exemples : présentations de Motz et de DA.

Exemple

Motz admet la présentation $(\mathcal{G}_{\text{Motz}}, \mathfrak{R}_{\text{Motz}})$ où

$\mathcal{G}_{\text{Motz}} := \mathcal{G}_{\text{Motz}}(2) \sqcup \mathcal{G}_{\text{Motz}}(3) := \{a\} \sqcup \{b\}$ et $\mathfrak{R}_{\text{Motz}}$ est l'espace engendré par

$$a \circ_1 a - a \circ_2 a, \quad b \circ_1 a - a \circ_2 b, \quad a \circ_1 b - b \circ_3 a, \quad b \circ_1 b - b \circ_3 b.$$

Cette présentation est **non binaire** (b est d'arité 3) mais est **quadratique**.

Exemple

L'opérate **DA** des **animaux dirigés** admet la présentation $(\mathcal{G}_{\text{DA}}, \mathfrak{R}_{\text{DA}})$ où

$\mathcal{G}_{\text{DA}} := \mathcal{G}_{\text{DA}}(2) := \{a, b\}$ et \mathfrak{R}_{DA} est l'espace engendré par

$$a \circ_1 a - a \circ_2 a, \quad b \circ_1 a - a \circ_2 b, \quad b \circ_1 b - b \circ_2 a, \quad (a \circ_1 b) \circ_2 b - (b \circ_2 b) \circ_3 b.$$

Cette présentation est **binaire** et **non quadratique** (la dernière relation porte sur des arbres syntaxiques ayant trois nœuds internes).

Opérades de Koszul

\mathcal{O} est une opérade de Koszul si son complexe de Koszul est acyclique.

Opérades de Koszul

\mathcal{O} est une **opérade de Koszul** si son complexe de Koszul est acyclique.

Cette propriété est vérifiée dès qu'il existe une orientation \rightarrow des relations de $\mathfrak{K}_{\mathcal{O}}$ de sorte que \rightarrow soit une **règle de réécriture convergente** sur les arbres de $\mathfrak{F}(\mathcal{G}_{\mathcal{O}})$ [Hoffbeck, 2010].

Opérades de Koszul

\mathcal{O} est une **opérade de Koszul** si son complexe de Koszul est acyclique. Cette propriété est vérifiée dès qu'il existe une orientation \rightarrow des relations de $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}}$ de sorte que \rightarrow soit une **règle de réécriture convergente** sur les arbres de $\mathfrak{F}(\mathcal{G}_{\mathcal{O}})$ [Hoffbeck, 2010].

Exemple

On rappelle que **Motz** admet la présentation $(\mathcal{G}_{\text{Motz}}, \mathfrak{R}_{\text{Motz}})$ où

$\mathcal{G}_{\text{Motz}} := \mathcal{G}_{\text{Motz}}(2) \sqcup \mathcal{G}_{\text{Motz}}(3) := \{a\} \sqcup \{b\}$ et $\mathfrak{R}_{\text{Motz}}$ est l'espace engendré par

$$a \circ_1 a - a \circ_2 a, \quad b \circ_1 a - a \circ_2 b, \quad a \circ_1 b - b \circ_3 a, \quad b \circ_1 b - b \circ_3 b.$$

Opérades de Koszul

\mathcal{O} est une **opérade de Koszul** si son complexe de Koszul est acyclique. Cette propriété est vérifiée dès qu'il existe une orientation \rightarrow des relations de $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}}$ de sorte que \rightarrow soit une **règle de réécriture convergente** sur les arbres de $\mathfrak{F}(\mathcal{G}_{\mathcal{O}})$ [Hoffbeck, 2010].

Exemple

On rappelle que **Motz** admet la présentation $(\mathcal{G}_{\text{Motz}}, \mathfrak{R}_{\text{Motz}})$ où

$\mathcal{G}_{\text{Motz}} := \mathcal{G}_{\text{Motz}}(2) \sqcup \mathcal{G}_{\text{Motz}}(3) := \{a\} \sqcup \{b\}$ et $\mathfrak{R}_{\text{Motz}}$ est l'espace engendré par

$$a \circ_1 a - a \circ_2 a, \quad b \circ_1 a - a \circ_2 b, \quad a \circ_1 b - b \circ_3 a, \quad b \circ_1 b - b \circ_3 b.$$

Pour démontrer que **Motz** est de Koszul, on considère la règle de réécriture \rightarrow définie par

$$a \circ_1 a \rightarrow a \circ_2 a, \quad b \circ_1 a \rightarrow a \circ_2 b, \quad a \circ_1 b \rightarrow b \circ_3 a, \quad b \circ_1 b \rightarrow b \circ_3 b.$$

Opérades de Koszul

\mathcal{O} est une **opérade de Koszul** si son complexe de Koszul est acyclique. Cette propriété est vérifiée dès qu'il existe une orientation \rightarrow des relations de $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}}$ de sorte que \rightarrow soit une **règle de réécriture convergente** sur les arbres de $\mathfrak{F}(\mathcal{G}_{\mathcal{O}})$ [Hoffbeck, 2010].

Exemple

On rappelle que **Motz** admet la présentation $(\mathcal{G}_{\text{Motz}}, \mathfrak{R}_{\text{Motz}})$ où $\mathcal{G}_{\text{Motz}} := \mathcal{G}_{\text{Motz}}(2) \sqcup \mathcal{G}_{\text{Motz}}(3) := \{a\} \sqcup \{b\}$ et $\mathfrak{R}_{\text{Motz}}$ est l'espace engendré par

$$a \circ_1 a - a \circ_2 a, \quad b \circ_1 a - a \circ_2 b, \quad a \circ_1 b - b \circ_3 a, \quad b \circ_1 b - b \circ_3 b.$$

Pour démontrer que **Motz** est de Koszul, on considère la règle de réécriture \rightarrow définie par

$$a \circ_1 a \rightarrow a \circ_2 a, \quad b \circ_1 a \rightarrow a \circ_2 b, \quad a \circ_1 b \rightarrow b \circ_3 a, \quad b \circ_1 b \rightarrow b \circ_3 b.$$

Voici quelques réécritures par \rightarrow :



Opérades de Koszul

\mathcal{O} est une **opérade de Koszul** si son complexe de Koszul est acyclique.

Cette propriété est vérifiée dès qu'il existe une orientation \rightarrow des relations de $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}}$ de sorte que \rightarrow soit une **règle de réécriture convergente** sur les arbres de $\mathfrak{F}(\mathcal{G}_{\mathcal{O}})$ [Hoffbeck, 2010].

Exemple

On rappelle que **Motz** admet la présentation $(\mathcal{G}_{\text{Motz}}, \mathfrak{R}_{\text{Motz}})$ où

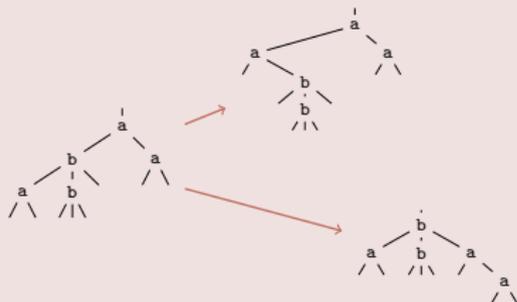
$\mathcal{G}_{\text{Motz}} := \mathcal{G}_{\text{Motz}}(2) \sqcup \mathcal{G}_{\text{Motz}}(3) := \{a\} \sqcup \{b\}$ et $\mathfrak{R}_{\text{Motz}}$ est l'espace engendré par

$$a \circ_1 a - a \circ_2 a, \quad b \circ_1 a - a \circ_2 b, \quad a \circ_1 b - b \circ_3 a, \quad b \circ_1 b - b \circ_3 b.$$

Pour démontrer que **Motz** est de Koszul, on considère la règle de réécriture \rightarrow définie par

$$a \circ_1 a \rightarrow a \circ_2 a, \quad b \circ_1 a \rightarrow a \circ_2 b, \quad a \circ_1 b \rightarrow b \circ_3 a, \quad b \circ_1 b \rightarrow b \circ_3 b.$$

Voici quelques réécritures par \rightarrow :



Opérades de Koszul

\mathcal{O} est une **opérade de Koszul** si son complexe de Koszul est acyclique. Cette propriété est vérifiée dès qu'il existe une orientation \rightarrow des relations de $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}}$ de sorte que \rightarrow soit une **règle de réécriture convergente** sur les arbres de $\mathfrak{F}(\mathcal{G}_{\mathcal{O}})$ [Hoffbeck, 2010].

Exemple

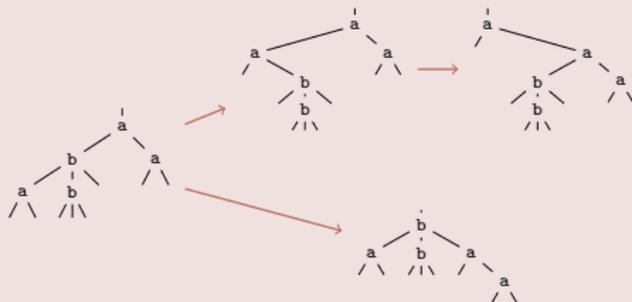
On rappelle que **Motz** admet la présentation $(\mathcal{G}_{\text{Motz}}, \mathfrak{R}_{\text{Motz}})$ où $\mathcal{G}_{\text{Motz}} := \mathcal{G}_{\text{Motz}}(2) \sqcup \mathcal{G}_{\text{Motz}}(3) := \{a\} \sqcup \{b\}$ et $\mathfrak{R}_{\text{Motz}}$ est l'espace engendré par

$$a \circ_1 a - a \circ_2 a, \quad b \circ_1 a - a \circ_2 b, \quad a \circ_1 b - b \circ_3 a, \quad b \circ_1 b - b \circ_3 b.$$

Pour démontrer que **Motz** est de Koszul, on considère la règle de réécriture \rightarrow définie par

$$a \circ_1 a \rightarrow a \circ_2 a, \quad b \circ_1 a \rightarrow a \circ_2 b, \quad a \circ_1 b \rightarrow b \circ_3 a, \quad b \circ_1 b \rightarrow b \circ_3 b.$$

Voici quelques réécritures par \rightarrow :



Opérades de Koszul

\mathcal{O} est une **opérade de Koszul** si son complexe de Koszul est acyclique.

Cette propriété est vérifiée dès qu'il existe une orientation \rightarrow des relations de $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}}$ de sorte que \rightarrow soit une **règle de réécriture convergente** sur les arbres de $\mathfrak{F}(\mathcal{G}_{\mathcal{O}})$ [Hoffbeck, 2010].

Exemple

On rappelle que **Motz** admet la présentation $(\mathcal{G}_{\text{Motz}}, \mathfrak{R}_{\text{Motz}})$ où

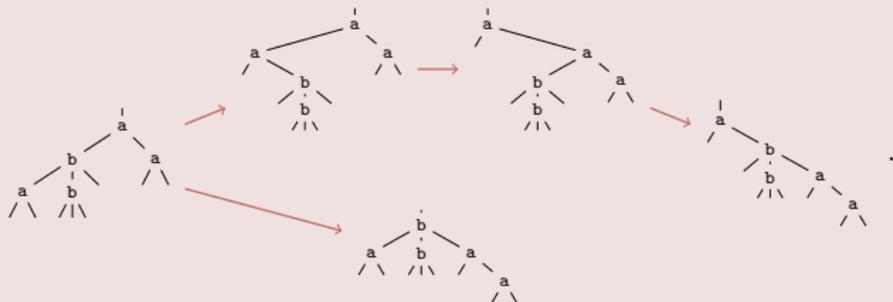
$\mathcal{G}_{\text{Motz}} := \mathcal{G}_{\text{Motz}}(2) \sqcup \mathcal{G}_{\text{Motz}}(3) := \{a\} \sqcup \{b\}$ et $\mathfrak{R}_{\text{Motz}}$ est l'espace engendré par

$$a \circ_1 a - a \circ_2 a, \quad b \circ_1 a - a \circ_2 b, \quad a \circ_1 b - b \circ_3 a, \quad b \circ_1 b - b \circ_3 b.$$

Pour démontrer que **Motz** est de Koszul, on considère la règle de réécriture \rightarrow définie par

$$a \circ_1 a \rightarrow a \circ_2 a, \quad b \circ_1 a \rightarrow a \circ_2 b, \quad a \circ_1 b \rightarrow b \circ_3 a, \quad b \circ_1 b \rightarrow b \circ_3 b.$$

Voici quelques réécritures par \rightarrow :



Opérades de Koszul

\mathcal{O} est une **opérade de Koszul** si son complexe de Koszul est acyclique.

Cette propriété est vérifiée dès qu'il existe une orientation \rightarrow des relations de $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}}$ de sorte que \rightarrow soit une **règle de réécriture convergente** sur les arbres de $\mathfrak{F}(\mathcal{G}_{\mathcal{O}})$ [Hoffbeck, 2010].

Exemple

On rappelle que **Motz** admet la présentation $(\mathcal{G}_{\text{Motz}}, \mathfrak{R}_{\text{Motz}})$ où

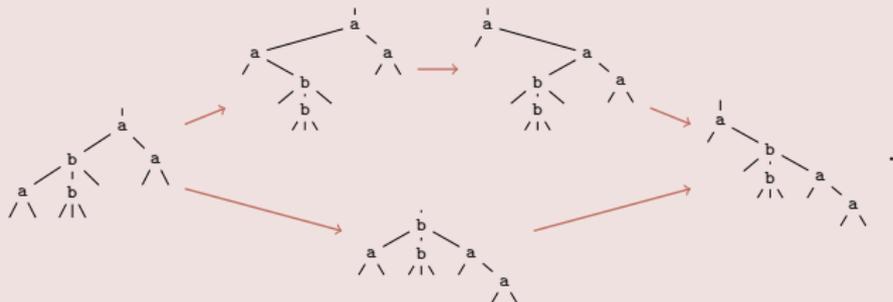
$\mathcal{G}_{\text{Motz}} := \mathcal{G}_{\text{Motz}}(2) \sqcup \mathcal{G}_{\text{Motz}}(3) := \{a\} \sqcup \{b\}$ et $\mathfrak{R}_{\text{Motz}}$ est l'espace engendré par

$$a \circ_1 a - a \circ_2 a, \quad b \circ_1 a - a \circ_2 b, \quad a \circ_1 b - b \circ_3 a, \quad b \circ_1 b - b \circ_3 b.$$

Pour démontrer que **Motz** est de Koszul, on considère la règle de réécriture \rightarrow définie par

$$a \circ_1 a \rightarrow a \circ_2 a, \quad b \circ_1 a \rightarrow a \circ_2 b, \quad a \circ_1 b \rightarrow b \circ_3 a, \quad b \circ_1 b \rightarrow b \circ_3 b.$$

Voici quelques réécritures par \rightarrow :



Dualité de Koszul

Soit \mathcal{O} une opérade binaire et quadratique de présentation $(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}}, \mathfrak{R}_{\mathcal{O}})$.

Dualité de Koszul

Soit \mathcal{O} une opérade binaire et quadratique de présentation $(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}}, \mathfrak{R}_{\mathcal{O}})$.

Le **dual de Koszul** [Ginzburg, Kapranov, 1994] de \mathcal{O} est l'opérade $\mathcal{O}^!$ de présentation $(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}}, \mathfrak{R}_{\mathcal{O}}^{\perp})$ où $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}}^{\perp}$ est l'annihilateur de $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}}$

Dualité de Koszul

Soit \mathcal{O} une opérade binaire et quadratique de présentation $(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}}, \mathfrak{R}_{\mathcal{O}})$.

Le **dual de Koszul** [Ginzburg, Kapranov, 1994] de \mathcal{O} est l'opérade $\mathcal{O}^!$ de présentation $(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}}, \mathfrak{R}_{\mathcal{O}}^{\perp})$ où $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}}^{\perp}$ est l'annihlateur de $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}}$ par rapport au produit scalaire

$$\langle -, - \rangle : \mathfrak{F}(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}})(3) \otimes \mathfrak{F}(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}})(3) \rightarrow \mathbb{K}$$

Dualité de Koszul

Soit \mathcal{O} une opérade binaire et quadratique de présentation $(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}}, \mathfrak{R}_{\mathcal{O}})$.

Le **dual de Koszul** [Ginzburg, Kapranov, 1994] de \mathcal{O} est l'opérade $\mathcal{O}^!$ de présentation $(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}}, \mathfrak{R}_{\mathcal{O}}^{\perp})$ où $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}}^{\perp}$ est l'annihilateur de $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}}$ par rapport au produit scalaire

$$\langle -, - \rangle : \mathfrak{F}(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}})(3) \otimes \mathfrak{F}(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}})(3) \rightarrow \mathbb{K}$$

défini linéairement pour tous $x, x', y, y' \in \mathfrak{G}_{\mathcal{O}}(2)$, par

$$\langle x \circ_i y, x' \circ_{i'} y' \rangle := \begin{cases} 1 & \text{si } x = x', y = y', \text{ et } i = i' = 1, \\ -1 & \text{si } x = x', y = y', \text{ et } i = i' = 2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dualité de Koszul

Soit \mathcal{O} une opérade binaire et quadratique de présentation $(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}}, \mathfrak{R}_{\mathcal{O}})$.

Le **dual de Koszul** [Ginzburg, Kapranov, 1994] de \mathcal{O} est l'opérade $\mathcal{O}^!$ de présentation $(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}}, \mathfrak{R}_{\mathcal{O}}^{\perp})$ où $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}}^{\perp}$ est l'annihilateur de $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}}$ par rapport au produit scalaire

$$\langle -, - \rangle : \mathfrak{F}(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}})(3) \otimes \mathfrak{F}(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}})(3) \rightarrow \mathbb{K}$$

défini linéairement pour tous $x, x', y, y' \in \mathfrak{G}_{\mathcal{O}}(2)$, par

$$\langle x \circ_i y, x' \circ_{i'} y' \rangle := \begin{cases} 1 & \text{si } x = x', y = y', \text{ et } i = i' = 1, \\ -1 & \text{si } x = x', y = y', \text{ et } i = i' = 2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi, à partir d'une présentation de \mathcal{O} , on calcule une présentation de $\mathcal{O}^!$.

Propriétés de la dualité de Koszul

Théorème [Ginzburg, Kapranov, 1994]

Pour toute opérade \mathcal{O} admettant une présentation binaire et quadratique,

$$\mathcal{O}^{!!} = \mathcal{O}.$$

Propriétés de la dualité de Koszul

Théorème [Ginzburg, Kapranov, 1994]

Pour toute opérade \mathcal{O} admettant une présentation binaire et quadratique,

$$\mathcal{O}^{!!} = \mathcal{O}.$$

Théorème [Ginzburg, Kapranov, 1994]

Lorsque \mathcal{O} est une **opérade de Koszul** admettant une présentation binaire et quadratique, les séries de Hilbert de \mathcal{O} et $\mathcal{O}^!$ vérifient

$$\mathcal{H}_{\mathcal{O}}(-\mathcal{H}_{\mathcal{O}^!}(-t)) = t.$$

Propriétés de la dualité de Koszul

Théorème [Ginzburg, Kapranov, 1994]

Pour toute opérade \mathcal{O} admettant une présentation binaire et quadratique,

$$\mathcal{O}^{!!} = \mathcal{O}.$$

Théorème [Ginzburg, Kapranov, 1994]

Lorsque \mathcal{O} est une **opérade de Koszul** admettant une présentation binaire et quadratique, les séries de Hilbert de \mathcal{O} et $\mathcal{O}^!$ vérifient

$$\mathcal{H}_{\mathcal{O}}(-\mathcal{H}_{\mathcal{O}^!}(-t)) = t.$$

Ainsi, lorsque \mathcal{O} admet une présentation binaire et quadratique,

présentation de $\mathcal{O} \rightsquigarrow$ présentation de $\mathcal{O}^!$,

série de Hilbert de $\mathcal{O} \rightsquigarrow$ série de Hilbert de $\mathcal{O}^!$.

Plan

Opérateurs dendriformes

L'opérade dendriforme

L'opérade dendriforme \mathbf{Dendr} admet la présentation $(\mathfrak{G}_{\mathbf{Dendr}}, \mathfrak{R}_{\mathbf{Dendr}})$ où

$$\mathfrak{G}_{\mathbf{Dendr}} := \mathfrak{G}_{\mathbf{Dendr}}(2) := \{\prec, \succ\},$$

et $\mathfrak{R}_{\mathbf{Dendr}}$ est l'espace engendré par

$$\prec \circ_1 \succ - \succ \circ_2 \prec,$$

$$\prec \circ_1 \prec - \prec \circ_2 \prec - \prec \circ_2 \succ,$$

$$\succ \circ_1 \prec + \succ \circ_1 \succ - \succ \circ_2 \succ.$$

L'opérade dendriforme

L'opérade dendriforme \mathbf{Dendr} admet la présentation $(\mathcal{G}_{\mathbf{Dendr}}, \mathfrak{R}_{\mathbf{Dendr}})$ où

$$\mathcal{G}_{\mathbf{Dendr}} := \mathcal{G}_{\mathbf{Dendr}}(2) := \{\prec, \succ\},$$

et $\mathfrak{R}_{\mathbf{Dendr}}$ est l'espace engendré par

$$\prec \circ_1 \succ - \succ \circ_2 \prec,$$

$$\prec \circ_1 \prec - \prec \circ_2 \prec - \prec \circ_2 \succ,$$

$$\succ \circ_1 \prec + \succ \circ_1 \succ - \succ \circ_2 \succ.$$

Cette présentation est binaire et quadratique.

L'opérade dendriforme

L'opérade dendriforme \mathbf{Dendr} admet la présentation $(\mathcal{G}_{\mathbf{Dendr}}, \mathfrak{R}_{\mathbf{Dendr}})$ où

$$\mathcal{G}_{\mathbf{Dendr}} := \mathcal{G}_{\mathbf{Dendr}}(2) := \{\prec, \succ\},$$

et $\mathfrak{R}_{\mathbf{Dendr}}$ est l'espace engendré par

$$\prec \circ_1 \succ - \succ \circ_2 \prec,$$

$$\prec \circ_1 \prec - \prec \circ_2 \prec - \prec \circ_2 \succ,$$

$$\succ \circ_1 \prec + \succ \circ_1 \succ - \succ \circ_2 \succ.$$

Cette présentation est binaire et quadratique.

Théorème [Loday, 2001]

\mathbf{Dendr} est une opérade de Koszul.

Réalisation de Dendr

Soit $\mathbb{U} := \{u_1, u_2, \dots\}$ un alphabet infini de variables commutatives.

Réalisation de Dendr

Soit $\mathbb{U} := \{u_1, u_2, \dots\}$ un alphabet infini de variables commutatives.

L'espace des fonctions rationnelles $\mathbb{K}(\mathbb{U})$ admet la structure d'opérade [Loday, 2010] donnée par

$$f \circ_i g := f(u_1, \dots, u_{i-1}, u_i + \dots + u_{i+m-1}, u_{i+m}, \dots, u_{n+m-1}) g(u_i, \dots, u_{i+m-1}),$$

où $f \in \mathbb{K}(u_1, \dots, u_n)$ et $g \in \mathbb{K}(u_1, \dots, u_m)$.

Réalisation de Dendr

Soit $\mathbb{U} := \{u_1, u_2, \dots\}$ un alphabet infini de variables commutatives.

L'espace des fonctions rationnelles $\mathbb{K}(\mathbb{U})$ admet la structure d'opéade [Loday, 2010] donnée par

$$f \circ_i g := f(u_1, \dots, u_{i-1}, u_i + \dots + u_{i+m-1}, u_{i+m}, \dots, u_{n+m-1}) g(u_i, \dots, u_{i+m-1}),$$

où $f \in \mathbb{K}(u_1, \dots, u_n)$ et $g \in \mathbb{K}(u_1, \dots, u_m)$.

Exemple

$$\frac{1}{(u_1 + u_2)u_2} \circ_1 \frac{1}{u_1} = \frac{1}{u_1^2 u_3 + u_1 u_2 u_3 + u_1 u_3^2}$$

$\in \mathbb{K}(u_1, u_2, u_3) \quad \in \mathbb{K}(u_1, u_2) \quad \in \mathbb{K}(u_1, u_2, u_3, u_4)$

Réalisation de Dendr

Soit $\mathbb{U} := \{u_1, u_2, \dots\}$ un alphabet infini de variables commutatives.

L'espace des fonctions rationnelles $\mathbb{K}(\mathbb{U})$ admet la structure d'opéade [Loday, 2010] donnée par

$$f \circ_i g := f(u_1, \dots, u_{i-1}, u_i + \dots + u_{i+m-1}, u_{i+m}, \dots, u_{n+m-1}) g(u_i, \dots, u_{i+m-1}),$$

où $f \in \mathbb{K}(u_1, \dots, u_n)$ et $g \in \mathbb{K}(u_1, \dots, u_m)$.

Exemple

$$\frac{1}{(u_1 + u_2)u_2} \circ_1 \frac{1}{u_1} = \frac{1}{u_1^2 u_3 + u_1 u_2 u_3 + u_1 u_3^2}$$

$\in \mathbb{K}(u_1, u_2, u_3)$ $\in \mathbb{K}(u_1, u_2)$ $\in \mathbb{K}(u_1, u_2, u_3, u_4)$

Théorème [Loday, 2010]

Dendr est isomorphe à la sous-opéade de $\mathbb{K}(\mathbb{U})$ engendrée par

$$\frac{1}{u_1} \in \mathbb{K}(u_1, u_2) \text{ et } \frac{1}{u_2} \in \mathbb{K}(u_1, u_2).$$

Algèbres dendriformes libres

L'algèbre dendriforme libre sur un générateur est l'espace $\mathcal{F}_{\text{Dendr}}$ des arbres binaires à au moins un nœud interne, muni des deux opérations binaires

$$\prec, \succ : \mathcal{F}_{\text{Dendr}} \otimes \mathcal{F}_{\text{Dendr}} \rightarrow \mathcal{F}_{\text{Dendr}},$$

Algèbres dendriformes libres

L'algèbre dendriforme libre sur un générateur est l'espace $\mathcal{F}_{\text{Dendr}}$ des arbres binaires à au moins un nœud interne, muni des deux opérations binaires

$$\prec, \succ : \mathcal{F}_{\text{Dendr}} \otimes \mathcal{F}_{\text{Dendr}} \rightarrow \mathcal{F}_{\text{Dendr}},$$

définies récursivement, pour tout arbre binaire s à au moins un nœud interne et tous arbres binaires t_1 et t_2 par

$$s \prec \square := s =: \square \succ s,$$

$$\square \prec s := 0 =: s \succ \square,$$

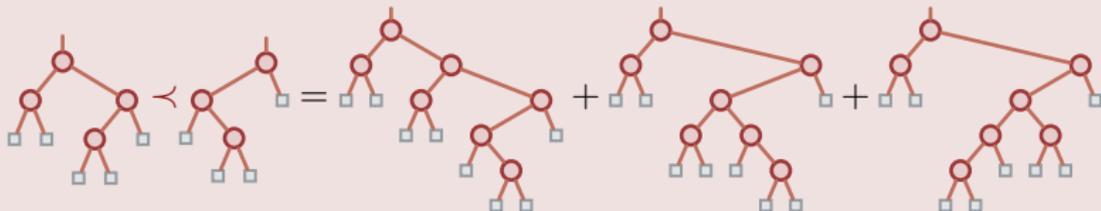
$$t_1 \begin{array}{c} \circ \\ \diagup \quad \diagdown \\ t_1 \quad t_2 \end{array} \prec s := t_1 \begin{array}{c} \circ \\ \diagup \quad \diagdown \\ t_1 \quad t_2 \prec s \end{array} + t_1 \begin{array}{c} \circ \\ \diagup \quad \diagdown \\ t_1 \quad t_2 \succ s \end{array},$$

$$s \succ t_1 \begin{array}{c} \circ \\ \diagup \quad \diagdown \\ t_1 \quad t_2 \end{array} := s \succ t_1 \begin{array}{c} \circ \\ \diagup \quad \diagdown \\ t_1 \quad t_2 \end{array} + s \prec t_1 \begin{array}{c} \circ \\ \diagup \quad \diagdown \\ t_1 \quad t_2 \end{array}.$$

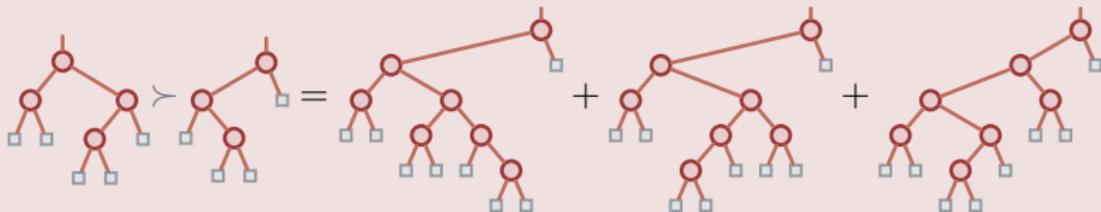
Ni $\square \prec \square$ ni $\square \succ \square$ ne sont définis.

Algèbres dendriformes libres

Exemple



Exemple



Opérate diassociative

L'opérate diassociative Dias [Loday, 2001] admet la présentation $(\mathcal{G}_{\text{Dias}}, \mathfrak{R}_{\text{Dias}})$ où

$$\mathcal{G}_{\text{Dias}} := \mathcal{G}_{\text{Dias}}(2) := \{\dashv, \vdash\},$$

et $\mathfrak{R}_{\text{Dias}}$ est l'espace engendré par

$$\dashv \circ_1 \vdash - \vdash \circ_2 \dashv,$$

$$\dashv \circ_1 \dashv - \dashv \circ_2 \dashv, \quad \dashv \circ_1 \dashv - \dashv \circ_2 \vdash,$$

$$\vdash \circ_1 \dashv - \vdash \circ_2 \vdash, \quad \vdash \circ_1 \vdash - \vdash \circ_2 \vdash.$$

Opérate diassociative

L'opérate diassociative Dias [Loday, 2001] admet la présentation $(\mathcal{G}_{\text{Dias}}, \mathfrak{R}_{\text{Dias}})$ où

$$\mathcal{G}_{\text{Dias}} := \mathcal{G}_{\text{Dias}}(2) := \{\dashv, \vdash\},$$

et $\mathfrak{R}_{\text{Dias}}$ est l'espace engendré par

$$\dashv \circ_1 \vdash - \vdash \circ_2 \dashv,$$

$$\dashv \circ_1 \dashv - \dashv \circ_2 \dashv, \quad \dashv \circ_1 \dashv - \dashv \circ_2 \vdash,$$

$$\vdash \circ_1 \dashv - \vdash \circ_2 \vdash, \quad \vdash \circ_1 \vdash - \vdash \circ_2 \vdash.$$

Cette présentation est binaire et quadratique.

Opérate diassociative

L'opérate diassociative Dias [Loday, 2001] admet la présentation $(\mathcal{G}_{\text{Dias}}, \mathfrak{K}_{\text{Dias}})$ où

$$\mathcal{G}_{\text{Dias}} := \mathcal{G}_{\text{Dias}}(2) := \{\dashv, \vdash\},$$

et $\mathfrak{K}_{\text{Dias}}$ est l'espace engendré par

$$\dashv \circ_1 \vdash - \vdash \circ_2 \dashv,$$

$$\dashv \circ_1 \dashv - \dashv \circ_2 \dashv, \quad \dashv \circ_1 \dashv - \dashv \circ_2 \vdash,$$

$$\vdash \circ_1 \dashv - \vdash \circ_2 \vdash, \quad \vdash \circ_1 \vdash - \vdash \circ_2 \vdash.$$

Cette présentation est binaire et quadratique.

Théorème [Loday, 2001]

Dias est une opérate de Koszul.

Réalisation de Dias

Dias admet la réalisation [G, 2012] suivante.

- ▶ $\text{Dias}(n)$ est l'espace des mots de longueur n sur $\{0, 1\}$ avec exactement un 0;
- ▶ la composition partielle de Dias vérifie

$$u \circ_i v := u_1 \dots u_{i-1} (u_i \uparrow v_1) \dots (u_i \uparrow v_m) u_{i+1} \dots u_n,$$

où \uparrow est l'opération max sur les entiers;

- ▶ l'unité de Dias est le mot 0.

Réalisation de Dias

Dias admet la réalisation [G, 2012] suivante.

- ▶ $\text{Dias}(n)$ est l'espace des mots de longueur n sur $\{0, 1\}$ avec exactement un 0;
- ▶ la composition partielle de Dias vérifie

$$u \circ_i v := u_1 \dots u_{i-1} (u_i \uparrow v_1) \dots (u_i \uparrow v_m) u_{i+1} \dots u_n,$$

où \uparrow est l'opération max sur les entiers;

- ▶ l'unité de Dias est le mot 0.

Exemple

$$1101111 \circ_3 11101 = 11111011111$$

$$1101111 \circ_6 11101 = 11011111111$$

Réalisation de Dias

Dias admet la réalisation [G, 2012] suivante.

- ▶ $\text{Dias}(n)$ est l'espace des mots de longueur n sur $\{0, 1\}$ avec exactement un 0;
- ▶ la composition partielle de Dias vérifie

$$u \circ_i v := u_1 \dots u_{i-1} (u_i \uparrow v_1) \dots (u_i \uparrow v_m) u_{i+1} \dots u_n,$$

où \uparrow est l'opération max sur les entiers;

- ▶ l'unité de Dias est le mot 0.

Exemple

$$1101111 \circ_3 11101 = 11111011111$$

$$1101111 \circ_6 11101 = 11011111111$$

Proposition

Dias est engendrée par $\{01, 10\}$.

Dual de Koszul de Dias

Théorème [Loday, 2001]

Dendr est le dual de Koszul de Dias.

Dual de Koszul de Dias

Théorème [Loday, 2001]

Dendr est le dual de Koszul de Dias.

En effet, d'après la définition de la dualité de Koszul,

$$\mathfrak{A}_{\text{Dias}}^\perp = \text{Vect} (y \in \mathfrak{F}(\mathfrak{G}_{\text{Dias}})(3) : \langle x, y \rangle = 0 \text{ pour tout } x \in \mathfrak{A}_{\text{Dias}}).$$

Dual de Koszul de Dias

Théorème [Loday, 2001]

Dendr est le dual de Koszul de Dias.

En effet, d'après la définition de la dualité de Koszul,

$$\mathfrak{R}_{\text{Dias}}^\perp = \text{Vect} (y \in \mathfrak{F}(\mathfrak{G}_{\text{Dias}})(3) : \langle x, y \rangle = 0 \text{ pour tout } x \in \mathfrak{R}_{\text{Dias}}).$$

Soit

$$y := \sum_{t \in \mathfrak{F}(\mathfrak{G}_{\text{Dias}})(3)} \lambda_t t \in \mathfrak{R}_{\text{Dias}}^\perp.$$

Dual de Koszul de Dias

Théorème [Loday, 2001]

Dendr est le dual de Koszul de Dias.

En effet, d'après la définition de la dualité de Koszul,

$$\mathfrak{R}_{\text{Dias}}^\perp = \text{Vect} (y \in \mathfrak{F}(\mathfrak{G}_{\text{Dias}})(3) : \langle x, y \rangle = 0 \text{ pour tout } x \in \mathfrak{R}_{\text{Dias}}).$$

Soit

$$y := \sum_{t \in \mathfrak{F}(\mathfrak{G}_{\text{Dias}})(3)} \lambda_t t \in \mathfrak{R}_{\text{Dias}}^\perp.$$

On a donc

$$\dashv o_1 \vdash - \vdash o_2 \dashv \in \mathfrak{R}_{\text{Dias}} \text{ implique } \lambda_{\dashv o_1 \vdash} + \lambda_{\vdash o_2 \dashv} = 0,$$

$$\dashv o_1 \dashv - \dashv o_2 \dashv \in \mathfrak{R}_{\text{Dias}} \text{ implique } \lambda_{\dashv o_1 \dashv} + \lambda_{\dashv o_2 \dashv} = 0,$$

$$\dashv o_1 \dashv - \dashv o_2 \vdash \in \mathfrak{R}_{\text{Dias}} \text{ implique } \lambda_{\dashv o_1 \dashv} + \lambda_{\dashv o_2 \vdash} = 0,$$

$$\vdash o_1 \dashv - \vdash o_2 \vdash \in \mathfrak{R}_{\text{Dias}} \text{ implique } \lambda_{\vdash o_1 \dashv} + \lambda_{\vdash o_2 \vdash} = 0,$$

$$\vdash o_1 \vdash - \vdash o_2 \vdash \in \mathfrak{R}_{\text{Dias}} \text{ implique } \lambda_{\vdash o_1 \vdash} + \lambda_{\vdash o_2 \vdash} = 0.$$

Dual de Koszul de Dias

Théorème [Loday, 2001]

Dendr est le dual de Koszul de Dias.

En effet, d'après la définition de la dualité de Koszul,

$$\mathfrak{R}_{\text{Dias}}^\perp = \text{Vect} (y \in \mathfrak{F}(\mathfrak{G}_{\text{Dias}})(3) : \langle x, y \rangle = 0 \text{ pour tout } x \in \mathfrak{R}_{\text{Dias}}).$$

Soit

$$y := \sum_{t \in \mathfrak{F}(\mathfrak{G}_{\text{Dias}})(3)} \lambda_t t \in \mathfrak{R}_{\text{Dias}}^\perp.$$

On a donc

$$\dashv o_1 \vdash - \vdash o_2 \dashv \in \mathfrak{R}_{\text{Dias}} \text{ implique } \lambda_{\dashv o_1 \vdash} + \lambda_{\vdash o_2 \dashv} = 0,$$

$$\dashv o_1 \dashv - \dashv o_2 \dashv \in \mathfrak{R}_{\text{Dias}} \text{ implique } \lambda_{\dashv o_1 \dashv} + \lambda_{\dashv o_2 \dashv} = 0,$$

$$\dashv o_1 \dashv - \dashv o_2 \vdash \in \mathfrak{R}_{\text{Dias}} \text{ implique } \lambda_{\dashv o_1 \dashv} + \lambda_{\dashv o_2 \vdash} = 0,$$

$$\vdash o_1 \dashv - \vdash o_2 \vdash \in \mathfrak{R}_{\text{Dias}} \text{ implique } \lambda_{\vdash o_1 \dashv} + \lambda_{\vdash o_2 \vdash} = 0,$$

$$\vdash o_1 \vdash - \vdash o_2 \vdash \in \mathfrak{R}_{\text{Dias}} \text{ implique } \lambda_{\vdash o_1 \vdash} + \lambda_{\vdash o_2 \vdash} = 0.$$

Ainsi, y est de la forme

$$y = \lambda_1(\dashv o_1 \vdash - \vdash o_2 \dashv) + \lambda_2(\dashv o_1 \dashv - \dashv o_2 \dashv - \dashv o_2 \vdash) + \lambda_3(\vdash o_1 \dashv + \vdash o_1 \vdash - \vdash o_2 \vdash).$$

Dual de Koszul de Dias

Théorème [Loday, 2001]

Dendr est le dual de Koszul de Dias.

En effet, d'après la définition de la dualité de Koszul,

$$\mathfrak{R}_{\text{Dias}}^\perp = \text{Vect} (y \in \mathfrak{F}(\mathfrak{G}_{\text{Dias}})(3) : \langle x, y \rangle = 0 \text{ pour tout } x \in \mathfrak{R}_{\text{Dias}}).$$

Soit

$$y := \sum_{t \in \mathfrak{F}(\mathfrak{G}_{\text{Dias}})(3)} \lambda_t t \in \mathfrak{R}_{\text{Dias}}^\perp.$$

On a donc

$$\dashv o_1 \vdash - \vdash o_2 \dashv \in \mathfrak{R}_{\text{Dias}} \text{ implique } \lambda_{\dashv o_1 \vdash} + \lambda_{\vdash o_2 \dashv} = 0,$$

$$\dashv o_1 \dashv - \dashv o_2 \dashv \in \mathfrak{R}_{\text{Dias}} \text{ implique } \lambda_{\dashv o_1 \dashv} + \lambda_{\dashv o_2 \dashv} = 0,$$

$$\dashv o_1 \dashv - \dashv o_2 \vdash \in \mathfrak{R}_{\text{Dias}} \text{ implique } \lambda_{\dashv o_1 \dashv} + \lambda_{\dashv o_2 \vdash} = 0,$$

$$\vdash o_1 \dashv - \vdash o_2 \vdash \in \mathfrak{R}_{\text{Dias}} \text{ implique } \lambda_{\vdash o_1 \dashv} + \lambda_{\vdash o_2 \vdash} = 0,$$

$$\vdash o_1 \vdash - \vdash o_2 \vdash \in \mathfrak{R}_{\text{Dias}} \text{ implique } \lambda_{\vdash o_1 \vdash} + \lambda_{\vdash o_2 \vdash} = 0.$$

Ainsi, y est de la forme

$$y = \lambda_1(\dashv o_1 \vdash - \vdash o_2 \dashv) + \lambda_2(\dashv o_1 \dashv - \dashv o_2 \dashv - \dashv o_2 \vdash) + \lambda_3(\vdash o_1 \dashv + \vdash o_1 \vdash - \vdash o_2 \vdash).$$

Ceci montre que $\mathfrak{R}_{\text{Dias}}^\perp$ est engendré par

$$\dashv o_1 \vdash - \vdash o_2 \dashv, \quad \dashv o_1 \dashv - \dashv o_2 \dashv - \dashv o_2 \vdash, \quad \vdash o_1 \dashv + \vdash o_1 \vdash - \vdash o_2 \vdash,$$

et on reconnaît les relations dendriformes.

Dimensions

Comme Dias est une opérade de Koszul et $\text{Dias}^\dagger = \text{Dendr}$,

$$\mathcal{H}_{\text{Dias}}(-\mathcal{H}_{\text{Dendr}}(-t)) = t.$$

Dimensions

Comme **Dias** est une opérade de Koszul et $\mathbf{Dias}^! = \mathbf{Dendr}$,

$$\mathcal{H}_{\mathbf{Dias}}(-\mathcal{H}_{\mathbf{Dendr}}(-t)) = t.$$

D'après la réalisation de **Dias**, sa série de Hilbert est

$$\mathcal{H}_{\mathbf{Dias}}(t) = \frac{t}{(1-t)^2} = t + 2t^2 + 3t^3 + 4t^4 + 5t^5 + \dots .$$

Dimensions

Comme **Dias** est une opérade de Koszul et $\mathbf{Dias}^! = \mathbf{Dendr}$,

$$\mathcal{H}_{\mathbf{Dias}}(-\mathcal{H}_{\mathbf{Dendr}}(-t)) = t.$$

D'après la réalisation de **Dias**, sa série de Hilbert est

$$\mathcal{H}_{\mathbf{Dias}}(t) = \frac{t}{(1-t)^2} = t + 2t^2 + 3t^3 + 4t^4 + 5t^5 + \dots .$$

Ainsi, la série de Hilbert de **Dendr** est

$$\mathcal{H}_{\mathbf{Dendr}}(t) = \frac{1 - \sqrt{1-4t} - 2t}{2t} = t + 2t^2 + 5t^3 + 14t^4 + 42t^5 + \dots .$$

Motivations et objectifs

Objectif

Définir une généralisation Dendr_γ , $\gamma \in \mathbb{N}$, de Dendr .

Motivations et objectifs

Objectif

Définir une généralisation Dendr_γ , $\gamma \in \mathbb{N}$, de Dendr .

L'opérade dendriforme admet déjà un certain nombre de généralisations. Il existe en effet déjà les opérades

- ▶ tridendriforme [Loday, Ronco, 2004];
- ▶ quadridendriforme [Aguiar, Loday, 2004];
- ▶ ennedendriforme [Leroux, 2004];
- ▶ m -dendriforme [Leroux, 2007];
- ▶ m -dendriforme [Novelli, 2014] (même nom mais différente de la précédente).

Motivations et objectifs

Objectif

Définir une généralisation Dendr_γ , $\gamma \in \mathbb{N}$, de Dendr .

L'opérade dendriforme admet déjà un certain nombre de généralisations. Il existe en effet déjà les opérades

- ▶ tridendriforme [Loday, Ronco, 2004];
- ▶ quadridendriforme [Aguiar, Loday, 2004];
- ▶ enneadendriforme [Leroux, 2004];
- ▶ m -dendriforme [Leroux, 2007];
- ▶ m -dendriforme [Novelli, 2014] (même nom mais différente de la précédente).

On souhaite

- ▶ étudier comment les algèbres sur Dendr_γ découpent des produits associatifs;

Motivations et objectifs

Objectif

Définir une généralisation Dendr_γ , $\gamma \in \mathbb{N}$, de Dendr .

L'opérade dendriforme admet déjà un certain nombre de généralisations. Il existe en effet déjà les opérades

- ▶ tridendriforme [Loday, Ronco, 2004];
- ▶ quadridendriforme [Aguiar, Loday, 2004];
- ▶ ennedendriforme [Leroux, 2004];
- ▶ m -dendriforme [Leroux, 2007];
- ▶ m -dendriforme [Novelli, 2014] (même nom mais différente de la précédente).

On souhaite

- ▶ étudier comment les algèbres sur Dendr_γ découpent des produits associatifs;
- ▶ étudier Dendr_γ d'un point de vue combinatoire (réalisation, dimensions, bases, *etc.*).

Motivations et objectifs

Objectif

Définir une généralisation Dendr_γ , $\gamma \in \mathbb{N}$, de Dendr .

L'opérade dendriforme admet déjà un certain nombre de généralisations. Il existe en effet déjà les opérades

- ▶ tridendriforme [Loday, Ronco, 2004];
- ▶ quadridendriforme [Aguiar, Loday, 2004];
- ▶ enneadendriforme [Leroux, 2004];
- ▶ m -dendriforme [Leroux, 2007];
- ▶ m -dendriforme [Novelli, 2014] (même nom mais différente de la précédente).

On souhaite

- ▶ étudier comment les algèbres sur Dendr_γ découpent des produits associatifs;
- ▶ étudier Dendr_γ d'un point de vue combinatoire (réalisation, dimensions, bases, *etc.*).

Stratégie

Proposer une généralisation Dias_γ de Dias et ensuite, par dualité de Koszul, en déduire Dendr_γ .

Plan

Opérades polydendriformes

Une généralisation de Dias

Soit Dias_γ , $\gamma \in \mathbb{N}$, l'opérade ayant la réalisation suivante.

Une généralisation de Dias

Soit Dias_γ , $\gamma \in \mathbb{N}$, l'opérate ayant la réalisation suivante.

- ▶ $\text{Dias}_\gamma(n)$ est l'espace des mots de longueur n sur $\{0, 1, \dots, \gamma\}$ avec exactement une occurrence de 0.

Une généralisation de Dias

Soit Dias_γ , $\gamma \in \mathbb{N}$, l'opérade ayant la réalisation suivante.

- ▶ $\text{Dias}_\gamma(n)$ est l'espace des mots de longueur n sur $\{0, 1, \dots, \gamma\}$ avec exactement une occurrence de 0.
- ▶ La composition partielle de Dias_γ vérifie

$$u \circ_i v := u_1 \dots u_{i-1} (u_i \uparrow v_1) \dots (u_i \uparrow v_m) u_{i+1} \dots u_n.$$

Une généralisation de Dias

Soit Dias_γ , $\gamma \in \mathbb{N}$, l'opérade ayant la réalisation suivante.

- ▶ $\text{Dias}_\gamma(n)$ est l'espace des mots de longueur n sur $\{0, 1, \dots, \gamma\}$ avec exactement une occurrence de 0.
- ▶ La composition partielle de Dias_γ vérifie

$$u \circ_i v := u_1 \dots u_{i-1} (u_i \uparrow v_1) \dots (u_i \uparrow v_m) u_{i+1} \dots u_n.$$

- ▶ L'unité de Dias_γ est le mot 0.

Une généralisation de Dias

Soit Dias_γ , $\gamma \in \mathbb{N}$, l'opérade ayant la réalisation suivante.

- ▶ $\text{Dias}_\gamma(n)$ est l'espace des mots de longueur n sur $\{0, 1, \dots, \gamma\}$ avec exactement une occurrence de 0.
- ▶ La composition partielle de Dias_γ vérifie

$$u \circ_i v := u_1 \dots u_{i-1} (u_i \uparrow v_1) \dots (u_i \uparrow v_m) u_{i+1} \dots u_n.$$

- ▶ L'unité de Dias_γ est le mot 0.

Exemple

$$211201 \circ_4 31103 = 2113222301$$

$$111101 \circ_3 20 = 1121101$$

Une généralisation de Dias

Soit Dias_γ , $\gamma \in \mathbb{N}$, l'opérade ayant la réalisation suivante.

- ▶ $\text{Dias}_\gamma(n)$ est l'espace des mots de longueur n sur $\{0, 1, \dots, \gamma\}$ avec exactement une occurrence de 0.
- ▶ La composition partielle de Dias_γ vérifie

$$u \circ_i v := u_1 \dots u_{i-1} (u_i \uparrow v_1) \dots (u_i \uparrow v_m) u_{i+1} \dots u_n.$$

- ▶ L'unité de Dias_γ est le mot 0.

Exemple

$$211201 \circ_4 31103 = 2113222301$$

$$111101 \circ_3 20 = 1121101$$

Proposition

Dias_γ est une opérade.

Première propriétés de Dias_γ

Proposition

Dias_γ est engendrée par l'ensemble $\{0a, a0 : a \in [\gamma]\}$.

Première propriétés de Dias_γ

Proposition

Dias_γ est engendrée par l'ensemble $\{0a, a0 : a \in [\gamma]\}$.

Par définition de Dias_γ ,

$$\mathcal{H}_{\text{Dias}_\gamma}(t) = \frac{t}{(1 - \gamma t)^2} \quad \text{et} \quad \dim \text{Dias}_\gamma(n) = n\gamma^{n-1}.$$

γ	Dimensions de Dias_γ
0	1, 0, 0, ...
1	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ...
2	1, 4, 12, 32, 80, 192, 448, 1024, ...
3	1, 6, 27, 108, 405, 1458, 5103, 17496, ...
4	1, 8, 48, 256, 1280, 6144, 28672, 131072, ...

Première propriétés de Dias_γ

Proposition

Dias_γ est engendrée par l'ensemble $\{0a, a0 : a \in [\gamma]\}$.

Par définition de Dias_γ ,

$$\mathcal{H}_{\text{Dias}_\gamma}(t) = \frac{t}{(1 - \gamma t)^2} \quad \text{et} \quad \dim \text{Dias}_\gamma(n) = n\gamma^{n-1}.$$

γ	Dimensions de Dias_γ
0	1, 0, 0, ...
1	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ...
2	1, 4, 12, 32, 80, 192, 448, 1024, ...
3	1, 6, 27, 108, 405, 1458, 5103, 17496, ...
4	1, 8, 48, 256, 1280, 6144, 28672, 131072, ...

Comme $\text{Dias}_1 = \text{Dias}$ et Dias_γ est une sous-opérade de $\text{Dias}_{\gamma+1}$, Dias_γ est une généralisation de Dias .

Présentation de Dias_γ

Théorème

Dias_γ admet la présentation $(\mathfrak{G}_{\text{Dias}_\gamma}, \mathfrak{R}_{\text{Dias}_\gamma})$ où

$$\mathfrak{G}_{\text{Dias}_\gamma} := \mathfrak{G}_{\text{Dias}_\gamma}(2) := \{\neg_a, \vdash_a : a \in [\gamma]\}$$

et $\mathfrak{R}_{\text{Dias}_\gamma}$ est engendré par

$$\begin{aligned} \neg_a \circ_1 \vdash_{a'} &- \vdash_{a'} \circ_2 \neg_a, & a, a' \in [\gamma], \\ \neg_a \circ_1 \neg_b &- \neg_a \circ_2 \vdash_b, & a < b \in [\gamma], \\ \vdash_a \circ_1 \neg_b &- \vdash_a \circ_2 \vdash_b, & a < b \in [\gamma], \\ \neg_b \circ_1 \neg_a &- \neg_a \circ_2 \neg_b, & a < b \in [\gamma], \\ \vdash_a \circ_1 \vdash_b &- \vdash_b \circ_2 \vdash_a, & a < b \in [\gamma], \\ \neg_d \circ_1 \neg_d &- \neg_d \circ_2 \neg_c, & \neg_d \circ_1 \neg_d - \neg_d \circ_2 \vdash_c, & c \leq d \in [\gamma], \\ \vdash_d \circ_1 \neg_c &- \vdash_d \circ_2 \vdash_d, & \vdash_d \circ_1 \vdash_c - \vdash_d \circ_2 \vdash_d, & c \leq d \in [\gamma]. \end{aligned}$$

Présentation de Dias_γ

Théorème

Dias_γ admet la présentation $(\mathfrak{G}_{\text{Dias}_\gamma}, \mathfrak{R}_{\text{Dias}_\gamma})$ où

$$\mathfrak{G}_{\text{Dias}_\gamma} := \mathfrak{G}_{\text{Dias}_\gamma}(2) := \{\neg_a, \vdash_a : a \in [\gamma]\}$$

et $\mathfrak{R}_{\text{Dias}_\gamma}$ est engendré par

$$\begin{aligned} \neg_a \circ_1 \vdash_{a'} &- \vdash_{a'} \circ_2 \neg_a, & a, a' \in [\gamma], \\ \neg_a \circ_1 \neg_b &- \neg_a \circ_2 \vdash_b, & a < b \in [\gamma], \\ \vdash_a \circ_1 \neg_b &- \vdash_a \circ_2 \vdash_b, & a < b \in [\gamma], \\ \neg_b \circ_1 \neg_a &- \neg_a \circ_2 \neg_b, & a < b \in [\gamma], \\ \vdash_a \circ_1 \vdash_b &- \vdash_b \circ_2 \vdash_a, & a < b \in [\gamma], \\ \neg_d \circ_1 \neg_d &- \neg_d \circ_2 \neg_c, & \neg_d \circ_1 \neg_d - \neg_d \circ_2 \vdash_c, & c \leq d \in [\gamma], \\ \vdash_d \circ_1 \neg_c &- \vdash_d \circ_2 \vdash_d, & \vdash_d \circ_1 \vdash_c - \vdash_d \circ_2 \vdash_d, & c \leq d \in [\gamma]. \end{aligned}$$

De manière plus concise, $\mathfrak{R}_{\text{Dias}_\gamma}$ est l'espace engendré par

$$\begin{aligned} \neg_a \circ_1 \vdash_{a'} &- \vdash_{a'} \circ_2 \neg_a, & a, a' \in [\gamma], \\ \neg_a \circ_1 \neg_{a \uparrow a'} &- \neg_a \circ_2 \vdash_{a'}, & \vdash_a \circ_1 \neg_{a'} - \vdash_a \circ_2 \vdash_{a \uparrow a'}, & a, a' \in [\gamma], \\ \neg_{a \uparrow a'} \circ_1 \neg_a &- \neg_a \circ_2 \neg_{a'}, & \vdash_a \circ_1 \vdash_{a'} - \vdash_{a \uparrow a'} \circ_2 \vdash_a, & a, a' \in [\gamma]. \end{aligned}$$

Orientation de $\mathfrak{R}_{\text{Dias}_\gamma}$

Cette présentation repose sur l'existence d'une orientation \rightarrow de $\mathfrak{R}_{\text{Dias}_\gamma}$ vérifiant

$$\vdash_{a'} \circ_2 \neg_a \rightarrow \neg_a \circ_1 \vdash_{a'}, \quad a, a' \in [\gamma],$$

$$\neg_a \circ_2 \vdash_b \rightarrow \neg_a \circ_1 \neg_b, \quad a < b \in [\gamma],$$

$$\vdash_a \circ_1 \neg_b \rightarrow \vdash_a \circ_2 \vdash_b, \quad a < b \in [\gamma],$$

$$\neg_a \circ_2 \neg_b \rightarrow \neg_b \circ_1 \neg_a, \quad a < b \in [\gamma],$$

$$\vdash_a \circ_1 \vdash_b \rightarrow \vdash_b \circ_2 \vdash_a, \quad a < b \in [\gamma],$$

$$\neg_d \circ_2 \neg_c \rightarrow \neg_d \circ_1 \neg_d, \quad c \leq d \in [\gamma],$$

$$\neg_d \circ_2 \vdash_c \rightarrow \neg_d \circ_1 \neg_d, \quad c \leq d \in [\gamma],$$

$$\vdash_d \circ_1 \neg_c \rightarrow \vdash_d \circ_2 \vdash_d, \quad c \leq d \in [\gamma],$$

$$\vdash_d \circ_1 \vdash_c \rightarrow \vdash_d \circ_2 \vdash_d, \quad c \leq d \in [\gamma],$$

formant une règle de réécriture convergente sur $\mathfrak{F}(\mathfrak{G}_{\text{Dias}_\gamma})$.

Orientation de $\mathfrak{R}_{\text{Dias}_\gamma}$

Cette présentation repose sur l'existence d'une orientation \rightarrow de $\mathfrak{R}_{\text{Dias}_\gamma}$ vérifiant

$$\vdash_{a'} \circ_2 \neg_a \rightarrow \neg_a \circ_1 \vdash_{a'}, \quad a, a' \in [\gamma],$$

$$\neg_a \circ_2 \vdash_b \rightarrow \neg_a \circ_1 \neg_b, \quad a < b \in [\gamma],$$

$$\vdash_a \circ_1 \neg_b \rightarrow \vdash_a \circ_2 \vdash_b, \quad a < b \in [\gamma],$$

$$\neg_a \circ_2 \neg_b \rightarrow \neg_b \circ_1 \neg_a, \quad a < b \in [\gamma],$$

$$\vdash_a \circ_1 \vdash_b \rightarrow \vdash_b \circ_2 \vdash_a, \quad a < b \in [\gamma],$$

$$\neg_d \circ_2 \neg_c \rightarrow \neg_d \circ_1 \neg_d, \quad c \leq d \in [\gamma],$$

$$\neg_d \circ_2 \vdash_c \rightarrow \neg_d \circ_1 \neg_d, \quad c \leq d \in [\gamma],$$

$$\vdash_d \circ_1 \neg_c \rightarrow \vdash_d \circ_2 \vdash_d, \quad c \leq d \in [\gamma],$$

$$\vdash_d \circ_1 \vdash_c \rightarrow \vdash_d \circ_2 \vdash_d, \quad c \leq d \in [\gamma],$$

formant une règle de réécriture convergente sur $\mathfrak{F}(\mathfrak{G}_{\text{Dias}_\gamma})$.

Ceci implique aussi le résultat suivant.

Proposition

Dias_γ est une opérade de Koszul.

Présentation alternative de Dias_γ

Proposition

Dias_γ admet la présentation $(\mathfrak{G}'_{\text{Dias}_\gamma}, \mathfrak{R}'_{\text{Dias}_\gamma})$ où

$$\mathfrak{G}'_{\text{Dias}_\gamma} := \mathfrak{G}'_{\text{Dias}_\gamma}(2) := \{\neg\vdash_a, \vdash_a : a \in [\gamma]\}$$

et $\mathfrak{R}'_{\text{Dias}_\gamma}$ est engendré par

$$\begin{aligned} & \neg\vdash_a \circ_1 \vdash_{a'} - \vdash_{a'} \circ_2 \neg\vdash_a, & a, a' \in [\gamma], \\ \vdash_b \circ_1 \vdash_a, & \neg\vdash_b \circ_2 \neg\vdash_a, & \vdash_b \circ_1 \neg\vdash_a, & \neg\vdash_b \circ_2 \vdash_a, & a < b \in [\gamma], \\ \vdash_a \circ_1 \vdash_b - \vdash_b \circ_2 \vdash_a, & \neg\vdash_b \circ_1 \neg\vdash_a - \neg\vdash_a \circ_2 \neg\vdash_b, & a < b \in [\gamma], \\ \vdash_a \circ_1 \neg\vdash_b - \vdash_a \circ_2 \vdash_b, & \neg\vdash_a \circ_1 \neg\vdash_b - \neg\vdash_a \circ_2 \vdash_b, & a < b \in [\gamma], \\ \vdash_a \circ_1 \vdash_a - \sum_{a \leq b \in [\gamma]} (\vdash_a \circ_2 \vdash_b), & \sum_{a \leq b \in [\gamma]} (\neg\vdash_a \circ_1 \neg\vdash_b) - \neg\vdash_a \circ_2 \neg\vdash_a, & a \in [\gamma], \\ \vdash_a \circ_1 \neg\vdash_a - \sum_{a \leq b \in [\gamma]} (\vdash_b \circ_2 \vdash_a), & \sum_{a \leq b \in [\gamma]} (\neg\vdash_b \circ_1 \neg\vdash_a) - \neg\vdash_a \circ_2 \vdash_a, & a \in [\gamma]. \end{aligned}$$

Présentation alternative de Dias_γ

Proposition

Dias_γ admet la présentation $(\mathfrak{G}'_{\text{Dias}_\gamma}, \mathfrak{R}'_{\text{Dias}_\gamma})$ où

$$\mathfrak{G}'_{\text{Dias}_\gamma} := \mathfrak{G}'_{\text{Dias}_\gamma}(2) := \{\dashv\!_a, \Vdash_a : a \in [\gamma]\}$$

et $\mathfrak{R}'_{\text{Dias}_\gamma}$ est engendré par

$$\begin{aligned} & \dashv\!_a \circ_1 \Vdash_{a'} - \Vdash_{a'} \circ_2 \dashv\!_a, & a, a' \in [\gamma], \\ \Vdash_b \circ_1 \Vdash_a, & \dashv\!_b \circ_2 \dashv\!_a, & \Vdash_b \circ_1 \dashv\!_a, & \dashv\!_b \circ_2 \Vdash_a, & a < b \in [\gamma], \\ \Vdash_a \circ_1 \Vdash_b - \Vdash_b \circ_2 \Vdash_a, & \dashv\!_b \circ_1 \dashv\!_a - \dashv\!_a \circ_2 \dashv\!_b, & a < b \in [\gamma], \\ \Vdash_a \circ_1 \dashv\!_b - \Vdash_a \circ_2 \Vdash_b, & \dashv\!_a \circ_1 \dashv\!_b - \dashv\!_a \circ_2 \Vdash_b, & a < b \in [\gamma], \\ \Vdash_a \circ_1 \Vdash_a - \sum_{a \leq b \in [\gamma]} (\Vdash_a \circ_2 \Vdash_b), & \sum_{a \leq b \in [\gamma]} (\dashv\!_a \circ_1 \dashv\!_b) - \dashv\!_a \circ_2 \dashv\!_a, & a \in [\gamma], \\ \Vdash_a \circ_1 \dashv\!_a - \sum_{a \leq b \in [\gamma]} (\Vdash_b \circ_2 \Vdash_a), & \sum_{a \leq b \in [\gamma]} (\dashv\!_b \circ_1 \dashv\!_a) - \dashv\!_a \circ_2 \Vdash_a, & a \in [\gamma]. \end{aligned}$$

Cette présentation s'obtient par le changement de base vérifiant

$$\dashv\!_a = \sum_{a \leq b \leq \gamma} \dashv\!_b \quad \text{et} \quad \Vdash_a = \sum_{a \leq b \leq \gamma} \Vdash_b, \quad a \in [\gamma].$$

Une généralisation de Dendr

Dias_γ admet une présentation binaire et quadratique. Elle admet donc un dual de Koszul.

Une généralisation de Dendr

Dias_γ admet une présentation binaire et quadratique. Elle admet donc un dual de Koszul.

Soit $\text{Dendr}_\gamma := \text{Dias}_\gamma^!$ l'opérade γ -polydendriforme.

Une généralisation de Dendr

Dias_γ admet une présentation binaire et quadratique. Elle admet donc un dual de Koszul.

Soit $\text{Dendr}_\gamma := \text{Dias}_\gamma^!$ l'opérade γ -polydendriforme.

Théorème

Dendr_γ admet la présentation $(\mathfrak{G}_{\text{Dendr}_\gamma}, \mathfrak{R}_{\text{Dendr}_\gamma})$ où

$$\mathfrak{G}_{\text{Dendr}_\gamma} := \mathfrak{G}_{\text{Dendr}_\gamma}(2) := \{\leftarrow_a, \rightarrow_a : a \in [\gamma]\}$$

et $\mathfrak{R}_{\text{Dendr}_\gamma}$ est engendré par

$$\begin{aligned} & \leftarrow_a \circ_1 \rightarrow_{a'} - \rightarrow_{a'} \circ_2 \leftarrow_a, & a, a' \in [\gamma], \\ & \leftarrow_a \circ_1 \leftarrow_b - \leftarrow_a \circ_2 \rightarrow_b, & \rightarrow_a \circ_1 \leftarrow_b - \rightarrow_a \circ_2 \rightarrow_b, & a < b \in [\gamma], \\ & \leftarrow_a \circ_1 \leftarrow_b - \leftarrow_a \circ_2 \leftarrow_b, & \rightarrow_a \circ_1 \rightarrow_b - \rightarrow_a \circ_2 \rightarrow_b, & a < b \in [\gamma], \\ & \leftarrow_d \circ_1 \leftarrow_d - \sum_{c \in [d]} (\leftarrow_d \circ_2 \leftarrow_c + \leftarrow_d \circ_2 \rightarrow_c), & d \in [\gamma], \\ & \sum_{c \in [d]} (\rightarrow_d \circ_1 \rightarrow_c + \rightarrow_d \circ_1 \leftarrow_c) - \rightarrow_d \circ_2 \rightarrow_d, & d \in [\gamma]. \end{aligned}$$

Dimensions de Dendr_γ

Comme Dias_γ est de Koszul,

$$\mathcal{H}_{\text{Dias}_\gamma}(-\mathcal{H}_{\text{Dendr}_\gamma}(-t)) = t,$$

et ainsi, on calcule les dimensions de Dendr_γ à l'aide de celles de Dias_γ .

Dimensions de Dendr_γ

Comme Dias_γ est de Koszul,

$$\mathcal{H}_{\text{Dias}_\gamma}(-\mathcal{H}_{\text{Dendr}_\gamma}(-t)) = t,$$

et ainsi, on calcule les dimensions de Dendr_γ à l'aide de celles de Dias_γ .

On obtient

Proposition

$$t + (2\gamma t - 1) \mathcal{H}_{\text{Dendr}_\gamma}(t) + \gamma^2 t \mathcal{H}_{\text{Dendr}_\gamma}(t)^2 = 0$$

Dimensions de Dendr_γ

Comme Dias_γ est de Koszul,

$$\mathcal{H}_{\text{Dias}_\gamma}(-\mathcal{H}_{\text{Dendr}_\gamma}(-t)) = t,$$

et ainsi, on calcule les dimensions de Dendr_γ à l'aide de celles de Dias_γ .

On obtient

Proposition

$$t + (2\gamma t - 1) \mathcal{H}_{\text{Dendr}_\gamma}(t) + \gamma^2 t \mathcal{H}_{\text{Dendr}_\gamma}(t)^2 = 0$$

Démonstration.

Ceci est une conséquence de

$$t = \frac{-\mathcal{H}_{\text{Dendr}_\gamma}(-t)}{(1 + \gamma \mathcal{H}_{\text{Dendr}_\gamma}(-t))^2}$$

et du fait que

$$\mathcal{H}_{\text{Dias}_\gamma}(t) = \frac{t}{(1 - \gamma t)^2}.$$



Dimensions et base de Dendr_γ

On déduit de l'expression de $\mathcal{H}_{\text{Dendr}_\gamma}(t)$ que

$$\dim \text{Dendr}_\gamma(n) = \gamma^{n-1} \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

Algèbres polydendriformes

Une algèbre sur \mathbf{Dendr}_γ , appelée **algèbre γ -polydendriforme** est un espace vectoriel \mathcal{V} muni de 2γ opérations binaires

$$\leftarrow_a : \mathcal{V} \otimes \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V} \quad \text{et} \quad \rightarrow_a : \mathcal{V} \otimes \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}, \quad a \in [\gamma],$$

Algèbres polydendriformes

Une algèbre sur Dendr_γ , appelée **algèbre γ -polydendriforme** est un espace vectoriel \mathcal{V} muni de 2γ opérations binaires

$$\leftarrow_a : \mathcal{V} \otimes \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V} \quad \text{et} \quad \rightarrow_a : \mathcal{V} \otimes \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}, \quad a \in [\gamma],$$

vérifiant, pour tous $x, y, z \in \mathcal{V}$, les relations

$$(x \rightarrow_{a'} y) \leftarrow_a z = x \rightarrow_{a'} (y \leftarrow_a z), \quad a, a' \in [\gamma],$$

$$(x \leftarrow_b y) \leftarrow_a z = x \leftarrow_a (y \rightarrow_b z), \quad a < b \in [\gamma],$$

$$(x \leftarrow_b y) \rightarrow_a z = x \rightarrow_a (y \rightarrow_b z), \quad a < b \in [\gamma],$$

$$(x \leftarrow_a y) \leftarrow_b z = x \leftarrow_a (y \leftarrow_b z), \quad a < b \in [\gamma],$$

$$(x \rightarrow_b y) \rightarrow_a z = x \rightarrow_b (y \rightarrow_a z), \quad a < b \in [\gamma],$$

$$(x \leftarrow_d y) \leftarrow_d z = \sum_{c \in [d]} x \leftarrow_d (y \leftarrow_c z) + x \leftarrow_d (y \rightarrow_c z), \quad d \in [\gamma],$$

$$\sum_{c \in [d]} (x \rightarrow_c y) \rightarrow_d z + (x \leftarrow_c y) \rightarrow_d z = x \rightarrow_d (y \rightarrow_d z), \quad d \in [\gamma].$$

γ -découpage d'une opération associative

Un élément binaire x d'une opérade \mathcal{O} est **associatif** si

$$x \circ_1 x = x \circ_2 x.$$

γ -découpage d'une opération associative

Un élément binaire x d'une opérade \mathcal{O} est **associatif** si

$$x \circ_1 x = x \circ_2 x.$$

Proposition

Dans Dendr_γ , tout élément

$$\bullet_b := \sum_{a \in [b]} (\leftarrow_a + \rightarrow_a), \quad b \in [\gamma]$$

est associatif.

γ -découpage d'une opération associative

Un élément binaire x d'une opérade \mathcal{O} est **associatif** si

$$x \circ_1 x = x \circ_2 x.$$

Proposition

Dans Dendr_γ , tout élément

$$\bullet_b := \sum_{a \in [b]} (\leftarrow_a + \rightarrow_a), \quad b \in [\gamma]$$

est associatif.

Les algèbres γ -polydendriformes sont de ce fait adaptées pour découper une opération associative \star en 2γ parts par

$$\star = \leftarrow_1 + \rightarrow_1 + \leftarrow_2 + \rightarrow_2 + \cdots + \leftarrow_\gamma + \rightarrow_\gamma,$$

telles que les **sommes partielles**

$$\leftarrow_1 + \rightarrow_1,$$

$$\leftarrow_1 + \rightarrow_1 + \leftarrow_2 + \rightarrow_2,$$

$$\leftarrow_1 + \rightarrow_1 + \leftarrow_2 + \rightarrow_2 + \leftarrow_3 + \rightarrow_3,$$

$\dots,$

sont toutes associatives.

Présentation alternative de Dendr_γ

Le calcul du dual de Koszul de Dias_γ par sa présentation $(\mathfrak{G}'_{\text{Dias}_\gamma}, \mathfrak{R}'_{\text{Dias}_\gamma})$ donne une autre présentation de Dendr_γ .

Proposition

Dendr_γ admet la présentation $(\mathfrak{G}'_{\text{Dendr}_\gamma}, \mathfrak{R}'_{\text{Dendr}_\gamma})$ où

$$\mathfrak{G}'_{\text{Dendr}_\gamma} := \mathfrak{G}'_{\text{Dendr}_\gamma}(2) := \{\prec_a, \succ_a : a \in [\gamma]\}$$

et $\mathfrak{R}'_{\text{Dendr}_\gamma}$ est engendré par

$$\begin{aligned} \prec_a \circ_1 \succ_{a'} - \succ_{a'} \circ_2 \prec_a, & \quad a, a' \in [\gamma], \\ \prec_a \circ_1 \prec_{a'} - \prec_{a \downarrow a'} \circ_2 \prec_a - \prec_{a \downarrow a'} \circ_2 \succ_{a'}, & \quad a, a' \in [\gamma], \\ \succ_{a \downarrow a'} \circ_1 \prec_{a'} + \succ_{a \downarrow a'} \circ_1 \succ_a - \succ_a \circ_2 \succ_{a'}, & \quad a, a' \in [\gamma], \end{aligned}$$

où \downarrow est l'opération min sur les entiers.

Présentation alternative de Dendr_γ

Le calcul du dual de Koszul de Dias_γ par sa présentation $(\mathfrak{G}'_{\text{Dias}_\gamma}, \mathfrak{R}'_{\text{Dias}_\gamma})$ donne une autre présentation de Dendr_γ .

Proposition

Dendr_γ admet la présentation $(\mathfrak{G}'_{\text{Dendr}_\gamma}, \mathfrak{R}'_{\text{Dendr}_\gamma})$ où

$$\mathfrak{G}'_{\text{Dendr}_\gamma} := \mathfrak{G}'_{\text{Dendr}_\gamma}(2) := \{\prec_a, \succ_a : a \in [\gamma]\}$$

et $\mathfrak{R}'_{\text{Dendr}_\gamma}$ est engendré par

$$\begin{aligned} \prec_a \circ_1 \succ_{a'} - \succ_{a'} \circ_2 \prec_a, & \quad a, a' \in [\gamma], \\ \prec_a \circ_1 \prec_{a'} - \prec_{a \downarrow a'} \circ_2 \prec_a - \prec_{a \downarrow a'} \circ_2 \succ_{a'}, & \quad a, a' \in [\gamma], \\ \succ_{a \downarrow a'} \circ_1 \prec_{a'} + \succ_{a \downarrow a'} \circ_1 \succ_a - \succ_a \circ_2 \succ_{a'}, & \quad a, a' \in [\gamma], \end{aligned}$$

où \downarrow est l'opération min sur les entiers.

Cette présentation de Dendr_γ peut aussi être obtenue par le changement de base induit par

$$\prec_b = \sum_{a \in [b]} \leftarrow_a \quad \text{et} \quad \succ_b = \sum_{a \in [b]} \rightarrow_a, \quad b \in [\gamma].$$

Algèbres γ -polydendriformes libres

On munit l'espace $\mathcal{F}_{\text{Dendr}_\gamma}$ des arbres binaires γ -valués d'opérations binaires

$$\prec_a, \succ_a : \mathcal{F}_{\text{Dendr}_\gamma} \otimes \mathcal{F}_{\text{Dendr}_\gamma} \rightarrow \mathcal{F}_{\text{Dendr}_\gamma}, \quad a \in [\gamma],$$

Algèbres γ -polydendriformes libres

On munit l'espace $\mathcal{F}_{\text{Dendr}_\gamma}$ des arbres binaires γ -valués d'opérations binaires

$$\prec_a, \succ_a : \mathcal{F}_{\text{Dendr}_\gamma} \otimes \mathcal{F}_{\text{Dendr}_\gamma} \rightarrow \mathcal{F}_{\text{Dendr}_\gamma}, \quad a \in [\gamma],$$

définies récursivement, pour tout arbre binaire γ -valué s et tous arbres binaires γ -valués ou feuilles t_1 et t_2 par

$$s \prec_a \perp := s := \perp \succ_a s,$$

$$\perp \prec_a s := 0 := s \succ_a \perp,$$

$$\begin{array}{c} \text{tree}(x,y) \\ t_1 \quad t_2 \end{array} \prec_a s := \begin{array}{c} \text{tree}(x,z) \\ t_1 \quad t_2 \prec_a s \end{array} + \begin{array}{c} \text{tree}(x,z) \\ t_1 \quad t_2 \succ_y s \end{array}, \quad z := a \downarrow y,$$

$$s \succ_a \begin{array}{c} \text{tree}(x,y) \\ t_1 \quad t_2 \end{array} := \begin{array}{c} \text{tree}(z,y) \\ s \succ_a t_1 \quad t_2 \end{array} + \begin{array}{c} \text{tree}(z,y) \\ s \prec_x t_1 \quad t_2 \end{array}, \quad z := a \downarrow x.$$

Ni $\perp \prec_a \perp$ ni $\perp \succ_a \perp$ ne sont définis.

Algèbres γ -polydendriformes libres

Théorème

$\mathcal{F}_{\text{Dendr}_\gamma}$ est l'algèbre γ -polydendriforme libre sur un générateur.

Algèbres γ -polydendriformes libres

Théorème

$\mathcal{F}_{\text{Dendr}_\gamma}$ est l'algèbre γ -polydendriforme libre sur un générateur.

Exemple

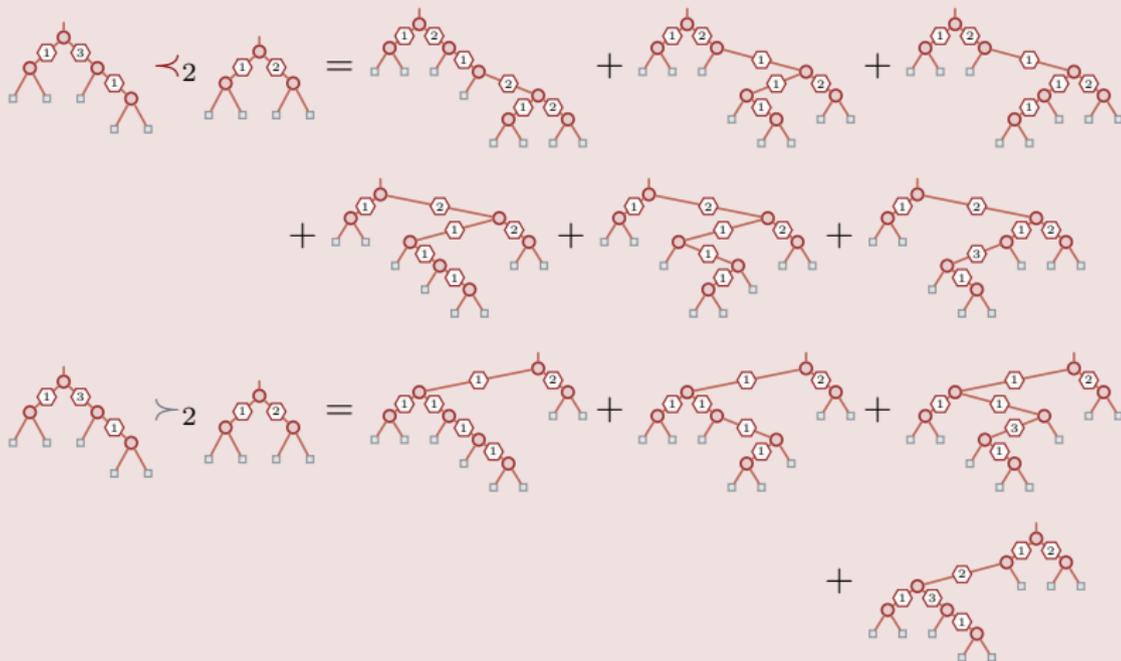


Diagramme d'opérades

Les trois opérades **As**, **Dias** et **Dendr** s'inscrivent dans le diagramme

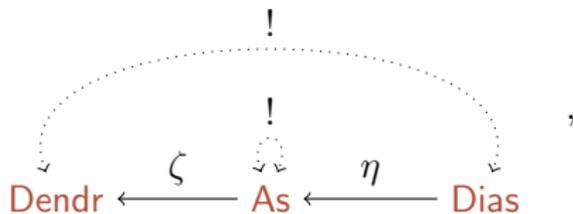
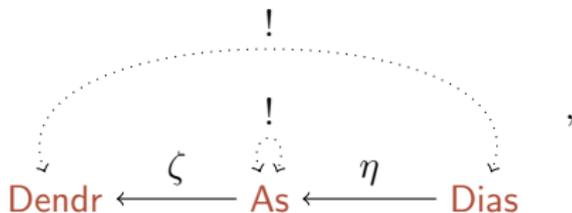


Diagramme d'opérades

Les trois opérades **As**, **Dias** et **Dendr** s'inscrivent dans le diagramme

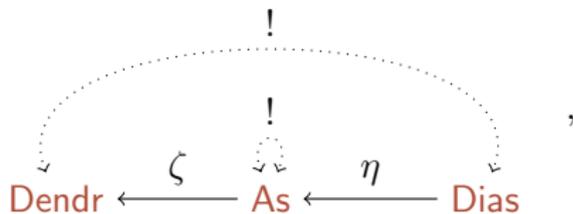


où le morphisme $\eta : \text{Dias} \rightarrow \text{As}$ vérifie

$$\eta(01) := \mathbf{a} := \eta(10),$$

Diagramme d'opérades

Les trois opérades **As**, **Dias** et **Dendr** s'inscrivent dans le diagramme



où le morphisme $\eta : \text{Dias} \rightarrow \text{As}$ vérifie

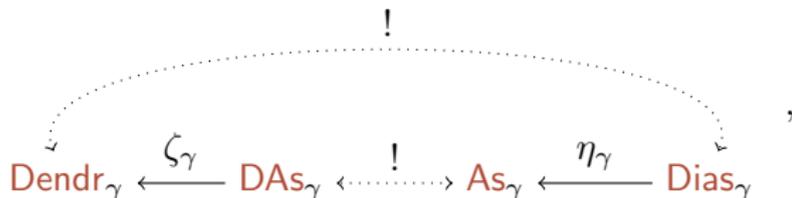
$$\eta(01) := \mathbf{a} =: \eta(10),$$

et le morphisme $\zeta : \text{As} \rightarrow \text{Dendr}$ vérifie

$$\zeta(\mathbf{a}) := \prec + \succ.$$

Diagramme d'opérades

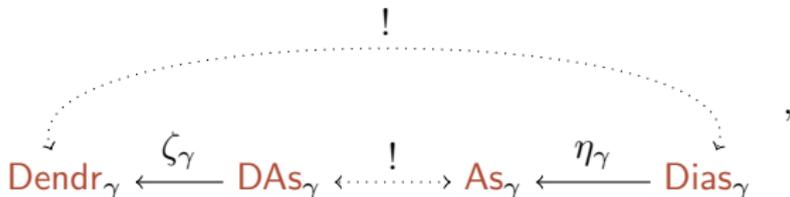
Le diagramme précédent s'étend dans notre contexte en



où DAs_γ et As_γ sont deux généralisations de As (dont l'une est la duale de Koszul de l'autre).

Diagramme d'opérades

Le diagramme précédent s'étend dans notre contexte en



où DAs_γ et As_γ sont deux généralisations de As (dont l'une est la duale de Koszul de l'autre).

L'opérade As_γ admet la présentation $(\mathfrak{G}_{As_\gamma}, \mathfrak{R}_{As_\gamma})$ où

$\mathfrak{G}_{As_\gamma} := \mathfrak{G}_{As_\gamma}(2) := \{\star_a : a \in [\gamma]\}$ et \mathfrak{R}_{As_γ} est engendré par

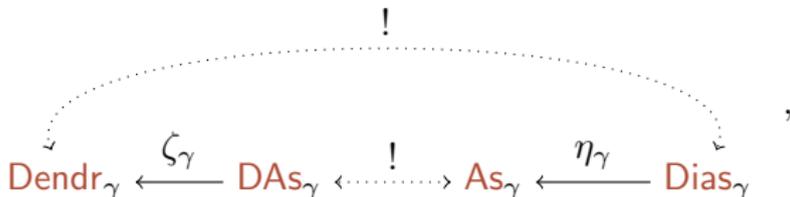
$$\star_a \circ_1 \star_{a'} - \star_{a \uparrow a'} \circ_2 \star_{a \uparrow a'}, \quad a, a' \in [\gamma],$$

$$\star_a \circ_2 \star_{a'} - \star_{a \uparrow a'} \circ_2 \star_{a \uparrow a'}, \quad a, a' \in [\gamma].$$

Cette opérade est réalisée sur un espace de **corolles étiquetées**.

Diagramme d'opérades

Le diagramme précédent s'étend dans notre contexte en



où DAs_γ et As_γ sont deux généralisations de As (dont l'une est la duale de Koszul de l'autre).

L'opérade As_γ admet la présentation $(\mathfrak{G}_{As_\gamma}, \mathfrak{R}_{As_\gamma})$ où

$\mathfrak{G}_{As_\gamma} := \mathfrak{G}_{As_\gamma}(2) := \{\star_a : a \in [\gamma]\}$ et \mathfrak{R}_{As_γ} est engendré par

$$\star_a \circ_1 \star_{a'} - \star_{a \uparrow a'} \circ_2 \star_{a \uparrow a'}, \quad a, a' \in [\gamma],$$

$$\star_a \circ_2 \star_{a'} - \star_{a \uparrow a'} \circ_2 \star_{a \uparrow a'}, \quad a, a' \in [\gamma].$$

Cette opérade est réalisée sur un espace de **corolles étiquetées**.

L'opérade DAs_γ admet la présentation $(\mathfrak{G}_{DAs_\gamma}, \mathfrak{R}_{DAs_\gamma})$ où

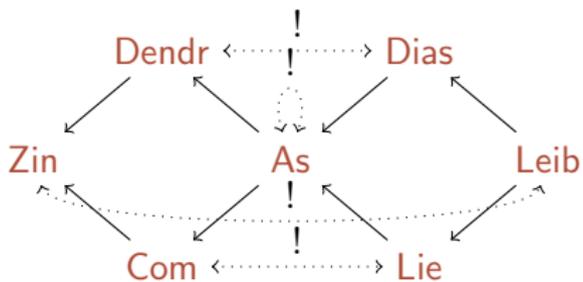
$\mathfrak{G}_{DAs_\gamma} := \mathfrak{G}_{DAs_\gamma}(2) := \{\diamond_a : a \in [\gamma]\}$ et $\mathfrak{R}_{DAs_\gamma}$ est engendré par

$$\diamond_a \circ_1 \diamond_a - \diamond_a \circ_2 \diamond_a, \quad a \in [\gamma].$$

Cette opérade est réalisée sur un espace d'**arbres de Schröder avec un étiquetage particulier**.

Diagramme papillon

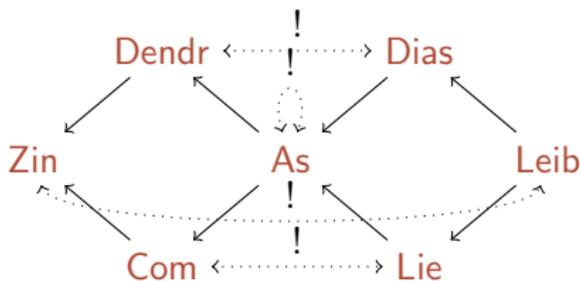
Le diagramme papillon [Loday, 2001]



réunit quelques opérades importantes.

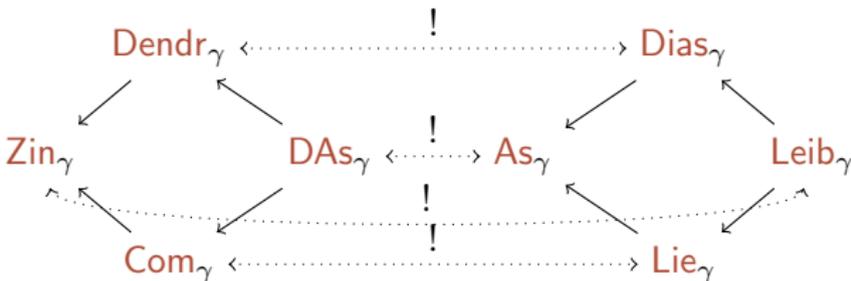
Diagramme papillon

Le diagramme papillon [Loday, 2001]



réunit quelques opérades importantes.

En s'inspirant des propriétés vérifiées par ce diagramme, on peut proposer des opérades Com_γ , Lie_γ , Zin_γ et Leib_γ telles que



forme un nouveau diagramme d'opérades.