Construction d'opérades combinatoires à partir de monoïdes et application aux algèbres de Hopf combinatoires

Samuele Giraudo

JCB 2012

2 février 2012

Plan

Plan

Plan

Séries génératrices et algèbres de Hopf

$S(t) := \sum_{n \geqslant 0} s_n t^n$ série génératrice. Représente l'application

$$\begin{aligned} S : \mathbb{N} &\to \mathbb{Q} \\ n &\to [t^n]\ S(t). \end{aligned}$$

Séries génératrices et algèbres de Hopf

$S(t) := \sum_{n \geqslant 0} s_n t^n$ série génératrice. Représente l'application

$$\begin{aligned} S : \mathbb{N} &\to \mathbb{Q} \\ n &\to [t^n]\ S(t). \end{aligned}$$

Généralisation : les exposants sont des objets combinatoires
$\rightsquigarrow$ séries du type $A(t) := \sum_{x \in \mathcal{C}} a_x t^x$. Représente l'application

$$\begin{aligned} A : \mathcal{C} &\to \mathbb{Q} \\ x &\to [t^x]\ A(t). \end{aligned}$$

Séries génératrices et algèbres de Hopf

$S(t) := \sum_{n \geqslant 0} s_n t^n$ série génératrice. Représente l'application

$$\begin{aligned} S : \mathbb{N} &\to \mathbb{Q} \\ n &\to [t^n]\ S(t). \end{aligned}$$

Généralisation : les exposants sont des objets combinatoires
$\rightsquigarrow$ séries du type $A(t) := \sum_{x \in \mathcal{C}} a_x t^x$. Représente l'application

$$\begin{aligned} A : \mathcal{C} &\to \mathbb{Q} \\ x &\to [t^x]\ A(t). \end{aligned}$$

Produit de l'algèbre de Hopf $\rightsquigarrow$ produit des séries :

$$A(t) \cdot B(t) = \left(\sum_{x \in \mathcal{C}} a_x t^x \right) \cdot \left(\sum_{y \in \mathcal{C}} b_y t^y \right) = \sum_{x, y \in \mathcal{C}} a_x b_y t^{x * y},$$

Séries génératrices et algèbres de Hopf

$S(t) := \sum_{n \geqslant 0} s_n t^n$ série génératrice. Représente l'application

$$\begin{aligned} S : \mathbb{N} &\to \mathbb{Q} \\ n &\to [t^n]\ S(t). \end{aligned}$$

Généralisation : les exposants sont des objets combinatoires
$\rightsquigarrow$ séries du type $A(t) := \sum_{x \in \mathcal{C}} a_x t^x$. Représente l'application

$$\begin{aligned} A : \mathcal{C} &\to \mathbb{Q} \\ x &\to [t^x]\ A(t). \end{aligned}$$

Produit de l'algèbre de Hopf $\rightsquigarrow$ produit des séries :

$$A(t) \cdot B(t) = \left(\sum_{x \in \mathcal{C}} a_x t^x \right) \cdot \left(\sum_{y \in \mathcal{C}} b_y t^y \right) = \sum_{x,y \in \mathcal{C}} a_x b_y t^{x * y},$$

où le produit $*$ est celui d'une algèbre de Hopf.

Classes combinatoires et algèbres de Hopf

$\mathcal{C} := \biguplus_{n \geqslant 0} \mathcal{C}_n$: classe combinatoire.

Classes combinatoires et algèbres de Hopf

$\mathcal{C} := \biguplus_{n \geqslant 0} \mathcal{C}_n$: classe combinatoire.

$\mathrm{Vect}(\mathcal{C}) := \bigoplus_{n \geqslant 0} \mathrm{Vect}(\mathcal{C}_n)$: $\mathbb{Q}$-espace vectoriel engendré par $\mathcal{C}$.

Classes combinatoires et algèbres de Hopf

$\mathcal{C} := \biguplus_{n \geqslant 0} \mathcal{C}_n$: classe combinatoire.

$\mathrm{Vect}(\mathcal{C}) := \bigoplus_{n \geqslant 0} \mathrm{Vect}(\mathcal{C}_n)$: $\mathbb{Q}$-espace vectoriel engendré par $\mathcal{C}$.

Produit $\cdot$: $\mathrm{Vect}(\mathcal{C}_n) \otimes \mathrm{Vect}(\mathcal{C}_m) \to \mathrm{Vect}(\mathcal{C}_{n+m})$.

Classes combinatoires et algèbres de Hopf

$\mathcal{C} := \biguplus_{n \geqslant 0} \mathcal{C}_n$: classe combinatoire.

$\mathrm{Vect}(\mathcal{C}) := \bigoplus_{n \geqslant 0} \mathrm{Vect}(\mathcal{C}_n)$: $\mathbb{Q}$-espace vectoriel engendré par $\mathcal{C}$.

Produit $\cdot : \mathrm{Vect}(\mathcal{C}_n) \otimes \mathrm{Vect}(\mathcal{C}_m) \to \mathrm{Vect}(\mathcal{C}_{n+m})$.

Coproduit $\Delta : \mathrm{Vect}(\mathcal{C}_n) \to \bigoplus_{i+j=n} \mathrm{Vect}(\mathcal{C}_i) \otimes \mathrm{Vect}(\mathcal{C}_j)$.

Classes combinatoires et algèbres de Hopf

$\mathcal{C} := \biguplus_{n \geqslant 0} \mathcal{C}_n$: classe combinatoire.

$\mathrm{Vect}(\mathcal{C}) := \bigoplus_{n \geqslant 0} \mathrm{Vect}(\mathcal{C}_n)$: $\mathbb{Q}$-espace vectoriel engendré par $\mathcal{C}$.

Produit $\cdot$: $\mathrm{Vect}(\mathcal{C}_n) \otimes \mathrm{Vect}(\mathcal{C}_m) \to \mathrm{Vect}(\mathcal{C}_{n+m})$.

Coproduit Δ : $\mathrm{Vect}(\mathcal{C}_n) \to \bigoplus_{i+j=n} \mathrm{Vect}(\mathcal{C}_i) \otimes \mathrm{Vect}(\mathcal{C}_j)$.

Bonnes relations entre $\cdot$ et Δ

$\rightsquigarrow$

$(\mathrm{Vect}(\mathcal{C}), \cdot, \Delta)$ algèbre de Hopf combinatoire.

Un exemple

Soit $\mathcal{C} := \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*$.

Un exemple

Soit $\mathcal{C} := \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*$.

Produit de mélange $⧢$ sur $\mathrm{Vect}(\mathcal{C})$.

Exemple

$$\begin{aligned}\mathtt{ab} ⧢ \mathtt{aa} &= \mathtt{abaa} + \mathtt{aaba} + \mathtt{aaab} + \mathtt{aaba} + \mathtt{aaab} + \mathtt{aaab} \\ &= 3\,\mathtt{aaab} + 2\,\mathtt{aaba} + \mathtt{abaa}.\end{aligned}$$

Un exemple

Soit $\mathcal{C} := \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*$.

Produit de mélange $\sqcup\!\sqcup$ sur $\mathrm{Vect}(\mathcal{C})$.

Exemple

$$\begin{aligned}\mathtt{ab} \sqcup\!\sqcup \mathtt{aa} &= \mathtt{abaa} + \mathtt{aaba} + \mathtt{aaab} + \mathtt{aaba} + \mathtt{aaab} + \mathtt{aaab} \\ &= 3\,\mathtt{aaab} + 2\,\mathtt{aaba} + \mathtt{abaa}.\end{aligned}$$

Coproduit de déconcaténation Δ sur $\mathrm{Vect}(\mathcal{C})$.

Exemple

$$\Delta(\mathtt{baa}) = \epsilon \otimes \mathtt{baa} + \mathtt{b} \otimes \mathtt{aa} + \mathtt{ba} \otimes \mathtt{a} + \mathtt{baa} \otimes \epsilon.$$

Un exemple

Soit $\mathcal{C} := \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*$.

Produit de mélange $⧢$ sur $\mathrm{Vect}(\mathcal{C})$.

Exemple

$$\begin{aligned} \mathtt{ab} ⧢ \mathtt{aa} &= \mathtt{abaa} + \mathtt{aaba} + \mathtt{aaab} + \mathtt{aaba} + \mathtt{aaab} + \mathtt{aaab} \\ &= 3\,\mathtt{aaab} + 2\,\mathtt{aaba} + \mathtt{abaa}. \end{aligned}$$

Coproduit de déconcaténation Δ sur $\mathrm{Vect}(\mathcal{C})$.

Exemple

$$\Delta(\mathtt{baa}) = \epsilon \otimes \mathtt{baa} + \mathtt{b} \otimes \mathtt{aa} + \mathtt{ba} \otimes \mathtt{a} + \mathtt{baa} \otimes \epsilon.$$

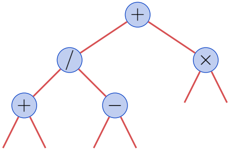
Théorème ([Malvenuto, Reutenauer, 1993])

$(\mathrm{Vect}(\mathcal{C}), ⧢, \Delta)$ *est une algèbre de Hopf combinatoire.*

Plan

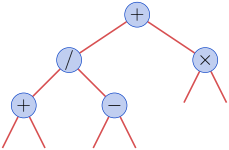
Arbres syntaxiques et opérades

Un arbre syntaxique :

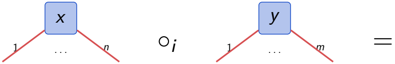


Arbres syntaxiques et opérades

Un arbre syntaxique :

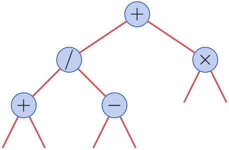


Greffes d'arbres syntaxiques :

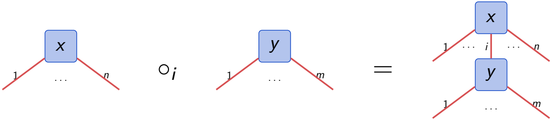


Arbres syntaxiques et opérades

Un arbre syntaxique :

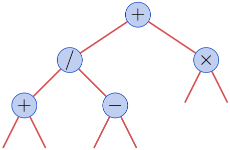


Greffes d'arbres syntaxiques :

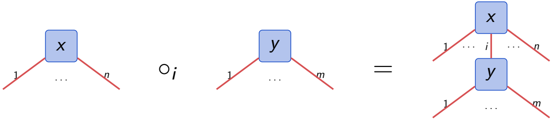


Arbres syntaxiques et opérades

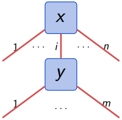
Un arbre syntaxique :



Greffes d'arbres syntaxiques :

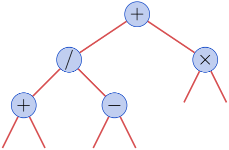


Relations :

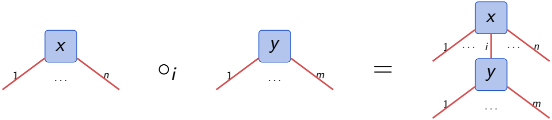


Arbres syntaxiques et opérades

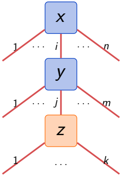
Un arbre syntaxique :



Greffes d'arbres syntaxiques :

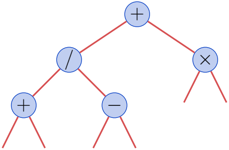


Relations :

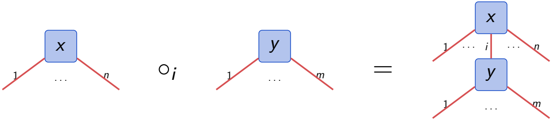


Arbres syntaxiques et opérades

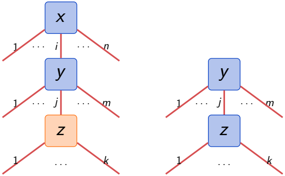
Un arbre syntaxique :



Greffes d'arbres syntaxiques :

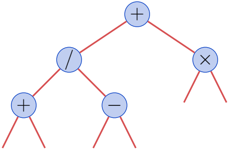


Relations :

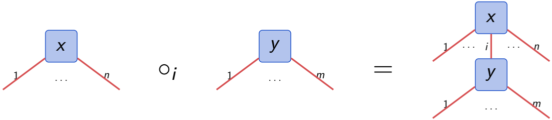


Arbres syntaxiques et opérades

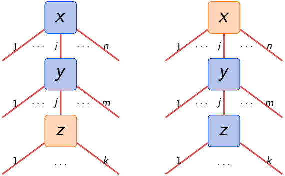
Un arbre syntaxique :



Greffes d'arbres syntaxiques :

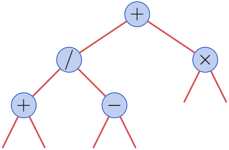


Relations :

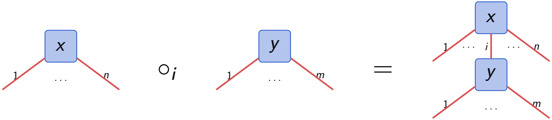


Arbres syntaxiques et opérades

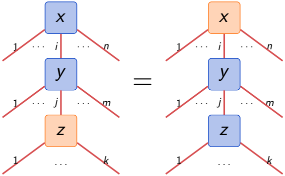
Un arbre syntaxique :



Greffes d'arbres syntaxiques :

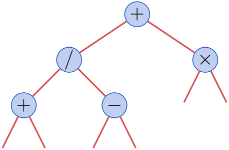


Relations :

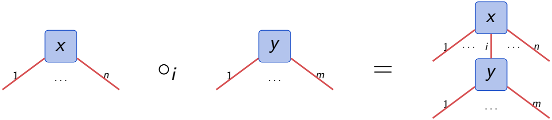


Arbres syntaxiques et opérades

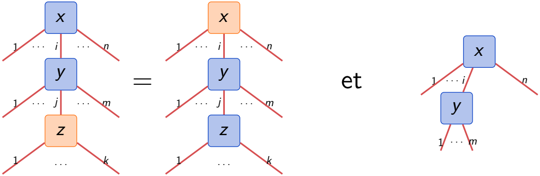
Un arbre syntaxique :



Greffes d'arbres syntaxiques :

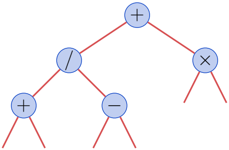


Relations :

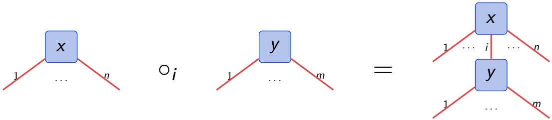


Arbres syntaxiques et opérades

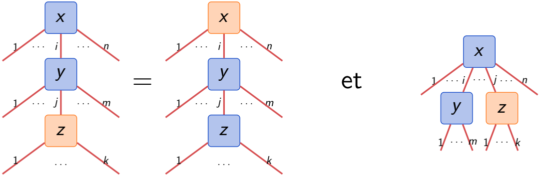
Un arbre syntaxique :



Greffes d'arbres syntaxiques :

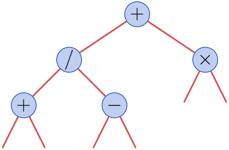


Relations :

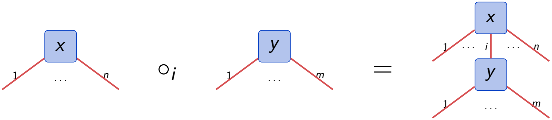


Arbres syntaxiques et opérades

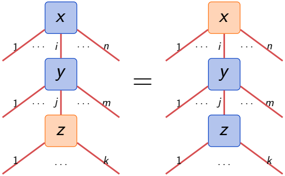
Un arbre syntaxique :



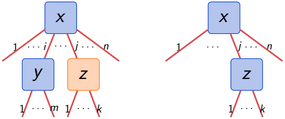
Greffes d'arbres syntaxiques :



Relations :

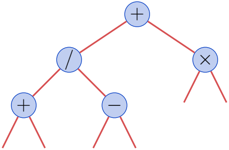


et

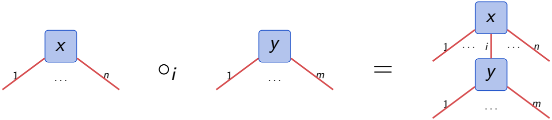


Arbres syntaxiques et opérades

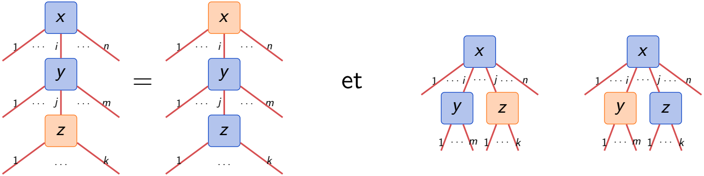
Un arbre syntaxique :



Greffes d'arbres syntaxiques :

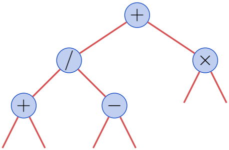


Relations :

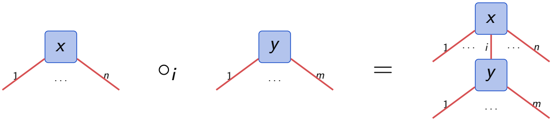


Arbres syntaxiques et opérades

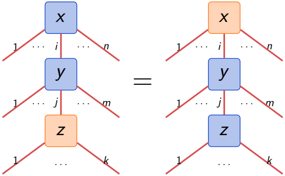
Un arbre syntaxique :



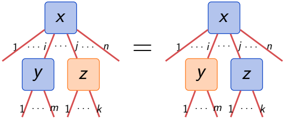
Greffes d'arbres syntaxiques :



Relations :



et



Opérades ensemblistes non-symétriques

Soit $\mathcal{P} := \biguplus_{n \geqslant 1} \mathcal{P}(n)$ un ensemble.

Opérades ensemblistes non-symétriques

Soit $\mathcal{P} := \biguplus_{n \geqslant 1} \mathcal{P}(n)$ un ensemble.

Applications de greffe $\circ_i : \mathcal{P}(n) \times \mathcal{P}(m) \to \mathcal{P}(n + m - 1)$, où $1 \leqslant i \leqslant n$.

Opérades ensemblistes non-symétriques

Soit $\mathcal{P} := \uplus_{n \geqslant 1} \mathcal{P}(n)$ un ensemble.

Applications de greffe $\circ_i : \mathcal{P}(n) \times \mathcal{P}(m) \to \mathcal{P}(n + m - 1)$, où $1 \leqslant i \leqslant n$.

Bonnes relations vérifiées par les $\circ_i$

$\rightsquigarrow$

$(\mathcal{P}, \circ_i)$ opérade ensembliste non-symétrique.

Un exemple

$\mathcal{P} := \biguplus_{n \geqslant 1} \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$ ensemble des arbres plans enracinés à n feuilles.

Un exemple

$\mathcal{P} := \biguplus_{n \geqslant 1} \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$ ensemble des arbres plans enracinés à n feuilles.

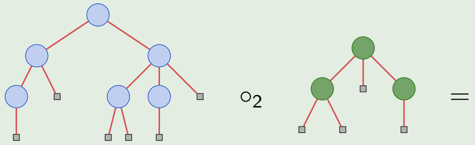
S et T deux arbres. $S \circ_i T$ s'obtient en greffant la racine de T sur la i^{e} feuille de S.

Un exemple

$\mathcal{P} := \biguplus_{n\geqslant 1} \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$ ensemble des arbres plans enracinés à n feuilles.

S et T deux arbres. $S \circ_i T$ s'obtient en greffant la racine de T sur la i^{e} feuille de S.

Exemple

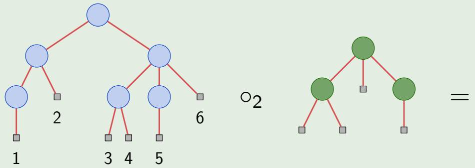


Un exemple

$\mathcal{P} := \uplus_{n \geqslant 1} \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$ ensemble des arbres plans enracinés à n feuilles.

S et T deux arbres. $S \circ_i T$ s'obtient en greffant la racine de T sur la i^{e} feuille de S.

Exemple

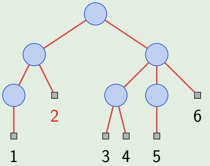


Un exemple

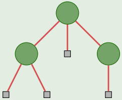
$\mathcal{P} := \biguplus_{n \geqslant 1} \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$ ensemble des arbres plans enracinés à n feuilles.

S et T deux arbres. $S \circ_i T$ s'obtient en greffant la racine de T sur la i^{e} feuille de S.

Exemple



$\circ_2$



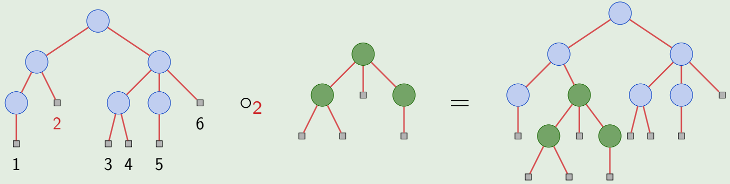
$=$

Un exemple

$\mathcal{P} := \biguplus_{n \geqslant 1} \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$ ensemble des arbres plans enracinés à n feuilles.

S et T deux arbres. $S \circ_i T$ s'obtient en greffant la racine de T sur la i^{e} feuille de S.

Exemple



Plan

La construction H

Entrée : opérade $\mathcal{P}$ telle que $\mathcal{P}(1) = \{\mathbf{1}\}$ et les $\mathcal{P}(n)$ sont finis.

La construction H

Entrée : opérade $\mathcal{P}$ telle que $\mathcal{P}(1) = \{\mathbf{1}\}$ et les $\mathcal{P}(n)$ sont finis.

Sortie : l'algèbre de Hopf combinatoire $\mathsf{H}\mathcal{P} := \mathrm{Vect}(\mathcal{C})$

La construction H

Entrée : opérade $\mathcal{P}$ telle que $\mathcal{P}(1) = \{\mathbf{1}\}$ et les $\mathcal{P}(n)$ sont finis.

Sortie : l'algèbre de Hopf combinatoire $\mathsf{H}\mathcal{P} := \mathrm{Vect}(\mathcal{C})$ où

$$\mathcal{C} := \{\mathbf{1}\} \quad \uplus \quad \biguplus_{k \geqslant 1} \{x_1 | \dots | x_k : x_i \in \mathcal{P}(n_i), n_i \geqslant 2\}.$$

La construction H

Entrée : opérade $\mathcal{P}$ telle que $\mathcal{P}(1) = \{\mathbf{1}\}$ et les $\mathcal{P}(n)$ sont finis.

Sortie : l'algèbre de Hopf combinatoire $\mathsf{H}\mathcal{P} := \mathrm{Vect}(\mathcal{C})$ où

$$\mathcal{C} := \{\mathbf{1}\} \quad \uplus \quad \biguplus_{k \geqslant 1} \{x_1 | \ldots | x_k : x_i \in \mathcal{P}(n_i), n_i \geqslant 2\}.$$

Taille de $x_1 | \ldots | x_k$: $\mathrm{arit}(x_1) + \cdots + \mathrm{arit}(x_k) - k$.

La construction H

Entrée : opérade $\mathcal{P}$ telle que $\mathcal{P}(1) = \{\mathbf{1}\}$ et les $\mathcal{P}(n)$ sont finis.

Sortie : l'algèbre de Hopf combinatoire $\mathsf{H}\mathcal{P} := \mathrm{Vect}(\mathcal{C})$ où

$$\mathcal{C} := \{\mathbf{1}\} \quad \uplus \quad \biguplus_{k \geqslant 1} \{x_1 | \dots | x_k : x_i \in \mathcal{P}(n_i), n_i \geqslant 2\}.$$

Taille de $x_1 | \dots | x_k$: $\mathrm{arit}(x_1) + \dots + \mathrm{arit}(x_k) - k$.

Produit : $\mathbf{1}$ est neutre et

$$(x_1 | \dots | x_k) \cdot (y_1 | \dots | y_\ell) := x_1 | \dots | x_k | y_1 | \dots | y_\ell.$$

La construction H

Entrée : opérade $\mathcal{P}$ telle que $\mathcal{P}(1) = \{\mathbf{1}\}$ et les $\mathcal{P}(n)$ sont finis.

Sortie : l'algèbre de Hopf combinatoire $\mathsf{H}\mathcal{P} := \mathrm{Vect}(\mathcal{C})$ où

$$\mathcal{C} := \{\mathbf{1}\} \quad \uplus \quad \biguplus_{k \geqslant 1} \{x_1 | \dots | x_k : x_i \in \mathcal{P}(n_i), n_i \geqslant 2\}.$$

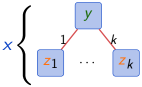
Taille de $x_1 | \dots | x_k$: $\mathrm{arit}(x_1) + \dots + \mathrm{arit}(x_k) - k$.

Produit : $\mathbf{1}$ est neutre et

$$(x_1 | \dots | x_k) \cdot (y_1 | \dots | y_\ell) := x_1 | \dots | x_k | y_1 | \dots | y_\ell.$$

Coproduit : pour $x \in \mathcal{P}$,

$$\Delta(x) := \sum y \otimes z_1 | \dots | z_k,$$



et

$$\Delta(x_1 | \dots | x_k) := \Delta(x_1) \cdot \dots \cdot \Delta(x_k).$$

Un exemple

Opérade commutative associative : $\mathit{Com} := \biguplus_{n \geqslant 1} \{\alpha_n\}$ avec

$$\alpha_n \circ_i \alpha_m := \alpha_{n+m-1}, \quad \text{pour tous } n, m \geqslant 1 \text{ et } 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Un exemple

Opérade commutative associative : $Com := \biguplus_{n\geqslant 1} \{\alpha_n\}$ avec

$$\alpha_n \circ_i \alpha_m := \alpha_{n+m-1}, \quad \text{pour tous } n, m \geqslant 1 \text{ et } 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Degré	Éléments de base de $\mathsf{H}Com$
0	α_1

Un exemple

Opérade commutative associative : $\mathit{Com} := \biguplus_{n \geqslant 1} \{\alpha_n\}$ avec

$$\alpha_n \circ_i \alpha_m := \alpha_{n+m-1}, \quad \text{pour tous } n, m \geqslant 1 \text{ et } 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Degré	Éléments de base de $\mathrm{H}\mathit{Com}$
0	α_1
1	α_2

Un exemple

Opérade commutative associative : $\mathit{Com} := \biguplus_{n \geqslant 1} \{\alpha_n\}$ avec

$$\alpha_n \circ_i \alpha_m := \alpha_{n+m-1}, \quad \text{pour tous } n, m \geqslant 1 \text{ et } 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Degré	Éléments de base de $\mathsf{H}\mathit{Com}$
0	α_1
1	α_2
2	$\alpha_3, \quad \alpha_2 \vert \alpha_2$

Un exemple

Opérade commutative associative : $\mathit{Com} := \biguplus_{n \geqslant 1} \{\alpha_n\}$ avec

$$\alpha_n \circ_i \alpha_m := \alpha_{n+m-1}, \quad \text{pour tous } n, m \geqslant 1 \text{ et } 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Degré	Éléments de base de $\mathsf{H}\mathit{Com}$
0	α_1
1	α_2
2	$\alpha_3, \quad \alpha_2 \vert \alpha_2$
3	$\alpha_4, \quad \alpha_3 \vert \alpha_2, \quad \alpha_2 \vert \alpha_3, \quad \alpha_2 \vert \alpha_2 \vert \alpha_2$

Un exemple

Opérade commutative associative : $\mathit{Com} := \biguplus_{n \geqslant 1} \{\alpha_n\}$ avec

$$\alpha_n \circ_i \alpha_m := \alpha_{n+m-1}, \quad \text{pour tous } n, m \geqslant 1 \text{ et } 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Degré	Éléments de base de $\mathrm{H}\mathit{Com}$
0	α_1
1	α_2
2	$\alpha_3, \quad \alpha_2 \vert \alpha_2$
3	$\alpha_4, \quad \alpha_3 \vert \alpha_2, \quad \alpha_2 \vert \alpha_3, \quad \alpha_2 \vert \alpha_2 \vert \alpha_2$

Exemple

$$\alpha_3 | \alpha_2 \ \cdot \ \alpha_1$$

Un exemple

Opérade commutative associative : $Com := \biguplus_{n \geqslant 1} \{\alpha_n\}$ avec

$$\alpha_n \circ_i \alpha_m := \alpha_{n+m-1}, \quad \text{pour tous } n, m \geqslant 1 \text{ et } 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Degré	Éléments de base de H*Com*
0	α_1
1	α_2
2	$\alpha_3, \quad \alpha_2 \vert \alpha_2$
3	$\alpha_4, \quad \alpha_3 \vert \alpha_2, \quad \alpha_2 \vert \alpha_3, \quad \alpha_2 \vert \alpha_2 \vert \alpha_2$

Exemple

$$\alpha_3 | \alpha_2 \; \cdot \; \alpha_1 = \alpha_3 | \alpha_2 | \alpha_1$$

Un exemple

Opérade commutative associative : $Com := \biguplus_{n\geqslant 1} \{\alpha_n\}$ avec

$$\alpha_n \circ_i \alpha_m := \alpha_{n+m-1}, \quad \text{pour tous } n, m \geqslant 1 \text{ et } 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Degré	Éléments de base de $\mathrm{H}Com$
0	α_1
1	α_2
2	$\alpha_3, \quad \alpha_2\vert\alpha_2$
3	$\alpha_4, \quad \alpha_3\vert\alpha_2, \quad \alpha_2\vert\alpha_3, \quad \alpha_2\vert\alpha_2\vert\alpha_2$

Exemple

$$\alpha_3|\alpha_2 \ \cdot \ \alpha_1 = \alpha_3|\alpha_2|\alpha_1 = \alpha_3|\alpha_2$$

Un exemple

Opérade commutative associative : $Com := \biguplus_{n \geqslant 1} \{\alpha_n\}$ avec

$$\alpha_n \circ_i \alpha_m := \alpha_{n+m-1}, \quad \text{pour tous } n, m \geqslant 1 \text{ et } 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Degré	Éléments de base de $\mathrm{H}Com$
0	α_1
1	α_2
2	$\alpha_3, \quad \alpha_2 \vert \alpha_2$
3	$\alpha_4, \quad \alpha_3 \vert \alpha_2, \quad \alpha_2 \vert \alpha_3, \quad \alpha_2 \vert \alpha_2 \vert \alpha_2$

Exemple

$$\alpha_3|\alpha_2 \cdot \alpha_1 = \alpha_3|\alpha_2|\alpha_1 = \alpha_3|\alpha_2 = \alpha_1|\alpha_3|\alpha_2$$

Un exemple

Opérade commutative associative : $Com := \biguplus_{n \geqslant 1} \{\alpha_n\}$ avec

$$\alpha_n \circ_i \alpha_m := \alpha_{n+m-1}, \quad \text{pour tous } n, m \geqslant 1 \text{ et } 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Degré	Éléments de base de $\mathrm{H}Com$
0	α_1
1	α_2
2	$\alpha_3, \quad \alpha_2\|\alpha_2$
3	$\alpha_4, \quad \alpha_3\|\alpha_2, \quad \alpha_2\|\alpha_3, \quad \alpha_2\|\alpha_2\|\alpha_2$

Exemple

$$\alpha_3|\alpha_2 \cdot \alpha_1 = \alpha_3|\alpha_2|\alpha_1 = \alpha_3|\alpha_2 = \alpha_1|\alpha_3|\alpha_2 = \alpha_1 \cdot \alpha_3|\alpha_2$$

Un exemple

Opérade commutative associative : $Com := \biguplus_{n \geqslant 1} \{\alpha_n\}$ avec

$$\alpha_n \circ_i \alpha_m := \alpha_{n+m-1}, \quad \text{pour tous } n, m \geqslant 1 \text{ et } 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Degré	Éléments de base de $\mathbf{H}Com$
0	α_1
1	α_2
2	$\alpha_3, \quad \alpha_2\|\alpha_2$
3	$\alpha_4, \quad \alpha_3\|\alpha_2, \quad \alpha_2\|\alpha_3, \quad \alpha_2\|\alpha_2\|\alpha_2$

Exemple

$$\alpha_3|\alpha_2 \;\cdot\; \alpha_1 = \alpha_3|\alpha_2|\alpha_1 = \alpha_3|\alpha_2 = \alpha_1|\alpha_3|\alpha_2 = \alpha_1 \;\cdot\; \alpha_3|\alpha_2$$

$$\alpha_2|\alpha_3 \;\cdot\; \alpha_4|\alpha_2|\alpha_3 = \alpha_2|\alpha_3|\alpha_4|\alpha_2|\alpha_3$$

Un exemple

Opérade commutative associative : $Com := \uplus_{n\geqslant 1} \{\alpha_n\}$ avec

$$\alpha_n \circ_i \alpha_m := \alpha_{n+m-1}, \quad \text{pour tous } n, m \geqslant 1 \text{ et } 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Degré	Éléments de base de $\mathsf{H}Com$
0	α_1
1	α_2
2	$\alpha_3, \quad \alpha_2\vert\alpha_2$
3	$\alpha_4, \quad \alpha_3\vert\alpha_2, \quad \alpha_2\vert\alpha_3, \quad \alpha_2\vert\alpha_2\vert\alpha_2$

Exemple

$$\alpha_3|\alpha_2 \cdot \alpha_1 = \alpha_3|\alpha_2|\alpha_1 = \alpha_3|\alpha_2 = \alpha_1|\alpha_3|\alpha_2 = \alpha_1 \cdot \alpha_3|\alpha_2$$

$$\alpha_2|\alpha_3 \cdot \alpha_4|\alpha_2|\alpha_3 = \alpha_2|\alpha_3|\alpha_4|\alpha_2|\alpha_3$$

Exemple

$$\begin{aligned}\Delta(\alpha_4) = {} & \alpha_1 \otimes \alpha_4 + \alpha_2 \otimes (\alpha_1|\alpha_3 + \alpha_2|\alpha_2 + \alpha_3|\alpha_1) \\ & + \alpha_3 \otimes (\alpha_1|\alpha_1|\alpha_2 + \alpha_1|\alpha_2|\alpha_1 + \alpha_2|\alpha_1|\alpha_1) \\ & + \alpha_4 \otimes \alpha_1|\alpha_1|\alpha_1|\alpha_1\end{aligned}$$

Un exemple

Opérade commutative associative : $Com := \biguplus_{n\geqslant 1} \{\alpha_n\}$ avec

$$\alpha_n \circ_i \alpha_m := \alpha_{n+m-1}, \quad \text{pour tous } n, m \geqslant 1 \text{ et } 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Degré	Éléments de base de $\mathrm{H}Com$
0	α_1
1	α_2
2	$\alpha_3, \quad \alpha_2\vert\alpha_2$
3	$\alpha_4, \quad \alpha_3\vert\alpha_2, \quad \alpha_2\vert\alpha_3, \quad \alpha_2\vert\alpha_2\vert\alpha_2$

Exemple

$$\alpha_3|\alpha_2 \cdot \alpha_1 = \alpha_3|\alpha_2|\alpha_1 = \alpha_3|\alpha_2 = \alpha_1|\alpha_3|\alpha_2 = \alpha_1 \cdot \alpha_3|\alpha_2$$

$$\alpha_2|\alpha_3 \cdot \alpha_4|\alpha_2|\alpha_3 = \alpha_2|\alpha_3|\alpha_4|\alpha_2|\alpha_3$$

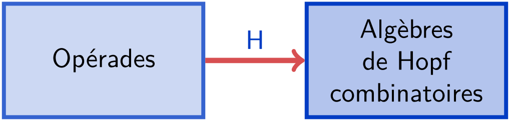
Exemple

$$\begin{aligned}\Delta(\alpha_4) &= \alpha_1 \otimes \alpha_4 + \alpha_2 \otimes (\alpha_1|\alpha_3 + \alpha_2|\alpha_2 + \alpha_3|\alpha_1)\\ &\quad + \alpha_3 \otimes (\alpha_1|\alpha_1|\alpha_2 + \alpha_1|\alpha_2|\alpha_1 + \alpha_2|\alpha_1|\alpha_1)\\ &\quad + \alpha_4 \otimes \alpha_1|\alpha_1|\alpha_1|\alpha_1\\ &= \alpha_1 \otimes \alpha_4 + \alpha_2 \otimes (2\,\alpha_3 + \alpha_2|\alpha_2) + 3\,\alpha_3 \otimes \alpha_2 + \alpha_4 \otimes \alpha_1\end{aligned}$$

Objectifs

Opérades

Objectifs



Objectifs

Objectifs

Plan

Plan

La construction T (1/2)

On part d'un monoïde $(M, \bullet, 1)$ quelconque.

La construction T (1/2)

On part d'un monoïde $(M, \bullet, 1)$ quelconque.

Soit $\mathsf{T}M$ l'ensemble $\mathsf{T}M := \biguplus_{n \geqslant 1} \mathsf{T}M(n)$ où

$$\mathsf{T}M(n) := \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in M \text{ pour tout } 1 \leqslant i \leqslant n\}.$$

La construction T (1/2)

On part d'un monoïde $(M, \bullet, 1)$ quelconque.

Soit $\mathsf{T}M$ l'ensemble $\mathsf{T}M := \biguplus_{n \geqslant 1} \mathsf{T}M(n)$ où

$$\mathsf{T}M(n) := \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in M \text{ pour tout } 1 \leqslant i \leqslant n\}\,.$$

Soient les applications de greffe

$$\circ_i : \mathsf{T}M(n) \times \mathsf{T}M(m) \to \mathsf{T}M(n + m - 1),$$

définies pour tout $x \in \mathsf{T}M(n)$, $y \in \mathsf{T}M(m)$ et $1 \leqslant i \leqslant n$ par

$$x \circ_i y := (x_1,\ \dots,\ x_{i-1},\ x_i \bullet y_1,\ \dots,\ x_i \bullet y_m,\ x_{i+1},\ \dots,\ x_n).$$

La construction T (2/2)

Soient M et N deux monoïdes et $\theta : M \to N$ un morphisme de monoïde.

La construction T (2/2)

Soient M et N deux monoïdes et $\theta : M \to N$ un morphisme de monoïde.

Soit $\mathsf{T}\theta$ l'application

$$\mathsf{T}\theta : \mathsf{T}M \to \mathsf{T}N,$$

définie pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathsf{T}M(n)$ par

$$\mathsf{T}\theta\,(x_1, \dots, x_n) := (\theta(x_1), \dots, \theta(x_n))\,.$$

Quelques exemples

$M := (\mathbb{N}, +)$. Éléments de $\mathsf{T}M$: mots sur l'alphabet $\mathbb{N}$.

Quelques exemples

$M := (\mathbb{N}, +)$. Éléments de $\mathsf{T}M$: mots sur l'alphabet $\mathbb{N}$.

Exemple

$$2\mathbf{1}23 \circ_2 30313 = 24142423$$

Quelques exemples

$M := (\mathbb{N}, +)$. Éléments de TM : mots sur l'alphabet $\mathbb{N}$.

Exemple

$$2\mathbf{1}23 \circ_2 30313 = 24142423$$

$N := \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*$. Éléments de T$N$: multi-mots sur l'alphabet $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$.

Quelques exemples

$M := (\mathbb{N}, +)$. Éléments de TM : mots sur l'alphabet $\mathbb{N}$.

Exemple

$$2\mathbf{1}23 \circ_2 30313 = 24142423$$

$N := \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*$. Éléments de T$N$: multi-mots sur l'alphabet $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$.

Exemple

$$\begin{array}{ccccc} \mathtt{b} & \mathtt{a} & \mathbf{a} & \epsilon & \mathtt{b} \\ & \mathtt{b} & & & \mathtt{b} \\ & \mathtt{a} & & & \end{array} \circ_3 \begin{array}{cccc} \epsilon & \mathtt{a} & \epsilon & \mathtt{b} \\ & & & \mathtt{b} \end{array} = \begin{array}{cccccccc} \mathtt{b} & \mathtt{a} & \mathbf{a} & \mathbf{a} & \mathbf{a} & \mathbf{a} & \epsilon & \mathtt{b} \\ & \mathtt{b} & & \mathtt{a} & & \mathtt{b} & & \mathtt{b} \\ & \mathtt{a} & & & & \mathtt{b} & & \end{array}$$

Quelques exemples

$M := (\mathbb{N}, +)$. Éléments de TM : mots sur l'alphabet $\mathbb{N}$.

Exemple

$$2\mathbf{1}23 \circ_2 30313 = 24142423$$

$N := \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*$. Éléments de T$N$: multi-mots sur l'alphabet $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$.

Exemple

$$\begin{matrix} \mathtt{b} & \mathtt{a} & \mathbf{a} & \epsilon & \mathtt{b} \\ & \mathtt{b} & & & \mathtt{b} \\ & \mathtt{a} & & & \end{matrix} \circ_3 \begin{matrix} \epsilon & \mathtt{a} & \epsilon & \mathtt{b} \\ & & & \mathtt{b} \end{matrix} = \begin{matrix} \mathtt{b} & \mathtt{a} & \mathbf{a} & \mathbf{a} & \mathbf{a} & \mathbf{a} & \epsilon & \mathtt{b} \\ & \mathtt{b} & & \mathtt{a} & & \mathtt{b} & & \mathtt{b} \\ & \mathtt{a} & & & & \mathtt{b} & & \end{matrix}$$

Soit $\theta : N \to M$ défini par $\theta(u) := |u|$.

Quelques exemples

$M := (\mathbb{N}, +)$. Éléments de $\mathsf{T}M$: mots sur l'alphabet $\mathbb{N}$.

Exemple

$$2\mathbf{1}23 \circ_2 30313 = 24142423$$

$N := \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*$. Éléments de $\mathsf{T}N$: multi-mots sur l'alphabet $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$.

Exemple

$$\begin{array}{ccccc} \mathtt{b} & \mathtt{a} & \mathtt{a} & \epsilon & \mathtt{b} \\ & \mathtt{b} & & & \mathtt{b} \\ & \mathtt{a} & & & \end{array} \circ_3 \begin{array}{cccc} \epsilon & \mathtt{a} & \epsilon & \mathtt{b} \\ & & & \mathtt{b} \end{array} = \begin{array}{cccccccc} \mathtt{b} & \mathtt{a} & \mathtt{a} & \mathtt{a} & \mathtt{a} & \mathtt{a} & \epsilon & \mathtt{b} \\ & \mathtt{b} & & \mathtt{a} & & \mathtt{b} & & \mathtt{b} \\ & \mathtt{a} & & & & \mathtt{b} & & \end{array}$$

Soit $\theta : N \to M$ défini par $\theta(u) := |u|$.

Exemple

$$\mathsf{T}\theta \left(\begin{array}{ccccc} \mathtt{b} & \mathtt{a} & \mathtt{a} & \epsilon & \mathtt{b} \\ & \mathtt{b} & & & \mathtt{b} \\ & \mathtt{a} & & & \end{array} \right) = 13102$$

Propriétés de la construction T

Théorème

Si M est un monoïde, TM *est une opérade et si* $\theta : M \to N$ *est un morphisme de monoïde,* Tθ *est un morphisme d'opérade. De plus,* T *respecte les injections et les surjections.*

Propriétés de la construction T

Théorème

Si M est un monoïde, $\mathsf{T}M$ est une opérade et si $\theta : M \to N$ est un morphisme de monoïde, $\mathsf{T}\theta$ est un morphisme d'opérade. De plus, T respecte les injections et les surjections.

Quelques propriétés de la construction T :

- les $\mathsf{T}M(n)$ sont finis ssi M est un monoïde fini ;
- $\mathsf{T}M$ est engendrée par la famille $\{(1, 1)\} \uplus \{(a) : a \in M\}$;
- si N est un monoïde quotient de M, alors $\mathsf{T}N$ est une opérade quotient de $\mathsf{T}M$.

Aperçu des opérades obtenues (1/2)

Quelques sous-opérades ou quotients de $\mathsf{T}\mathbb{N}$:

Opérade	Premières dimensions	Objets combinatoires
End	$1, 4, 27, 256, 3125$	Endofonctions
FP	$1, 3, 16, 125, 1296$	Fonctions de parking
MT	$1, 3, 13, 75, 541$	Mots tassés
Per	$1, 2, 6, 24, 120$	Permutations
APE	$1, 1, 2, 5, 14, 42$	Arbres plans enracinés
$\mathit{FCat}^{(k)}$	Nombres de Fuss-Catalan	k-chemins de Dyck
Schr	$1, 3, 11, 45, 197$	Arbres de Schröder
Motz	$1, 1, 2, 4, 9, 21, 51$	Chemins de Motzkin
Comp	$1, 2, 4, 8, 16, 32$	Compo. d'entiers
AnD	$1, 2, 5, 13, 35, 96$	Animaux dirigés
SComp	$1, 3, 27, 81, 243$	Compo. d'entiers segmentées

Aperçu des opérades obtenues (2/2)

Elles s'agencent selon le diagramme suivant ($\rightarrowtail$ signifie injection et $\twoheadrightarrow$ surjection) :

$$
\begin{tikzcd}
 & & & \mathsf{T}\mathbb{N} \arrow[dlll, two heads] \arrow[drr, two heads] & & \\
\mathsf{T}\mathbb{N}_2 & & \mathit{End} \arrow[ur, tail] & & & \mathsf{T}\mathbb{N}_3 \\
 & & \mathit{FP} \arrow[u, tail] & & & \\
 & & \mathit{MT} \arrow[u, tail] \arrow[dl, two heads] & \mathit{FCat}^{(3)} \arrow[uuu, tail, dashed] & & \\
 & \mathit{Per} & \mathit{Schr} \arrow[u, tail] & \mathit{FCat}^{(2)} \arrow[u, tail] \arrow[drr, two heads] & & \\
 & & & \mathit{FCat}^{(1)} \arrow[u, tail] \arrow[ul, tail] \arrow[dlll, two heads] \arrow[drr, two heads] & & \mathit{SComp} \arrow[uuuu, tail] \\
\mathit{Comp} \arrow[uuuuu, tail] \arrow[drrr, two heads] & \mathit{Motz} \arrow[urr, tail] & & & \mathit{APE} \arrow[ul, tail] \arrow[dl, two heads] & \mathit{AnD} \arrow[u, tail] \arrow[dll, two heads] \\
 & & & \mathit{FCat}^{(0)} \arrow[ull, tail] & &
\end{tikzcd}
$$

Plan

Expérimentation avec Sage

Soit APE la sous-opérade de $\mathsf{T}\mathbb{N}$ engendrée par 01.

Expérimentation avec Sage

Soit APE la sous-opérade de $\mathsf{T}\mathbb{N}$ engendrée par 01.

```
sage: M = MonoideAdditif()
```

Expérimentation avec Sage

Soit *APE* la sous-opérade de $\mathsf{T}\mathbb{N}$ engendrée par 01.

```
sage: M = MonoideAdditif()
sage: G = [Mot(M, [0, 1])]
```

Expérimentation avec Sage

Soit *APE* la sous-opérade de $\mathsf{T}\mathbb{N}$ engendrée par 01.

```
sage: M = MonoideAdditif()
sage: G = [Mot(M, [0, 1])]
sage: APE = OperadeMonoide(M, False, G)
```

Expérimentation avec Sage

Soit *APE* la sous-opérade de $\mathsf{T}\mathbb{N}$ engendrée par 01.

```
sage: M = MonoideAdditif()
sage: G = [Mot(M, [0, 1])]
sage: APE = OperadeMonoide(M, False, G)
sage: print [APE.dimension(n) for n in xrange(1, 10)]
```

Expérimentation avec Sage

Soit *APE* la sous-opérade de $T\mathbb{N}$ engendrée par 01.

```
sage: M = MonoideAdditif()
sage: G = [Mot(M, [0, 1])]
sage: APE = OperadeMonoide(M, False, G)
sage: print [APE.dimension(n) for n in xrange(1, 10)]
[1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430]
```

Expérimentation avec Sage

Soit *APE* la sous-opérade de $\mathsf{T}\mathbb{N}$ engendrée par 01.

```
sage: M = MonoideAdditif()
sage: G = [Mot(M, [0, 1])]
sage: APE = OperadeMonoide(M, False, G)
sage: print [APE.dimension(n) for n in xrange(1, 10)]
[1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430]

sage: sorted(APE.elements(5))
```

Expérimentation avec Sage

Soit *APE* la sous-opérade de $T\mathbb{N}$ engendrée par 01.

```
sage: M = MonoideAdditif()
sage: G = [Mot(M, [0, 1])]
sage: APE = OperadeMonoide(M, False, G)
sage: print [APE.dimension(n) for n in xrange(1, 10)]
[1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430]

sage: sorted(APE.elements(5))
[01111, 01112, 01121, 01122, 01123, 01211, 01212, 01221,
01222, 01223, 01231, 01232, 01233, 01234]
```

Une opérade sur les arbres plans enracinés

Proposition

Les éléments de APE sont exactement les mots x sur l'alphabet $\mathbb{N}$ qui vérifient $x_1 = 0$ et $1 \leqslant x_{i+1} \leqslant x_i + 1$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant |x| - 1$.

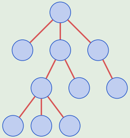
Une opérade sur les arbres plans enracinés

Proposition

Les éléments de APE sont exactement les mots x sur l'alphabet $\mathbb{N}$ qui vérifient $x_1 = 0$ et $1 \leqslant x_{i+1} \leqslant x_i + 1$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant |x| - 1$.

Bijection entre ces mots de longueur n et les arbres plans enracinés à n nœuds (parcours en profondeur).

Exemple



$\longleftrightarrow$

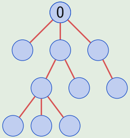
Une opérade sur les arbres plans enracinés

Proposition

Les éléments de APE sont exactement les mots x sur l'alphabet $\mathbb{N}$ qui vérifient $x_1 = 0$ et $1 \leqslant x_{i+1} \leqslant x_i + 1$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant |x| - 1$.

Bijection entre ces mots de longueur n et les arbres plans enracinés à n nœuds (parcours en profondeur).

Exemple



$\longleftrightarrow$ 0

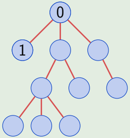
Une opérade sur les arbres plans enracinés

Proposition

Les éléments de APE sont exactement les mots x sur l'alphabet $\mathbb{N}$ qui vérifient $x_1 = 0$ et $1 \leqslant x_{i+1} \leqslant x_i + 1$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant |x| - 1$.

Bijection entre ces mots de longueur n et les arbres plans enracinés à n nœuds (parcours en profondeur).

Exemple



$\longleftrightarrow$ 01

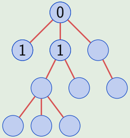
Une opérade sur les arbres plans enracinés

Proposition

Les éléments de APE sont exactement les mots x sur l'alphabet $\mathbb{N}$ qui vérifient $x_1 = 0$ et $1 \leqslant x_{i+1} \leqslant x_i + 1$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant |x| - 1$.

Bijection entre ces mots de longueur n et les arbres plans enracinés à n nœuds (parcours en profondeur).

Exemple



$\longleftrightarrow \quad 011$

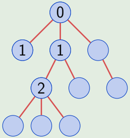
Une opérade sur les arbres plans enracinés

Proposition

Les éléments de APE sont exactement les mots x sur l'alphabet $\mathbb{N}$ qui vérifient $x_1 = 0$ et $1 \leqslant x_{i+1} \leqslant x_i + 1$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant |x| - 1$.

Bijection entre ces mots de longueur n et les arbres plans enracinés à n nœuds (parcours en profondeur).

Exemple



$\longleftrightarrow$ 0112

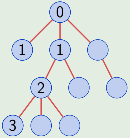
Une opérade sur les arbres plans enracinés

Proposition

Les éléments de APE sont exactement les mots x sur l'alphabet $\mathbb{N}$ qui vérifient $x_1 = 0$ et $1 \leqslant x_{i+1} \leqslant x_i + 1$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant |x| - 1$.

Bijection entre ces mots de longueur n et les arbres plans enracinés à n nœuds (parcours en profondeur).

Exemple



$\longleftrightarrow$ 01123

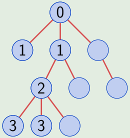
Une opérade sur les arbres plans enracinés

Proposition

Les éléments de APE sont exactement les mots x sur l'alphabet $\mathbb{N}$ qui vérifient $x_1 = 0$ et $1 \leqslant x_{i+1} \leqslant x_i + 1$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant |x| - 1$.

Bijection entre ces mots de longueur n et les arbres plans enracinés à n nœuds (parcours en profondeur).

Exemple



$\longleftrightarrow$ 011233

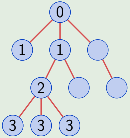
Une opérade sur les arbres plans enracinés

Proposition

Les éléments de APE sont exactement les mots x sur l'alphabet $\mathbb{N}$ qui vérifient $x_1 = 0$ et $1 \leqslant x_{i+1} \leqslant x_i + 1$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant |x| - 1$.

Bijection entre ces mots de longueur n et les arbres plans enracinés à n nœuds (parcours en profondeur).

Exemple



$\longleftrightarrow$ 0112333

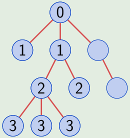
Une opérade sur les arbres plans enracinés

Proposition

Les éléments de APE sont exactement les mots x sur l'alphabet $\mathbb{N}$ qui vérifient $x_1 = 0$ et $1 \leqslant x_{i+1} \leqslant x_i + 1$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant |x| - 1$.

Bijection entre ces mots de longueur n et les arbres plans enracinés à n nœuds (parcours en profondeur).

Exemple



$\longleftrightarrow$ 01123332

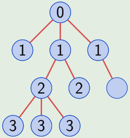
Une opérade sur les arbres plans enracinés

Proposition

Les éléments de APE sont exactement les mots x sur l'alphabet $\mathbb{N}$ qui vérifient $x_1 = 0$ et $1 \leqslant x_{i+1} \leqslant x_i + 1$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant |x| - 1$.

Bijection entre ces mots de longueur n et les arbres plans enracinés à n nœuds (parcours en profondeur).

Exemple



$\longleftrightarrow$ 011233321

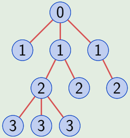
Une opérade sur les arbres plans enracinés

Proposition

Les éléments de APE sont exactement les mots x sur l'alphabet $\mathbb{N}$ qui vérifient $x_1 = 0$ et $1 \leqslant x_{i+1} \leqslant x_i + 1$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant |x| - 1$.

Bijection entre ces mots de longueur n et les arbres plans enracinés à n nœuds (parcours en profondeur).

Exemple



$\longleftrightarrow$ 0112333212

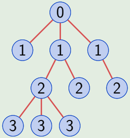
Une opérade sur les arbres plans enracinés

Proposition

Les éléments de APE sont exactement les mots x sur l'alphabet $\mathbb{N}$ qui vérifient $x_1 = 0$ et $1 \leqslant x_{i+1} \leqslant x_i + 1$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant |x| - 1$.

Bijection entre ces mots de longueur n et les arbres plans enracinés à n nœuds (parcours en profondeur).

Exemple



$\longleftrightarrow$ 0112333212

Ainsi, *APE* est une opérade sur les arbres plans enracinés et

$$\dim APE(n) = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}.$$

La greffe dans *APE*

On interprète la greffe dans APE via la bijection avec les arbres plans enracinés.

Proposition

Soient S et T deux arbres plans enracinés et s le i^e nœud visité de S selon son parcours en profondeur. La greffe $S \circ_i T$ dans APE revient à greffer dans S les sous-arbres de la racine de T en tant que fils les plus à gauche de s.

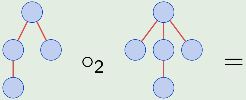
La greffe dans *APE*

On interprète la greffe dans *APE* via la bijection avec les arbres plans enracinés.

Proposition

Soient S et T deux arbres plans enracinés et s le i^e nœud visité de S selon son parcours en profondeur. La greffe $S \circ_i T$ dans APE revient à greffer dans S les sous-arbres de la racine de T en tant que fils les plus à gauche de s.

Exemple



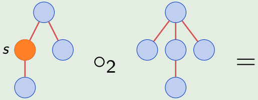
La greffe dans *APE*

On interprète la greffe dans *APE* via la bijection avec les arbres plans enracinés.

Proposition

Soient S et T deux arbres plans enracinés et s le i^{e} nœud visité de S selon son parcours en profondeur. La greffe $S \circ_i T$ dans APE revient à greffer dans S les sous-arbres de la racine de T en tant que fils les plus à gauche de s.

Exemple



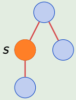
La greffe dans *APE*

On interprète la greffe dans *APE* via la bijection avec les arbres plans enracinés.

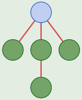
Proposition

Soient S et T deux arbres plans enracinés et s le i^e nœud visité de S selon son parcours en profondeur. La greffe $S \circ_i T$ dans APE revient à greffer dans S les sous-arbres de la racine de T en tant que fils les plus à gauche de s.

Exemple



$\circ_2$



$=$

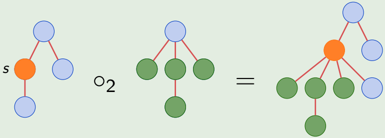
La greffe dans *APE*

On interprète la greffe dans *APE* via la bijection avec les arbres plans enracinés.

Proposition

Soient S et T deux arbres plans enracinés et s le i^e nœud visité de S selon son parcours en profondeur. La greffe $S \circ_i T$ dans APE revient à greffer dans S les sous-arbres de la racine de T en tant que fils les plus à gauche de s.

Exemple



Structure de *APE*

Proposition

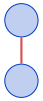
L'opérade APE est isomorphe à l'opérade libre sur un générateur d'arité 2*.*

Structure de *APE*

Proposition

L'opérade APE est isomorphe à l'opérade libre sur un générateur d'arité 2.

- Tout arbre plan enraciné peut être obtenu par l'intermédiaire de greffes du générateur

$$g_{APE} :=$$  $$\simeq \; 01.$$

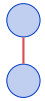
De plus, cette écriture est unique aux règles d'associativité des opérades près.

Structure de *APE*

Proposition

L'opérade APE est isomorphe à l'opérade libre sur un générateur d'arité 2*.*

- Tout arbre plan enraciné peut être obtenu par l'intermédiaire de greffes du générateur

$$g_{APE} :=$$  $$\simeq \ 01.$$

  De plus, cette écriture est unique aux règles d'associativité des opérades près.

- L'opérade *APE* est une version planaire de l'opérade non associative permutative *NAP* [**Livernet**, 2006].

Plan

Plan

L'algèbre de Hopf des forêts d'arbres plans enracinés

Définition et propriétés

Une réalisation polynomiale

Expérimentation avec Sage (1/2)

Soit **FAPE** $:= \mathsf{H}APE$.

Expérimentation avec Sage (1/2)

Soit **FAPE** $:= \mathsf{H}APE$.

```
sage: M = MonoideAdditif()
sage: G = [Mot(M, [0, 1])]
sage: APE = OperadeMonoide(M, False, G)
```

Expérimentation avec Sage (1/2)

Soit **FAPE** $:= \mathsf{H}APE$.

```
sage: M = MonoideAdditif()
sage: G = [Mot(M, [0, 1])]
sage: APE = OperadeMonoide(M, False, G)
sage: FAPE = AHCOperade(APE)
```

Expérimentation avec Sage (1/2)

Soit **FAPE** $:= \mathrm{H}APE$.

```
sage: M = MonoideAdditif()
sage: G = [Mot(M, [0, 1])]
sage: APE = OperadeMonoide(M, False, G)
sage: FAPE = AHCOperade(APE)
sage: [FAPE.dimension(n) for n in xrange(8)]
[1, 1, 3, 10, 35, 126, 462, 1716]
```

Expérimentation avec Sage (1/2)

Soit **FAPE** := H*APE*.

```
sage: M = MonoideAdditif()
sage: G = [Mot(M, [0, 1])]
sage: APE = OperadeMonoide(M, False, G)
sage: FAPE = AHCOperade(APE)
sage: [FAPE.dimension(n) for n in xrange(8)]
[1, 1, 3, 10, 35, 126, 462, 1716]

sage: sorted(FAPE.base_vectorielle(3))
[0111, 0112, 0121, 0122, 0123, 01|011, 01|012, 011|01,
012|01, 01|01|01]
```

Expérimentation avec Sage (2/2)

```
sage: x = sorted(FAPE.base_vectorielle(4))[26]; print x
0122|01
```

Expérimentation avec Sage (2/2)

```
sage: x = sorted(FAPE.base_vectorielle(4))[26]; print x
0122|01
sage: y = sorted(FAPE.base_vectorielle(3))[7]; print y
011|01
```

Expérimentation avec Sage (2/2)

```
sage: x = sorted(FAPE.base_vectorielle(4))[26]; print x
0122|01
sage: y = sorted(FAPE.base_vectorielle(3))[7]; print y
011|01
sage: x * y
0122|01|011|01
```

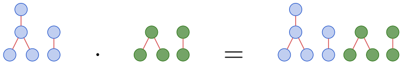
Expérimentation avec Sage (2/2)

```
sage: x = sorted(FAPE.base_vectorielle(4))[26]; print x
0122|01
sage: y = sorted(FAPE.base_vectorielle(3))[7]; print y
011|01
sage: x * y
0122|01|011|01

sage: x = sorted(FAPE.base_vectorielle(5))[17]; print x
012122
```

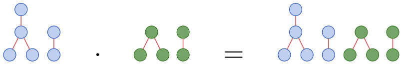
Expérimentation avec Sage (2/2)

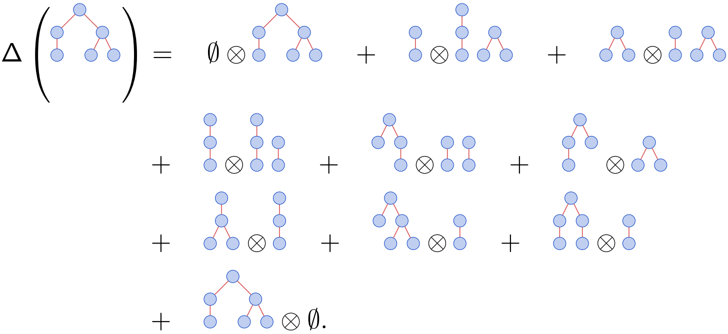
```
sage: x = sorted(FAPE.base_vectorielle(4))[26]; print x
0122|01
sage: y = sorted(FAPE.base_vectorielle(3))[7]; print y
011|01
sage: x * y
0122|01|011|01

sage: x = sorted(FAPE.base_vectorielle(5))[17]; print x
012122
sage: x.coproduct()
0 # 012122 + 01 # 012|011 + 011 # 01|011 + 012 # 012|01 +
0112 # 01|01 + 0121 # 011 + 0122 # 012 + 01122 # 01 +
01212 # 01 + 012122 # 0
```

Interprétation en termes de forêts d'arbres plans enracinés



Interprétation en termes de forêts d'arbres plans enracinés





Une expression du coproduit en termes de coloriages

Coloriage d'un arbre plan enraciné T : ensemble C d'arêtes de T tel que

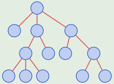
$$a \in C \text{ et } b \text{ est l'arête sœur droite ou la mère de } a \quad \Longrightarrow \quad b \in C.$$

Une expression du coproduit en termes de coloriages

Coloriage d'un arbre plan enraciné T : ensemble C d'arêtes de T tel que

$$a \in C \text{ et } b \text{ est l'arête sœur droite ou la mère de } a \quad \Longrightarrow \quad b \in C.$$

Exemple



$\|$

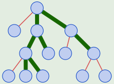
T

Une expression du coproduit en termes de coloriages

Coloriage d'un arbre plan enraciné T : ensemble C d'arêtes de T tel que

$$a \in C \text{ et } b \text{ est l'arête sœur droite ou la mère de } a \quad \Longrightarrow \quad b \in C.$$

Exemple



$\|$

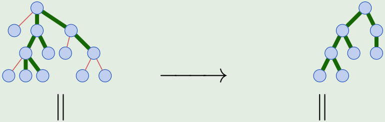
$C \in \mathrm{Col}(T)$

Une expression du coproduit en termes de coloriages

Coloriage d'un arbre plan enraciné T : ensemble C d'arêtes de T tel que

$$a \in C \text{ et } b \text{ est l'arête sœur droite ou la mère de } a \quad \Longrightarrow \quad b \in C.$$

Exemple



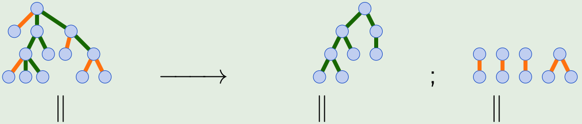
$C \in \mathrm{Col}(T)$ $\qquad$ $C(T)$

Une expression du coproduit en termes de coloriages

Coloriage d'un arbre plan enraciné T : ensemble C d'arêtes de T tel que

$$a \in C \text{ et } b \text{ est l'arête sœur droite ou la mère de } a \quad \Longrightarrow \quad b \in C.$$

Exemple



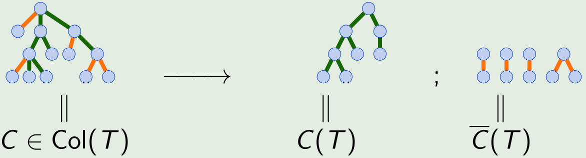
$C \in \mathrm{Col}(T)$ $\longrightarrow$ $C(T)$; $\overline{C}(T)$

Une expression du coproduit en termes de coloriages

Coloriage d'un arbre plan enraciné T : ensemble C d'arêtes de T tel que

$$a \in C \text{ et } b \text{ est l'arête sœur droite ou la mère de } a \quad \Longrightarrow \quad b \in C.$$

Exemple



Proposition

Le coproduit de **FAPE** *vérifie, pour tout arbre plan enraciné* T,

$$\Delta(T) = \sum_{C \in \mathrm{Col}(T)} C(T) \otimes \overline{C}(T).$$

Plan

Réalisations polynomiales (1/2)

Réalisation polynomiale d'une algèbre de Hopf $(\mathcal{H}, \cdot, \Delta)$ sur un alphabet A : morphisme injectif d'algèbre

$$r_A : \mathcal{H} \to \mathbb{Q}\langle A \rangle.$$

À chaque objet combinatoire de $\mathcal{H}$ est associé un polynôme.

Réalisations polynomiales (1/2)

Réalisation polynomiale d'une algèbre de Hopf $(\mathcal{H}, \cdot, \Delta)$ sur un alphabet A : morphisme injectif d'algèbre

$$r_A : \mathcal{H} \to \mathbb{Q}\langle A \rangle.$$

À chaque objet combinatoire de $\mathcal{H}$ est associé un polynôme.

Quelques exemples :

Algèbre de Hopf	Objets	Référence
FQSym	Permutations	[**Duchamp, Hivert, Thibon**, 2002]
PBT	Arbres binaires	[**Hivert, Novelli, Thibon**, 2005]
WQSym	Mots tassés	[**Novelli, Thibon**, 2006]
PQSym	Fct. parking	[**Novelli, Thibon**, 2007]
CK	Forêts d'arbres	[**Foissy, Novelli, Thibon**, 2010]

Réalisations polynomiales (2/2)

Le coproduit se calcule par doublement d'alphabet :

$$r_{A \oplus A}(x) = (r_A \otimes r_A) \circ \Delta(x),$$

où $x \in \mathcal{H}$ et

$$A \oplus B := A \uplus B,$$

et les lettres de A et de B commutent entre elles.

Réalisations polynomiales (2/2)

Le coproduit se calcule par doublement d'alphabet :

$$r_{A \oplus A}(x) = (r_A \otimes r_A) \circ \Delta(x),$$

où $x \in \mathcal{H}$ et

$$A \oplus B := A \uplus B,$$

et les lettres de A et de B commutent entre elles.

Dans certains cas, on a besoin d'une relation binaire $\prec$ sur les alphabets. On parle alors de $\prec$-alphabet et on a

$$A \oplus B := A \uplus B, \ \text{avec } \mathtt{a} \prec \mathtt{b} \text{ pour tous } \mathtt{a} \in A \text{ et } \mathtt{b} \in B$$

Réalisations polynomiales (2/2)

Le coproduit se calcule par doublement d'alphabet :

$$r_{A \oplus A}(x) = (r_A \otimes r_A) \circ \Delta(x),$$

où $x \in \mathcal{H}$ et

$$A \oplus B := A \uplus B,$$

et les lettres de A et de B commutent entre elles.

Dans certains cas, on a besoin d'une relation binaire $\prec$ sur les alphabets. On parle alors de $\prec$-alphabet et on a

$$A \oplus B := A \uplus B, \text{ avec } \mathtt{a} \prec \mathtt{b} \text{ pour tous } \mathtt{a} \in A \text{ et } \mathtt{b} \in B$$

Généralisation des fonctions symétriques.

La F-compatibilité

$A := \{\mathrm{a}_{ij} : 0 \leqslant i < j\}$: alphabet muni de la relation $\prec$ définie par

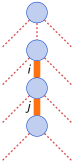
$$\mathrm{a}_{ij} \prec \mathrm{a}_{k\ell} \qquad \text{si} \qquad (j = k) \quad \text{ou} \quad (i = k \text{ et } \ell < j).$$

La F-compatibilité

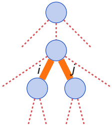
$A := \{\mathtt{a}_{ij} : 0 \leqslant i < j\}$: alphabet muni de la relation $\prec$ définie par

$$\mathtt{a}_{ij} \prec \mathtt{a}_{k\ell} \qquad \text{si} \qquad (j = k) \quad \text{ou} \quad (i = k \text{ et } \ell < j).$$

F forêt d'arb. plans enracinés à n arêtes. $u_1 \dots u_n \in A^*$ F-compatible si :



$\Longrightarrow \quad u_i \prec u_j \qquad$ et



$\Longrightarrow \quad u_j \prec u_i.$

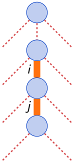
Étiquetage des arêtes selon le parcours en profondeur.

La F-compatibilité

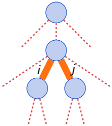
$A := \{\mathtt{a}_{ij} : 0 \leqslant i < j\}$: alphabet muni de la relation $\prec$ définie par

$$\mathtt{a}_{ij} \prec \mathtt{a}_{k\ell} \qquad \text{si} \qquad (j = k) \quad \text{ou} \quad (i = k \text{ et } \ell < j).$$

F forêt d'arb. plans enracinés à n arêtes. $u_1 \dots u_n \in A^*$ F-compatible si :



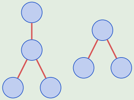
$\Longrightarrow \quad u_i \prec u_j$ et



$\Longrightarrow \quad u_j \prec u_i.$

Étiquetage des arêtes selon le parcours en profondeur.

Exemple

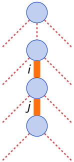
Soit $u_1 u_2 u_3 u_4 u_5$ F-compatible avec $F :=$ .

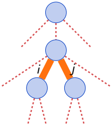
La F-compatibilité

$A := \{\mathtt{a}_{ij} : 0 \leqslant i < j\}$: alphabet muni de la relation $\prec$ définie par

$$\mathtt{a}_{ij} \prec \mathtt{a}_{k\ell} \qquad \text{si} \qquad (j = k) \quad \text{ou} \quad (i = k \text{ et } \ell < j).$$

F forêt d'arb. plans enracinés à n arêtes. $u_1 \dots u_n \in A^*$ F-compatible si :

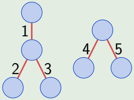


$\Longrightarrow \quad u_i \prec u_j$ et


$\Longrightarrow \quad u_j \prec u_i.$

Étiquetage des arêtes selon le parcours en profondeur.

Exemple

Soit $u_1 u_2 u_3 u_4 u_5$ F-compatible avec $F :=$


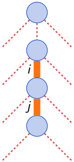
.

La F-compatibilité

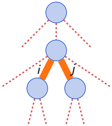
$A := \{\mathtt{a}_{ij} : 0 \leqslant i < j\}$: alphabet muni de la relation $\prec$ définie par

$$\mathtt{a}_{ij} \prec \mathtt{a}_{k\ell} \qquad \text{si} \qquad (j = k) \quad \text{ou} \quad (i = k \text{ et } \ell < j).$$

F forêt d'arb. plans enracinés à n arêtes. $u_1 \dots u_n \in A^*$ F-compatible si :



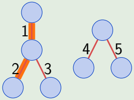
$\Longrightarrow \quad u_i \prec u_j \qquad$ et



$\Longrightarrow \quad u_j \prec u_i.$

Étiquetage des arêtes selon le parcours en profondeur.

Exemple

Soit $u_1 u_2 u_3 u_4 u_5$ F-compatible avec $F :=$ 

.

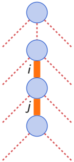
Alors, $u_1 \prec u_2$,

La F-compatibilité

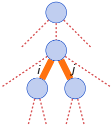
$A := \{a_{ij} : 0 \leqslant i < j\}$: alphabet muni de la relation $\prec$ définie par

$$a_{ij} \prec a_{k\ell} \qquad \text{si} \qquad (j = k) \quad \text{ou} \quad (i = k \text{ et } \ell < j).$$

F forêt d'arb. plans enracinés à n arêtes. $u_1 \dots u_n \in A^*$ F-compatible si :



$\Longrightarrow \quad u_i \prec u_j \qquad$ et

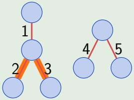


$\Longrightarrow \quad u_j \prec u_i.$

Étiquetage des arêtes selon le parcours en profondeur.

Exemple

Soit $u_1 u_2 u_3 u_4 u_5$ F-compatible avec $F :=$



.

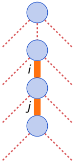
Alors, $u_1 \prec u_2$, $u_3 \prec u_2$,

La F-compatibilité

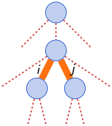
$A := \{\mathtt{a}_{ij} : 0 \leqslant i < j\}$: alphabet muni de la relation $\prec$ définie par

$$\mathtt{a}_{ij} \prec \mathtt{a}_{k\ell} \qquad \text{si} \qquad (j = k) \quad \text{ou} \quad (i = k \text{ et } \ell < j).$$

F forêt d'arb. plans enracinés à n arêtes. $u_1 \dots u_n \in A^*$ F-compatible si :



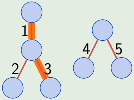
$\Longrightarrow \quad u_i \prec u_j \qquad$ et



$\Longrightarrow \quad u_j \prec u_i.$

Étiquetage des arêtes selon le parcours en profondeur.

Exemple

Soit $u_1 u_2 u_3 u_4 u_5$ F-compatible avec $F :=$ .

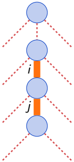
Alors, $u_1 \prec u_2$, $u_3 \prec u_2$, $u_1 \prec u_3$

La F-compatibilité

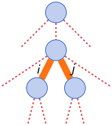
$A := \{\mathsf{a}_{ij} : 0 \leqslant i < j\}$: alphabet muni de la relation $\prec$ définie par

$$\mathsf{a}_{ij} \prec \mathsf{a}_{k\ell} \qquad \text{si} \qquad (j = k) \quad \text{ou} \quad (i = k \text{ et } \ell < j).$$

F forêt d'arb. plans enracinés à n arêtes. $u_1 \dots u_n \in A^*$ F-compatible si :



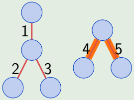
$\Longrightarrow \quad u_i \prec u_j \qquad$ et



$\Longrightarrow \quad u_j \prec u_i.$

Étiquetage des arêtes selon le parcours en profondeur.

Exemple

Soit $u_1 u_2 u_3 u_4 u_5$ F-compatible avec $F :=$ 

.

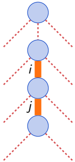
Alors, $u_1 \prec u_2$, $u_3 \prec u_2$, $u_1 \prec u_3$ et $u_5 \prec u_4$

La F-compatibilité

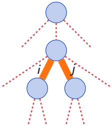
$A := \{\mathtt{a}_{ij} : 0 \leqslant i < j\}$: alphabet muni de la relation $\prec$ définie par

$$\mathtt{a}_{ij} \prec \mathtt{a}_{k\ell} \qquad \text{si} \qquad (j = k) \quad \text{ou} \quad (i = k \text{ et } \ell < j).$$

F forêt d'arb. plans enracinés à n arêtes. $u_1 \dots u_n \in A^*$ F-compatible si :



$\Longrightarrow \quad u_i \prec u_j \qquad$ et

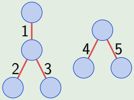


$\Longrightarrow \quad u_j \prec u_i.$

Étiquetage des arêtes selon le parcours en profondeur.

Exemple

Soit $u_1 u_2 u_3 u_4 u_5$ F-compatible avec $F :=$



.

Alors, $u_1 \prec u_2$, $u_3 \prec u_2$, $u_1 \prec u_3$ et $u_5 \prec u_4$ et *e.g.*, $\mathtt{a}_{01}\mathtt{a}_{12}\mathtt{a}_{13}\mathtt{a}_{45}\mathtt{a}_{46}$ est F-compatible.

Une réalisation polynomiale de **FAPE**

Théorème

L'application $r_A : \mathbf{FAPE} \to \mathbb{Q}\langle A \rangle$ *définie pour toute forêt* F *par*

$$r_A(F) := \sum_{\substack{u \in A^* \\ u \text{ est } F\text{-compatible}}} u,$$

est une réalisation polynomiale de **FAPE**.

Une réalisation polynomiale de **FAPE**

Théorème

L'application r_A : **FAPE** $\to \mathbb{Q}\langle A\rangle$ *définie pour toute forêt* F *par*

$$r_A(F) := \sum_{\substack{u \in A^* \\ u \text{ est } F\text{-compatible}}} u,$$

est une réalisation polynomiale de **FAPE**.

Exemple

r_A () $=$

Une réalisation polynomiale de **FAPE**

Théorème

L'application r_A : **FAPE** $\to \mathbb{Q}\langle A\rangle$ *définie pour toute forêt* F *par*

$$r_A(F) := \sum_{\substack{u \in A^* \\ u \text{ est } F\text{-compatible}}} u,$$

est une réalisation polynomiale de **FAPE**.

Exemple

$r_A\Big($  $\Big) = \sum_{u_2 \prec u_1} u_1 u_2 =$

Une réalisation polynomiale de **FAPE**

Théorème

L'application $r_A : \mathbf{FAPE} \to \mathbb{Q}\langle A\rangle$ *définie pour toute forêt* F *par*

$$r_A(F) := \sum_{\substack{u \in A^* \\ u \text{ est } F\text{-compatible}}} u,$$

est une réalisation polynomiale de **FAPE***.*

Exemple

r_A () $= \sum_{u_2 \prec u_1} u_1 u_2 = a_{01} a_{02} + a_{01} a_{03} + \dots$

Une réalisation polynomiale de **FAPE**

Théorème

L'application $r_A : \mathbf{FAPE} \to \mathbb{Q}\langle A\rangle$ *définie pour toute forêt* F *par*

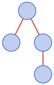
$$r_A(F) := \sum_{\substack{u \in A^* \\ u \text{ est } F\text{-compatible}}} u,$$

est une réalisation polynomiale de **FAPE**.

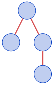
Exemple

$r_A\Big($  $\Big) = \displaystyle\sum_{u_2 \prec u_1} u_1 u_2 = \mathsf{a}_{01}\mathsf{a}_{02} + \mathsf{a}_{01}\mathsf{a}_{03} + \ldots + \mathsf{a}_{12}\mathsf{a}_{01} + \mathsf{a}_{13}\mathsf{a}_{01} + \cdots .$

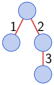
Calcul du coproduit dans **FAPE** par doublement d'alphabet

$r_{A\oplus B}\Bigg($  $\Bigg) =$

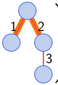
Calcul du coproduit dans **FAPE** par doublement d'alphabet

$r_{A\oplus B}\Big($  $\Big) = \displaystyle\sum_{u_1,u_2,u_3\,\in\, A\oplus B} u_1 u_2 u_3$

Calcul du coproduit dans **FAPE** par doublement d'alphabet

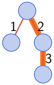
$r_{A\oplus B}$ () $= \displaystyle\sum_{u_1,u_2,u_3 \in A\oplus B} u_1 u_2 u_3$

Calcul du coproduit dans **FAPE** par doublement d'alphabet

$r_{A\oplus B}\left(\right.$ 

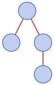
$\left.\right) = \sum_{\substack{u_1, u_2, u_3 \in A\oplus B \\ u_2 \prec u_1}} u_1 u_2 u_3$

Calcul du coproduit dans **FAPE** par doublement d'alphabet

$$r_{A\oplus B}\left(\vphantom{\sum} \right.$$


$$\left. \vphantom{\sum} \right) = \sum_{\substack{u_1, u_2, u_3 \in A\oplus B \\ u_2 \prec u_1 \\ u_2 \prec u_3}} u_1 u_2 u_3$$

Calcul du coproduit dans **FAPE** par doublement d'alphabet

$r_{A\oplus B}$ ()

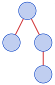
$$= \sum_{\substack{u_1,u_2,u_3 \in A\oplus B \\ u_2 \prec u_1 \\ u_2 \prec u_3}} u_1 u_2 u_3$$

$$= \sum_{u_1,u_2,u_3 \in A} u_1 u_2 u_3 + \sum_{\substack{u_1,u_2 \in A \\ u_3 \in B}} u_1 u_2 u_3 + \sum_{\substack{u_1,u_3 \in A \\ u_2 \in B}} u_1 u_2 u_3$$

$$+ \sum_{\substack{u_2,u_3 \in A \\ u_1 \in B}} u_1 u_2 u_3 + \sum_{\substack{u_1 \in A \\ u_2,u_3 \in B}} u_1 u_2 u_3 + \sum_{\substack{u_2 \in A \\ u_1,u_3 \in B}} u_1 u_2 u_3$$

$$+ \sum_{\substack{u_3 \in A \\ u_1,u_2 \in B}} u_1 u_2 u_3 + \sum_{u_1,u_2,u_3 \in A} u_1 u_2 u_3$$

Calcul du coproduit dans **FAPE** par doublement d'alphabet



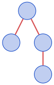
$$r_{A\oplus B}\left(\;\cdot\;\right) = \sum_{\substack{u_1,u_2,u_3 \in A\oplus B\\ u_2 \prec u_1\\ u_2\prec u_3}} u_1 u_2 u_3$$

$$= \sum_{u_1,u_2,u_3 \in A} u_1 u_2 u_3 + \sum_{\substack{u_1,u_2 \in A\\ u_3 \in B}} u_1 u_2 u_3 + \cancel{\sum_{\substack{u_1,u_3 \in A\\ u_2 \in B}} u_1 u_2 u_3}$$

$$+ \sum_{\substack{u_2,u_3 \in A\\ u_1 \in B}} u_1 u_2 u_3 + \cancel{\sum_{\substack{u_1 \in A\\ u_2,u_3 \in B}} u_1 u_2 u_3} + \sum_{\substack{u_2 \in A\\ u_1,u_3 \in B}} u_1 u_2 u_3$$

$$+ \cancel{\sum_{\substack{u_3 \in A\\ u_1,u_2 \in B}} u_1 u_2 u_3} + \sum_{u_1,u_2,u_3 \in A} u_1 u_2 u_3$$

Calcul du coproduit dans **FAPE** par doublement d'alphabet

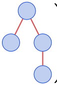
$r_{A\oplus B}\Bigg($  $\Bigg) = \displaystyle\sum_{\substack{u_1,u_2,u_3\,\in\,A\oplus B\\ u_2\prec u_1\\ u_2\prec u_3}} u_1u_2u_3$

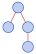
$$= \sum_{u_1,u_2,u_3\,\in\,A} u_1u_2u_3\otimes 1 + \sum_{\substack{u_1,u_2\,\in\,A\\ u_3\in B}} u_1u_2\otimes u_3 + \cancel{\sum_{\substack{u_1,u_3\,\in\,A\\ u_2\in B}} u_1u_2u_3}$$

$$+ \sum_{\substack{u_2,u_3\,\in\,A\\ u_1\in B}} u_2u_3\otimes u_1 + \cancel{\sum_{\substack{u_1\,\in\,A\\ u_2,u_3\in B}} u_1u_2u_3} + \sum_{\substack{u_2\,\in\,A\\ u_1,u_3\in B}} u_2\otimes u_1u_3$$

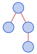
$$+ \cancel{\sum_{\substack{u_3\,\in\,A\\ u_1,u_2\in B}} u_1u_2u_3} + \sum_{u_1,u_2,u_3\,\in\,A} 1\otimes u_1u_2u_3$$

Calcul du coproduit dans **FAPE** par doublement d'alphabet

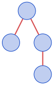
$r_{A\oplus B}$ () $= \displaystyle\sum_{\substack{u_1,u_2,u_3 \in A\oplus B \\ u_2 \prec u_1 \\ u_2 \prec u_3}} u_1 u_2 u_3$

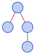
$= r_A$ () $\otimes r_B(\emptyset) + r_A$ () $\otimes r_B$ () $+ \cancel{\displaystyle\sum_{\substack{u_1,u_3 \in A \\ u_2 \in B}} u_1 u_2 u_3}$

$+ r_A$ () $\otimes r_B$ () $+ \cancel{\displaystyle\sum_{\substack{u_1 \in A \\ u_2,u_3 \in B}} u_1 u_2 u_3} + r_A$ () $\otimes r_B$ ()

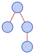
$+ \cancel{\displaystyle\sum_{\substack{u_3 \in A \\ u_1,u_2 \in B}} u_1 u_2 u_3} + r_A(\emptyset) \otimes r_B$ ()

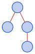
Calcul du coproduit dans **FAPE** par doublement d'alphabet

$r_{A\oplus B}\Big($  $\Big) = \displaystyle\sum_{\substack{u_1,u_2,u_3 \in A\oplus B\\ u_2 \prec u_1\\ u_2 \prec u_3}} u_1 u_2 u_3$

$= r_A\Big($  $\Big) \otimes r_B(\emptyset) + r_A\big($  $\big) \otimes r_B\big($  $\big) + \cancel{\displaystyle\sum_{\substack{u_1,u_3 \in A\\ u_2 \in B}} u_1 u_2 u_3}$

$+ r_A\Big($  $\Big) \otimes r_B\big($  $\big) + \cancel{\displaystyle\sum_{\substack{u_1 \in A\\ u_2,u_3 \in B}} u_1 u_2 u_3} + r_A\big($  $\big) \otimes r_B\big($  $\big)$

$+ \cancel{\displaystyle\sum_{\substack{u_3 \in A\\ u_1,u_2 \in B}} u_1 u_2 u_3} + r_A(\emptyset) \otimes r_B\Big($  $\Big)$

$= (r_A \otimes r_B) \circ \Delta\Big($  $\Big)$