Bigèbres de Hopf combinatoires des pros

Samuele Giraudo
LIGM, Université Paris-Est Marne-la-Vallée

—

Travail en commun avec Jean-Paul Bultel

Séminaire du LIX/LRI

5 juillet 2017

Plan

Bigèbres de Hopf d'opérades

Bigèbres de Hopf de pros

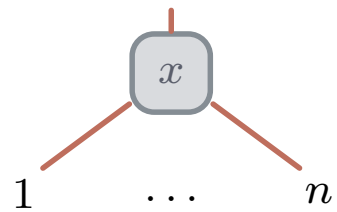
Exemples de constructions

Plan

Bigèbres de Hopf d'opérades

Opérateurs

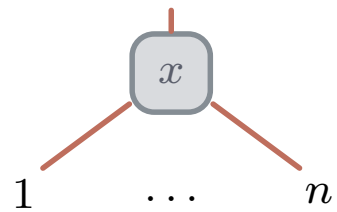
Un opérateur est une entité ayant $n \geqslant 1$ entrées et une sortie.



Son arité est son nombre n d'entrées.

Opérateurs

Un opérateur est une entité ayant $n \geqslant 1$ entrées et une sortie.



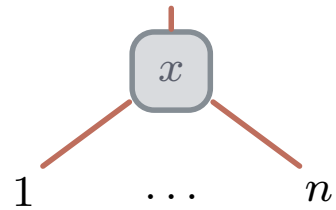
Son arité est son nombre n d'entrées.

Composer deux opérateurs x et y consiste à

1. choisir une entrée de x, identifiée par sa position i ;
2. greffer la sortie de y sur cette entrée.

Opérateurs

Un opérateur est une entité ayant $n \geqslant 1$ entrées et une sortie.

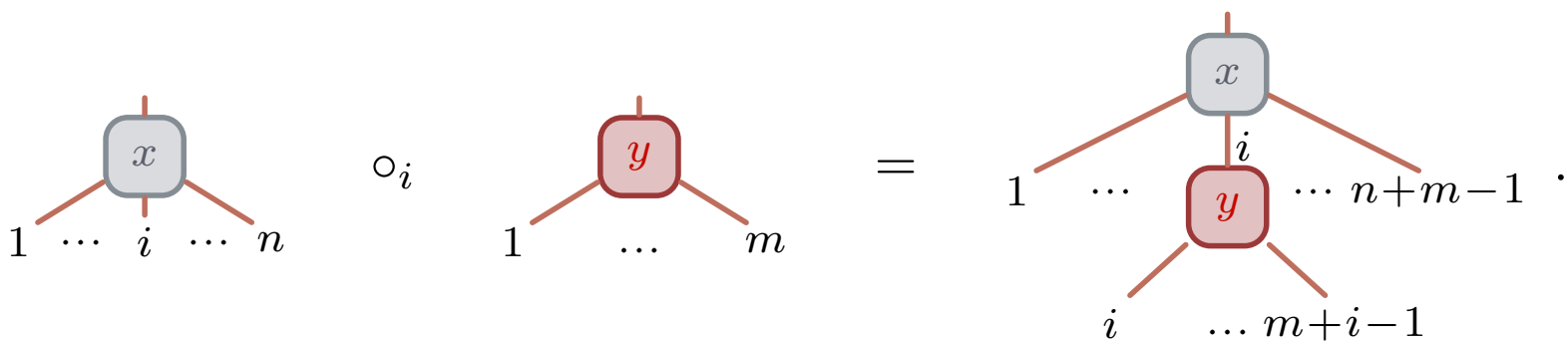


Son arité est son nombre n d'entrées.

Composer deux opérateurs x et y consiste à

1. choisir une entrée de x, identifiée par sa position i ;
2. greffer la sortie de y sur cette entrée.

Ceci produit un nouvel opérateur $x \circ_i y$ d'arité $n + m - 1$:



Opérades

Les opérades sont des structures algébriques formalisant la notion d'opérateur de leur composition.

Opérades

Les opérades sont des structures algébriques formalisant la notion d'opérateur de leur composition.

Une opérade (ensembliste et non symétrique) est un triplet $(\mathcal{O}, \circ_i, \mathbb{1})$ tel que

1. $\mathcal{O}$ est un ensemble gradué

$$\mathcal{O} := \bigsqcup_{n \geqslant 1} \mathcal{O}(n) \; ;$$

Opérades

Les opérades sont des structures algébriques formalisant la notion d'opérateur de leur composition.

Une opérade (ensembliste et non symétrique) est un triplet $(\mathcal{O}, \circ_i, \mathbb{1})$ tel que

1. $\mathcal{O}$ est un ensemble gradué

$$\mathcal{O} := \bigsqcup_{n \geqslant 1} \mathcal{O}(n) \; ;$$

2. $\circ_i$ est une application de composition partielle,

$$\circ_i : \mathcal{O}(n) \times \mathcal{O}(m) \to \mathcal{O}(n+m-1), \qquad n, m \geqslant 1, i \in [n] \; ;$$

Opérades

Les opérades sont des structures algébriques formalisant la notion d'opérateur de leur composition.

Une opérade (ensembliste et non symétrique) est un triplet $(\mathcal{O}, \circ_i, \mathbb{1})$ tel que

1. $\mathcal{O}$ est un ensemble gradué

$$\mathcal{O} := \bigsqcup_{n \geqslant 1} \mathcal{O}(n) \; ;$$

2. $\circ_i$ est une application de composition partielle,

$$\circ_i : \mathcal{O}(n) \times \mathcal{O}(m) \to \mathcal{O}(n+m-1), \qquad n, m \geqslant 1, i \in [n] \; ;$$

3. $\mathbb{1}$ est un élément de $\mathcal{O}(1)$, appelé unité.

Opérades

Les opérades sont des structures algébriques formalisant la notion d'opérateur de leur composition.

Une opérade (ensembliste et non symétrique) est un triplet $(\mathcal{O}, \circ_i, \mathbb{1})$ tel que

1. $\mathcal{O}$ est un ensemble gradué

$$\mathcal{O} := \bigsqcup_{n \geqslant 1} \mathcal{O}(n) \; ;$$

2. $\circ_i$ est une application de composition partielle,

$$\circ_i : \mathcal{O}(n) \times \mathcal{O}(m) \to \mathcal{O}(n+m-1), \qquad n, m \geqslant 1, i \in [n] \; ;$$

3. $\mathbb{1}$ est un élément de $\mathcal{O}(1)$, appelé unité.

Ces objets doivent vérifier des axiomes.

Axiomes des opérades

Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$

$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$

$$i \in [n], j \in [m]$$

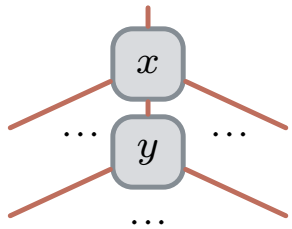
Axiomes des opérades

Associativité :

$(x \circ_i y)$

$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$

$i \in [n], j \in [m]$



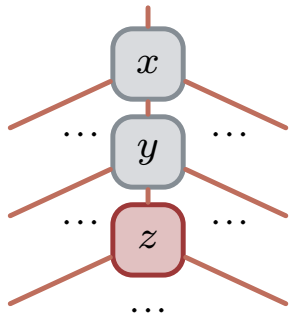
Axiomes des opérades

Associativité :

$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z$

$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$

$i \in [n], j \in [m]$



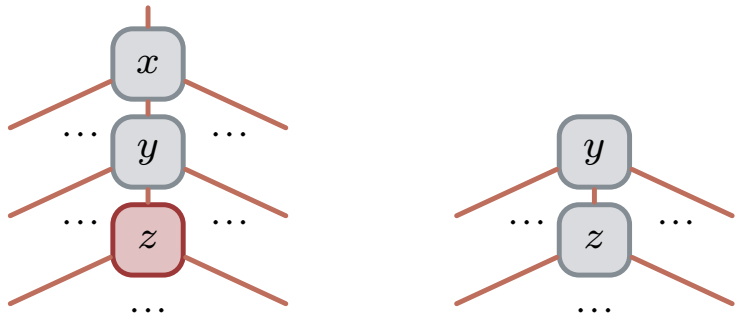
Axiomes des opérades

Associativité :

$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z \qquad (y \circ_j z)$

$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$

$i \in [n], j \in [m]$



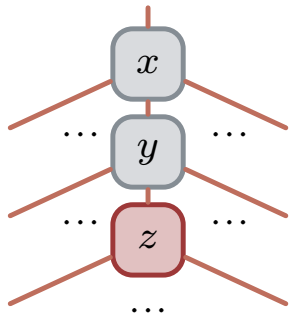
Axiomes des opérades

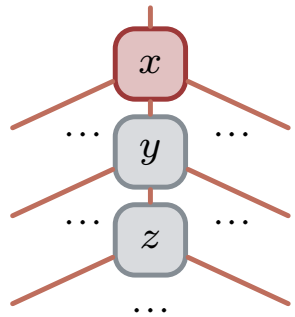
Associativité :

$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z \qquad x \circ_i (y \circ_j z)$

$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$

$i \in [n], j \in [m]$





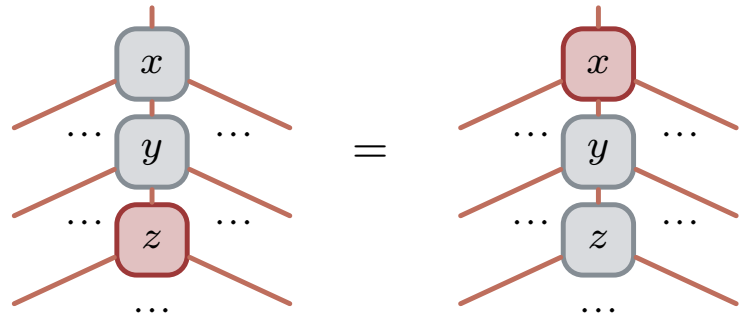
Axiomes des opérades

Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$

$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$

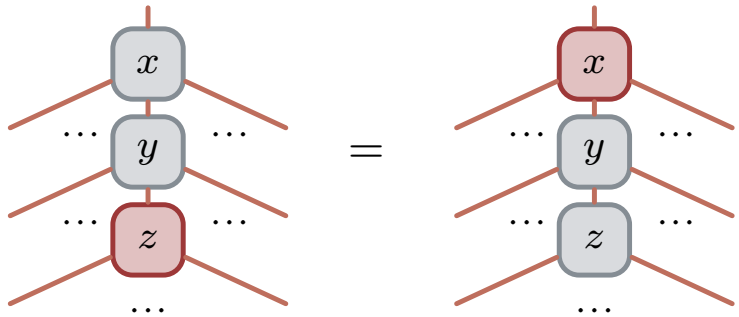
$i \in [n], j \in [m]$



Axiomes des opérades

Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$
$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$
$$i \in [n], j \in [m]$$



Commutativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{j+m-1} z = (x \circ_j z) \circ_i y$$
$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$
$$1 \leqslant i < j \leqslant n$$

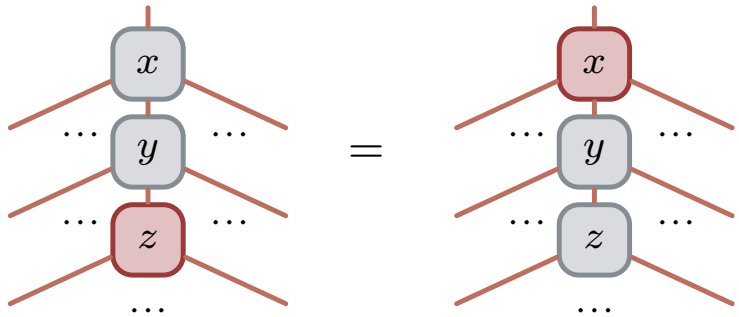
Axiomes des opérades

Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$

$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$

$i \in [n], j \in [m]$

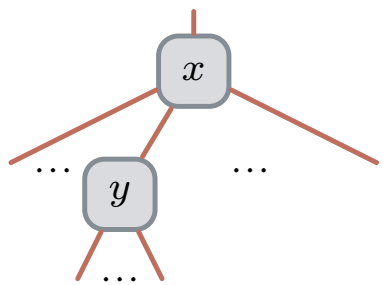


Commutativité :

$(x \circ_i y)$

$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$

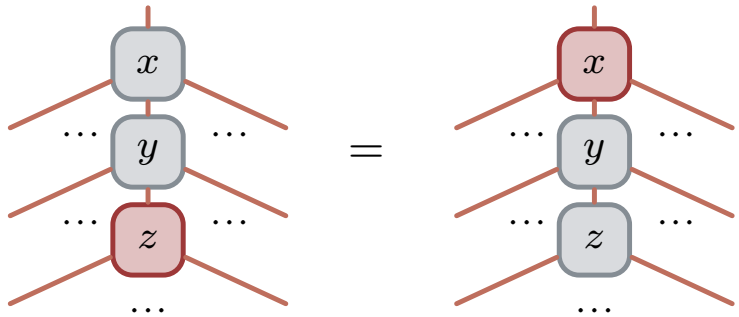
$1 \leqslant i < j \leqslant n$



Axiomes des opérades

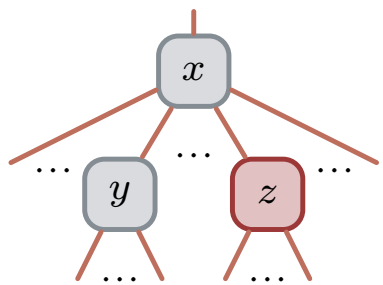
Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$
$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$
$$i \in [n], j \in [m]$$



Commutativité :

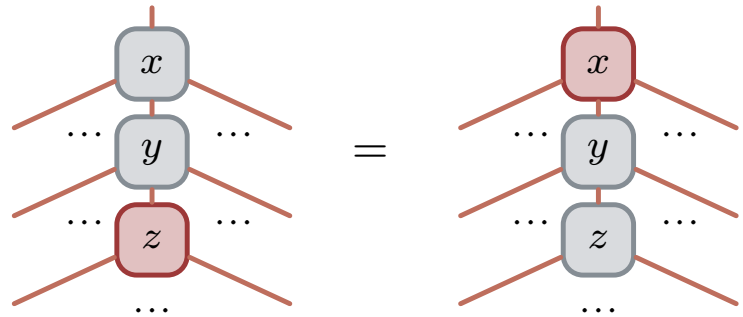
$$(x \circ_i y) \circ_{j+m-1} z$$
$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$
$$1 \leqslant i < j \leqslant n$$



Axiomes des opérades

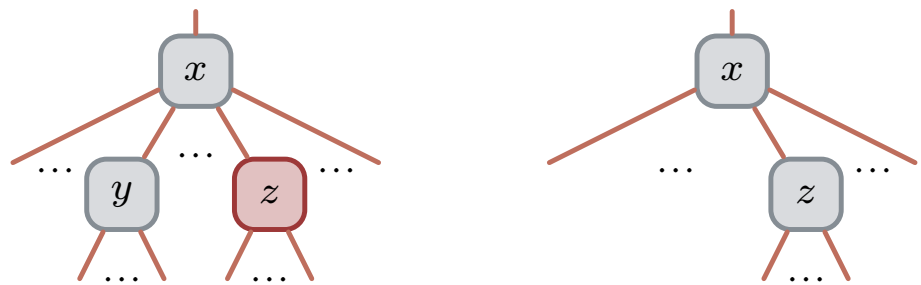
Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$
$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$
$$i \in [n], j \in [m]$$



Commutativité :

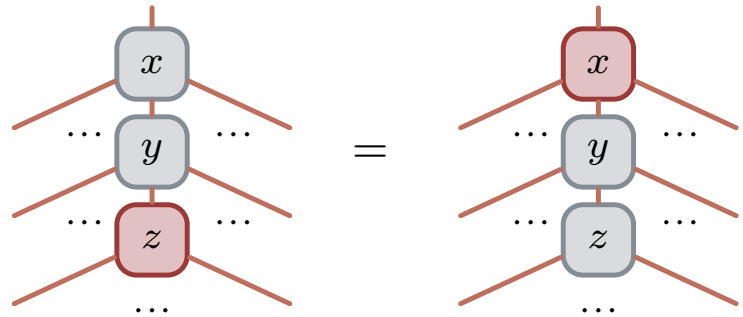
$$(x \circ_i y) \circ_{j+m-1} z \qquad (x \circ_j z)$$
$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$
$$1 \leqslant i < j \leqslant n$$



Axiomes des opérades

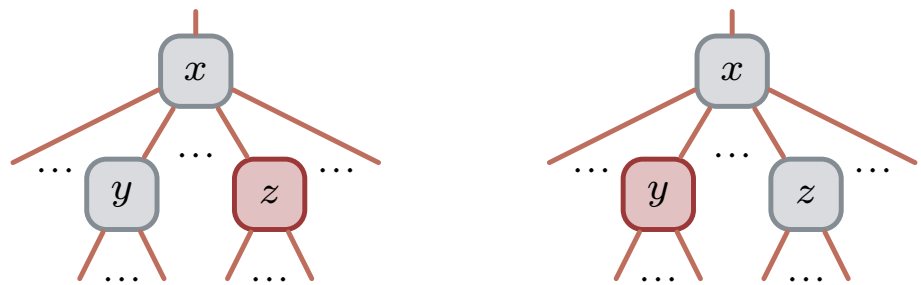
Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$
$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$
$$i \in [n], j \in [m]$$



Commutativité :

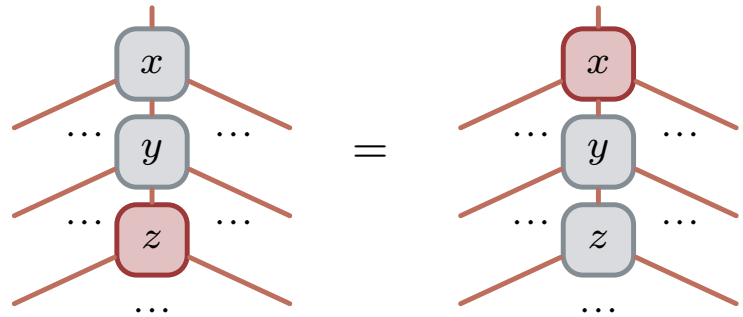
$$(x \circ_i y) \circ_{j+m-1} z \qquad (x \circ_j z) \circ_i y$$
$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$
$$1 \leqslant i < j \leqslant n$$



Axiomes des opérades

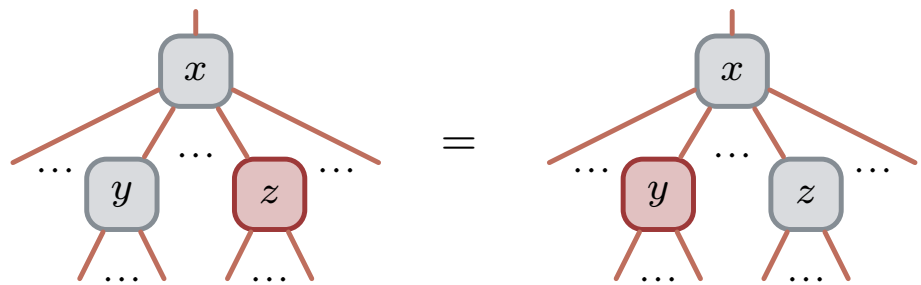
Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$
$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$
$$i \in [n], j \in [m]$$



Commutativité :

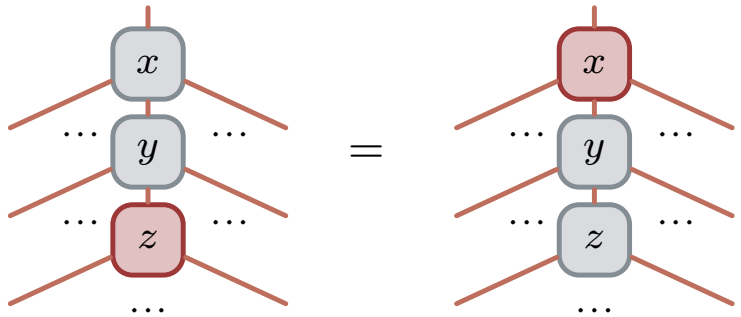
$$(x \circ_i y) \circ_{j+m-1} z = (x \circ_j z) \circ_i y$$
$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$
$$1 \leqslant i < j \leqslant n$$



Axiomes des opérades

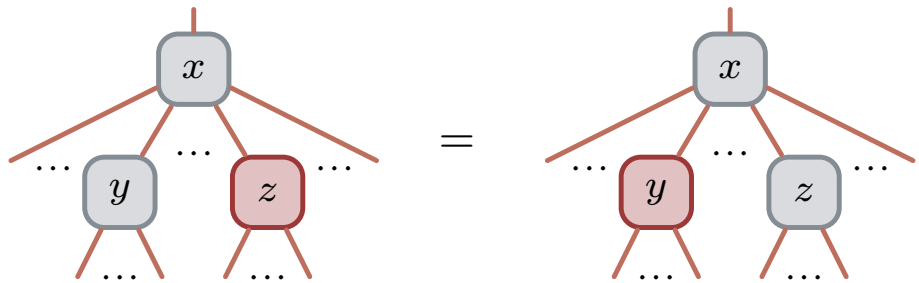
Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$
$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$
$$i \in [n], j \in [m]$$



Commutativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{j+m-1} z = (x \circ_j z) \circ_i y$$
$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$
$$1 \leqslant i < j \leqslant n$$



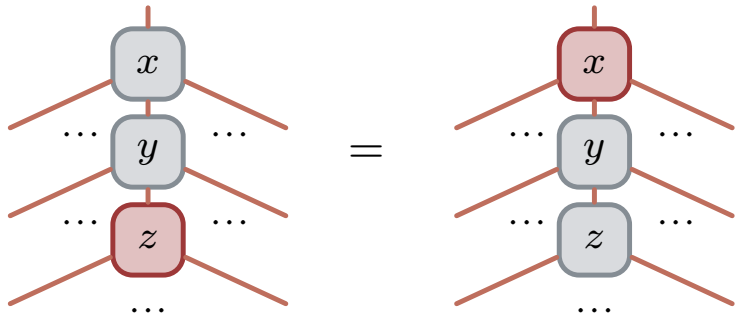
Unitalité :

$$\mathbb{1} \circ_1 x = x = x \circ_i \mathbb{1}$$
$$x \in \mathcal{O}(n)$$
$$i \in [n]$$

Axiomes des opérades

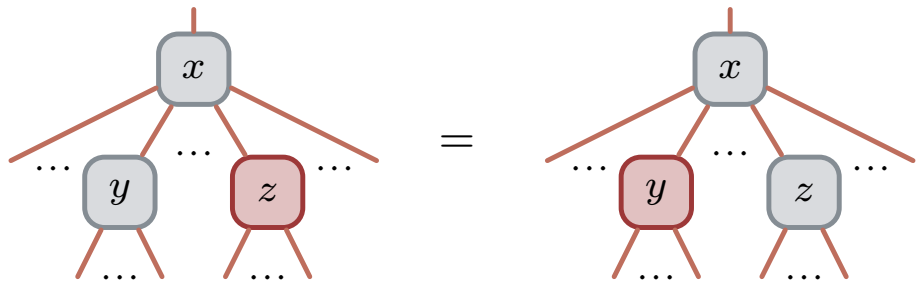
Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$
$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$
$$i \in [n], j \in [m]$$



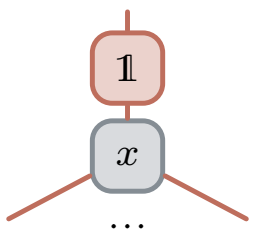
Commutativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{j+m-1} z = (x \circ_j z) \circ_i y$$
$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$
$$1 \leqslant i < j \leqslant n$$



Unitalité :

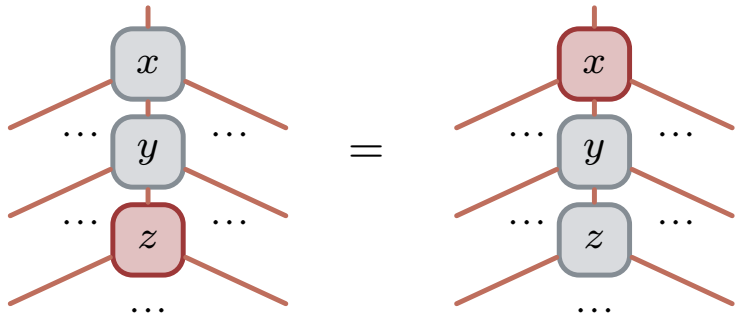
$$\mathbb{1} \circ_1 x$$
$$x \in \mathcal{O}(n)$$
$$i \in [n]$$



Axiomes des opérades

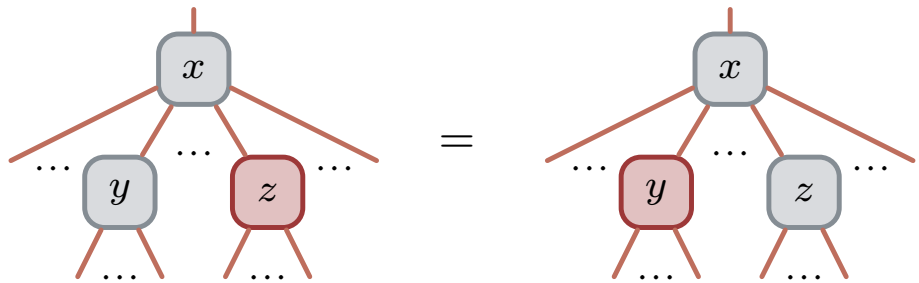
Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$
$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$
$$i \in [n], j \in [m]$$



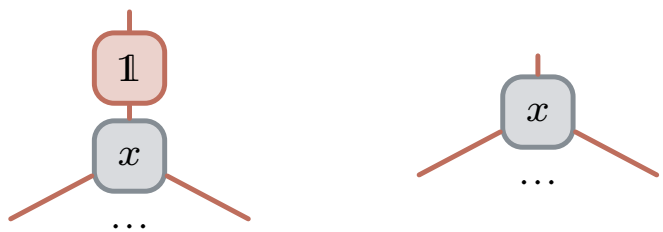
Commutativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{j+m-1} z = (x \circ_j z) \circ_i y$$
$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$
$$1 \leqslant i < j \leqslant n$$



Unitalité :

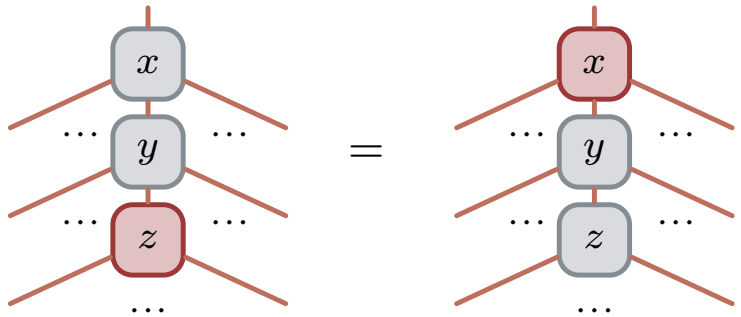
$$\mathbb{1} \circ_1 x \quad x$$
$$x \in \mathcal{O}(n)$$
$$i \in [n]$$



Axiomes des opérades

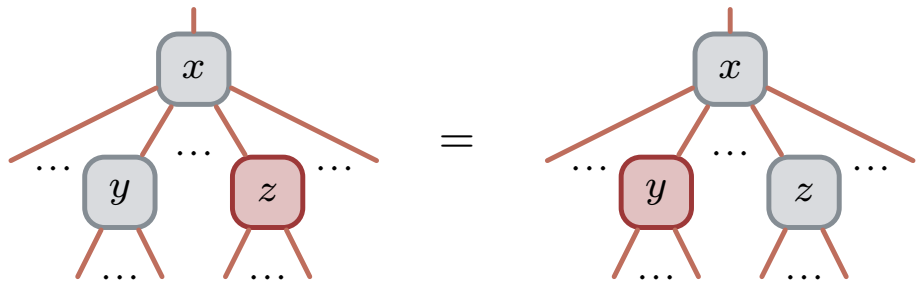
Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$
$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$
$$i \in [n], j \in [m]$$



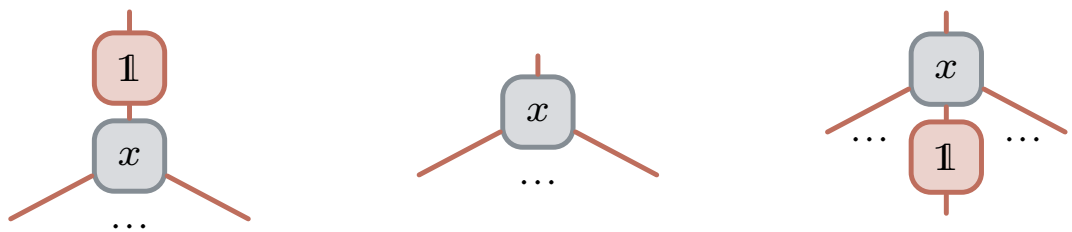
Commutativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{j+m-1} z = (x \circ_j z) \circ_i y$$
$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$
$$1 \leqslant i < j \leqslant n$$



Unitalité :

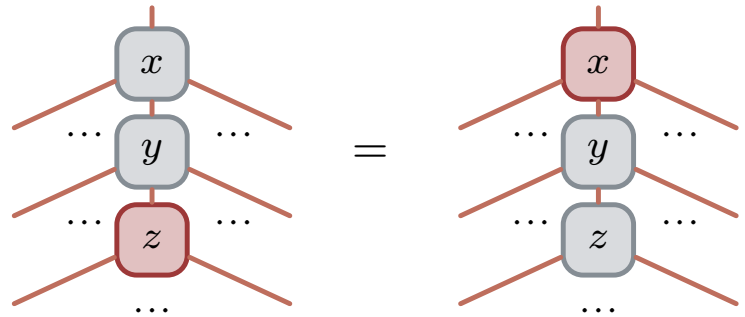
$$\mathbb{1} \circ_1 x \qquad x \qquad x \circ_i \mathbb{1}$$
$$x \in \mathcal{O}(n)$$
$$i \in [n]$$



Axiomes des opérades

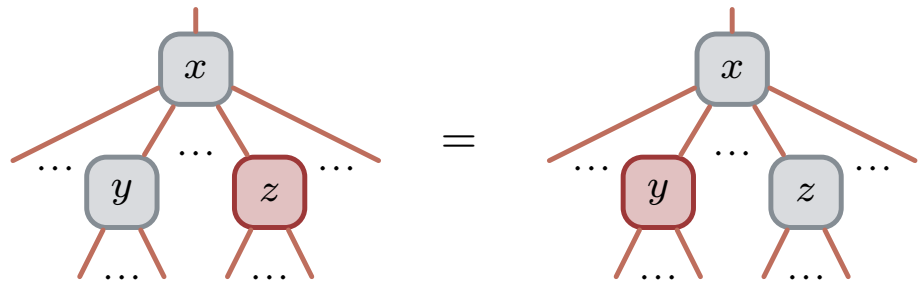
Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$
$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$
$$i \in [n], j \in [m]$$



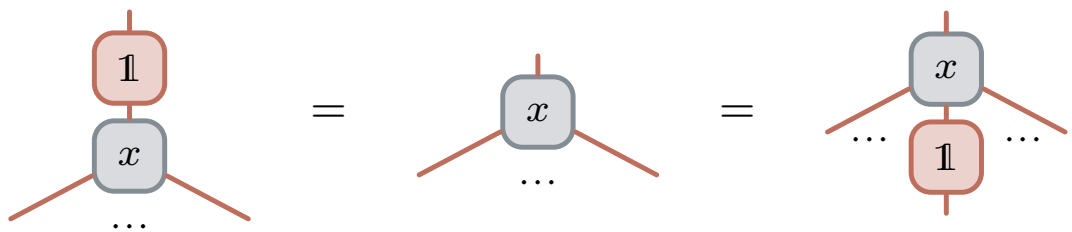
Commutativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{j+m-1} z = (x \circ_j z) \circ_i y$$
$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$
$$1 \leqslant i < j \leqslant n$$



Unitalité :

$$\mathbb{1} \circ_1 x = x = x \circ_i \mathbb{1}$$
$$x \in \mathcal{O}(n)$$
$$i \in [n]$$



Exemple : l'opérade associative

L'opérade associative As est définie par :

- $\mathsf{As}(n)$ est le singleton contenant $\mathfrak{a}_n$ pour tout $n \geqslant 1$;

Exemple : l'opérade associative

L'opérade associative As est définie par :

- $\mathsf{As}(n)$ est le singleton contenant $\mathfrak{a}_n$ pour tout $n \geqslant 1$;
- la composition partielle est définie par $\mathfrak{a}_n \circ_i \mathfrak{a}_m := \mathfrak{a}_{n+m-1}$;

Exemple

$$\mathfrak{a}_4 \circ_2 \mathfrak{a}_3 = \mathfrak{a}_6$$

Exemple : l'opérade associative

L'opérade associative As est définie par :

- $\mathsf{As}(n)$ est le singleton contenant $\mathfrak{a}_n$ pour tout $n \geqslant 1$;
- la composition partielle est définie par $\mathfrak{a}_n \circ_i \mathfrak{a}_m := \mathfrak{a}_{n+m-1}$;
- l'unité est $\mathfrak{a}_1$.

Exemple

$$\mathfrak{a}_4 \circ_2 \mathfrak{a}_3 = \mathfrak{a}_6$$

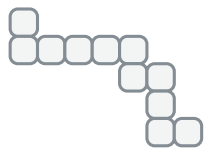
$$\mathfrak{a}_1 \circ_1 \mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_1$$

$$\mathfrak{a}_4 \circ_4 \mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_4$$

Exemple : l'opérade des rubans

L'opérade des rubans Comp est définie par :

- Comp(n) est l'ensemble des diagrammes rubans des compositions de n pour tout $n \geqslant 1$. P.ex.,



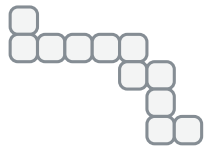
est un ruban d'arité 11 ;

Exemple : l'opérade des rubans

L'opérade des rubans Comp est définie par :

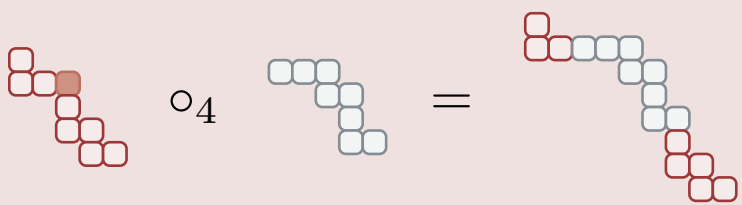
- $\mathrm{Comp}(n)$ est l'ensemble des diagrammes rubans des compositions de n pour tout $n \geqslant 1$. P.ex.,

  est un ruban d'arité 11 ;



- la composition partielle $\mathfrak{r} \circ_i \mathfrak{s}$ de deux rubans $\mathfrak{r}$ et $\mathfrak{s}$ s'obtient en insérant $\mathfrak{s}$ dans la i^{e} boite de $\mathfrak{s}$ lorsque celle-ci est la 1^{re} de sa colonne ;

Exemple

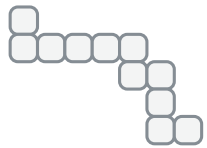


Exemple : l'opérade des rubans

L'opérade des rubans Comp est définie par :

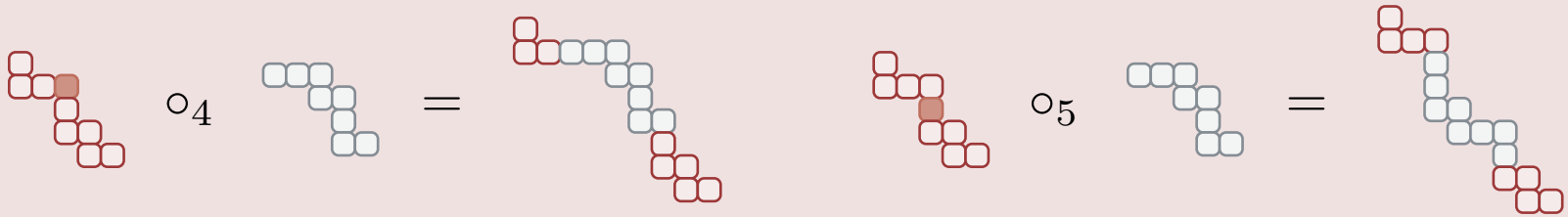
- $\mathrm{Comp}(n)$ est l'ensemble des diagrammes rubans des compositions de n pour tout $n \geqslant 1$. P.ex.,

  est un ruban d'arité 11 ;



- la composition partielle $\mathfrak{r} \circ_i \mathfrak{s}$ de deux rubans $\mathfrak{r}$ et $\mathfrak{s}$ s'obtient en insérant $\mathfrak{s}$ (resp. le transposé de $\mathfrak{s}$) dans la i^{e} boite de $\mathfrak{s}$ lorsque celle-ci est (resp. n'est pas) la 1^{re} de sa colonne ;

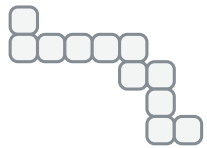
Exemple



Exemple : l'opérade des rubans

L'opérade des rubans Comp est définie par :

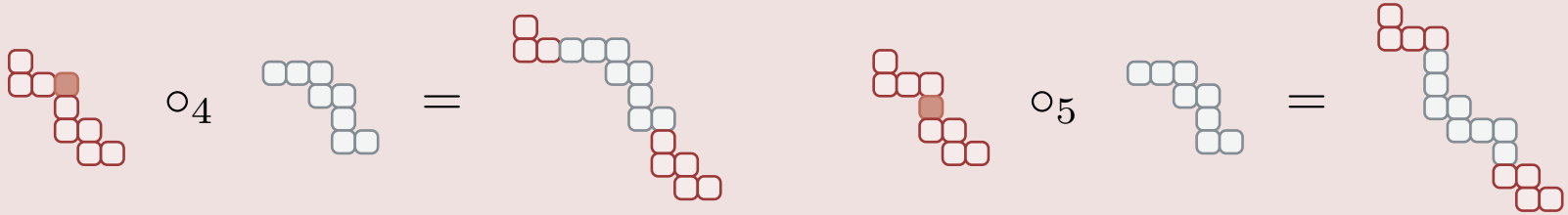
- $\mathrm{Comp}(n)$ est l'ensemble des diagrammes rubans des compositions de n pour tout $n \geqslant 1$. P.ex.,



est un ruban d'arité 11 ;

- la composition partielle $\mathfrak{r} \circ_i \mathfrak{s}$ de deux rubans $\mathfrak{r}$ et $\mathfrak{s}$ s'obtient en insérant $\mathfrak{s}$ (resp. le transposé de $\mathfrak{s}$) dans la i^{e} boite de $\mathfrak{s}$ lorsque celle-ci est (resp. n'est pas) la 1^{re} de sa colonne ;
- l'unité est le ruban .

Exemple



Opérades libres

Soit $\mathfrak{G} := \sqcup_{n \geqslant 1} \mathfrak{G}(n)$ un ensemble gradué.

Opérades libres

Soit $\mathfrak{G} := \sqcup_{n \geqslant 1} \mathfrak{G}(n)$ un ensemble gradué.

L'opérade libre sur $\mathfrak{G}$ est l'opérade $\mathrm{FO}(\mathfrak{G})$ telle que :

- $\mathrm{FO}(\mathfrak{G})(n)$ est l'espace des arbres syntaxiques sur $\mathfrak{G}$ avec n feuilles ;
- la composition partielle est une greffe d'arbres ;
- l'unité est l'arbre fait d'une feuille.

Opérades libres

Soit $\mathfrak{G} := \sqcup_{n \geqslant 1} \mathfrak{G}(n)$ un ensemble gradué.

L'opérade libre sur $\mathfrak{G}$ est l'opérade $\mathrm{FO}(\mathfrak{G})$ telle que :

- $\mathrm{FO}(\mathfrak{G})(n)$ est l'espace des arbres syntaxiques sur $\mathfrak{G}$ avec n feuilles ;
- la composition partielle est une greffe d'arbres ;
- l'unité est l'arbre fait d'une feuille.

Exemple

Soit $\mathfrak{G} := \mathfrak{G}(2) \sqcup \mathfrak{G}(3)$ avec $\mathfrak{G}(2) := \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ et $\mathfrak{G}(3) := \{\mathtt{c}\}$.

Opérades libres

Soit $\mathfrak{G} := \sqcup_{n \geqslant 1} \mathfrak{G}(n)$ un ensemble gradué.

L'opérade libre sur $\mathfrak{G}$ est l'opérade $\mathrm{FO}(\mathfrak{G})$ telle que :

- $\mathrm{FO}(\mathfrak{G})(n)$ est l'espace des arbres syntaxiques sur $\mathfrak{G}$ avec n feuilles ;
- la composition partielle est une greffe d'arbres ;
- l'unité est l'arbre fait d'une feuille.

Exemple

Soit $\mathfrak{G} := \mathfrak{G}(2) \sqcup \mathfrak{G}(3)$ avec $\mathfrak{G}(2) := \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ et $\mathfrak{G}(3) := \{\mathtt{c}\}$.

Les arbres syntaxiques de $\mathrm{FO}(\mathfrak{G})(3)$ sont

Opérades libres

Soit $\mathfrak{G} := \sqcup_{n \geqslant 1} \mathfrak{G}(n)$ un ensemble gradué.

L'opérade libre sur $\mathfrak{G}$ est l'opérade $\mathrm{FO}(\mathfrak{G})$ telle que :

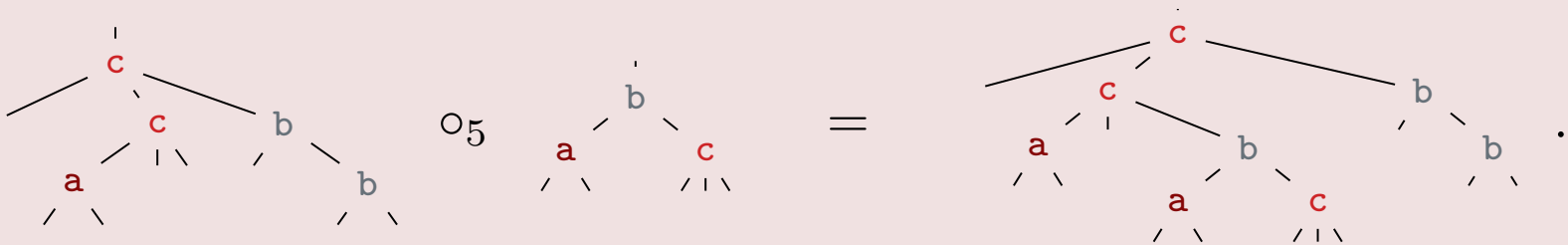
- $\mathrm{FO}(\mathfrak{G})(n)$ est l'espace des arbres syntaxiques sur $\mathfrak{G}$ avec n feuilles ;
- la composition partielle est une greffe d'arbres ;
- l'unité est l'arbre fait d'une feuille.

Exemple

Soit $\mathfrak{G} := \mathfrak{G}(2) \sqcup \mathfrak{G}(3)$ avec $\mathfrak{G}(2) := \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ et $\mathfrak{G}(3) := \{\mathtt{c}\}$.

Les arbres syntaxiques de $\mathrm{FO}(\mathfrak{G})(3)$ sont

Voici une composition partielle dans $\mathrm{FO}(\mathfrak{G})$:



Bigèbres de Hopf combinatoires

Une bigèbre de Hopf combinatoire est un triplet $(\mathcal{H}, \cdot, \Delta)$ tel que

1. $\mathcal{H}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel gradué

$$\mathcal{H} := \bigoplus_{n \geqslant 0} \mathcal{H}_n$$

vérifiant $\dim \mathcal{H}_0 = 1$ et $\dim \mathcal{H}_n < \infty$;

Bigèbres de Hopf combinatoires

Une bigèbre de Hopf combinatoire est un triplet $(\mathcal{H}, \cdot, \Delta)$ tel que

1. $\mathcal{H}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel gradué

$$\mathcal{H} := \bigoplus_{n \geqslant 0} \mathcal{H}_n$$

   vérifiant $\dim \mathcal{H}_0 = 1$ et $\dim \mathcal{H}_n < \infty$;

2. $\cdot : \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ est un produit gradué associatif ;

Bigèbres de Hopf combinatoires

Une bigèbre de Hopf combinatoire est un triplet $(\mathcal{H}, \cdot, \Delta)$ tel que

1. $\mathcal{H}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel gradué

$$\mathcal{H} := \bigoplus_{n \geqslant 0} \mathcal{H}_n$$

   vérifiant $\dim \mathcal{H}_0 = 1$ et $\dim \mathcal{H}_n < \infty$;

2. $\cdot : \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ est un produit gradué associatif ;

3. $\Delta : \mathcal{H} \to \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ est un coproduit gradué coassociatif.

Bigèbres de Hopf combinatoires

Une bigèbre de Hopf combinatoire est un triplet $(\mathcal{H}, \cdot, \Delta)$ tel que

1. $\mathcal{H}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel gradué

$$\mathcal{H} := \bigoplus_{n \geqslant 0} \mathcal{H}_n$$

   vérifiant $\dim \mathcal{H}_0 = 1$ et $\dim \mathcal{H}_n < \infty$;

2. $\cdot : \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ est un produit gradué associatif;

3. $\Delta : \mathcal{H} \to \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ est un coproduit gradué coassociatif.

Ces objets doivent vérifier des axiomes, incluant

$$\Delta(x \cdot y) = \Delta(x)\Delta(y), \qquad x, y \in \mathcal{H}.$$

La bigèbre de Hopf de mélange/déconcaténation

Soit $\mathcal{H} := \bigoplus_{n \geqslant 0} \mathbb{K}\langle \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^n \rangle$.

La bigèbre de Hopf de mélange/déconcaténation

Soit $\mathcal{H} := \bigoplus_{n \geqslant 0} \mathbb{K}\langle \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^n \rangle$.

Produit de mélange $\sqcup\!\sqcup$ sur $\mathcal{H}$.

Exemple

$$\begin{aligned} \mathtt{ab} \sqcup\!\sqcup \mathtt{aa} &= \mathtt{abaa} + \mathtt{aaba} + \mathtt{aaab} + \mathtt{aaba} + \mathtt{aaab} + \mathtt{aaab} \\ &= 3\,\mathtt{aaab} + 2\,\mathtt{aaba} + \mathtt{abaa} \end{aligned}$$

La bigèbre de Hopf de mélange/déconcaténation

Soit $\mathcal{H} := \bigoplus_{n \geqslant 0} \mathbb{K}\langle \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^n \rangle$.

Produit de mélange $\sqcup\!\sqcup$ sur $\mathcal{H}$.

Exemple

$$\begin{aligned} \mathtt{ab} \sqcup\!\sqcup \mathtt{aa} &= \mathtt{abaa} + \mathtt{aaba} + \mathtt{aaab} + \mathtt{aaba} + \mathtt{aaab} + \mathtt{aaab} \\ &= 3\,\mathtt{aaab} + 2\,\mathtt{aaba} + \mathtt{abaa} \end{aligned}$$

Coproduit de déconcaténation Δ sur $\mathcal{H}$.

Exemple

$$\Delta(\mathtt{baa}) = \epsilon \otimes \mathtt{baa} + \mathtt{b} \otimes \mathtt{aa} + \mathtt{ba} \otimes \mathtt{a} + \mathtt{baa} \otimes \epsilon$$

La bigèbre de Hopf de mélange/déconcaténation

Soit $\mathcal{H} := \bigoplus_{n \geqslant 0} \mathbb{K}\langle \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^n \rangle$.

Produit de mélange $\sqcup\!\sqcup$ sur $\mathcal{H}$.

Exemple

$$\begin{aligned} \mathtt{ab} \sqcup\!\sqcup \mathtt{aa} &= \mathtt{abaa} + \mathtt{aaba} + \mathtt{aaab} + \mathtt{aaba} + \mathtt{aaab} + \mathtt{aaab} \\ &= 3\,\mathtt{aaab} + 2\,\mathtt{aaba} + \mathtt{abaa} \end{aligned}$$

Coproduit de déconcaténation Δ sur $\mathcal{H}$.

Exemple

$$\Delta(\mathtt{baa}) = \epsilon \otimes \mathtt{baa} + \mathtt{b} \otimes \mathtt{aa} + \mathtt{ba} \otimes \mathtt{a} + \mathtt{baa} \otimes \epsilon$$

Théorème

$(\mathcal{H}, \sqcup\!\sqcup, \Delta)$ est une bigèbre de Hopf combinatoire [**Malvenuto, Reutenauer**, 1993]

La bigèbre de Hopf naturelle d'une opérade

Soit $\mathcal{O}$ une opérade telle que $\mathcal{O}(1) = \{\mathbb{1}\}$. On pose $\mathcal{O}^+ := \mathcal{O} \setminus \mathcal{O}(1)$.

La bigèbre de Hopf naturelle d'une opérade

Soit $\mathcal{O}$ une opérade telle que $\mathcal{O}(1) = \{\mathbb{1}\}$. On pose $\mathcal{O}^+ := \mathcal{O} \setminus \mathcal{O}(1)$.

La bigèbre de Hopf naturelle $H(\mathcal{O})$ de $\mathcal{O}$ est définie par :

- espace :

$$H(\mathcal{O}) := \mathbb{K}\left\langle \left\{ S_M : M \text{ multiensemble fini sur } \mathcal{O}^+ \right\} \right\rangle \ ;$$

La bigèbre de Hopf naturelle d'une opérade

Soit $\mathcal{O}$ une opérade telle que $\mathcal{O}(1) = \{\mathbb{1}\}$. On pose $\mathcal{O}^+ := \mathcal{O} \setminus \mathcal{O}(1)$.

La bigèbre de Hopf naturelle $H(\mathcal{O})$ de $\mathcal{O}$ est définie par :

- espace :

$$H(\mathcal{O}) := \mathbb{K}\left\langle \left\{ S_M : M \text{ multiensemble fini sur } \mathcal{O}^+ \right\} \right\rangle \ ;$$

- produit :

$$S_{M_1} \cdot S_{M_2} := S_{M_1 \cup M_2} \ ;$$

La bigèbre de Hopf naturelle d'une opérade

Soit $\mathcal{O}$ une opérade telle que $\mathcal{O}(1) = \{\mathbb{1}\}$. On pose $\mathcal{O}^+ := \mathcal{O} \setminus \mathcal{O}(1)$.

La bigèbre de Hopf naturelle $H(\mathcal{O})$ de $\mathcal{O}$ est définie par :

- espace :

$$H(\mathcal{O}) := \mathbb{K}\left\langle \left\{ S_M : M \text{ multiensemble fini sur } \mathcal{O}^+ \right\} \right\rangle \ ;$$

- produit :

$$S_{M_1} \cdot S_{M_2} := S_{M_1 \cup M_2} \ ;$$

- coproduit : l'unique morphisme d'algèbre associative vérifiant

$$\Delta\left(S_{\wr x \int}\right) := \sum_{\substack{y, z_1, \ldots, z_\ell \in \mathcal{O} \\ x = y \circ [z_1, \ldots, z_\ell]}} S_{\wr y \int} \otimes S_{\wr z_1, \ldots, z_\ell \int} \ ;$$

La bigèbre de Hopf naturelle d'une opérade

Soit $\mathcal{O}$ une opérade telle que $\mathcal{O}(1) = \{\mathbb{1}\}$. On pose $\mathcal{O}^+ := \mathcal{O} \setminus \mathcal{O}(1)$.

La bigèbre de Hopf naturelle $H(\mathcal{O})$ de $\mathcal{O}$ est définie par :

- espace :

$$H(\mathcal{O}) := \mathbb{K}\left\langle \left\{ S_M : M \text{ multiensemble fini sur } \mathcal{O}^+ \right\} \right\rangle \ ;$$

- produit :

$$S_{M_1} \cdot S_{M_2} := S_{M_1 \cup M_2} \ ;$$

- coproduit : l'unique morphisme d'algèbre associative vérifiant

$$\Delta\left(S_{\wr x \int}\right) := \sum_{\substack{y, z_1, \ldots, z_\ell \in \mathcal{O} \\ x = y \circ [z_1, \ldots, z_\ell]}} S_{\wr y \int} \otimes S_{\wr z_1, \ldots, z_\ell \int} \ ;$$

- graduation : le degré de $S_{\wr x \int}$ est $n - 1$ si $x \in \mathcal{O}(n)$.

La bigèbre de Hopf naturelle d'une opérade

Quelques propriétés :

- $H(\mathcal{O})$ est commutative but et non cocommutative en général ;

La bigèbre de Hopf naturelle d'une opérade

Quelques propriétés :

- $H(\mathcal{O})$ est commutative but et non cocommutative en général ;
- $H(\mathcal{O})$ est libre en tant qu'algèbre associative et commutative ;

La bigèbre de Hopf naturelle d'une opérade

Quelques propriétés :

- $H(\mathcal{O})$ est commutative but et non cocommutative en général ;
- $H(\mathcal{O})$ est libre en tant qu'algèbre associative et commutative ;
- les générateurs algébriques de $H(\mathcal{O})$ sont les $S_{\lfloor x \rfloor}$, tels que $x \in \mathcal{O}^+$.

La bigèbre de Hopf naturelle d'une opérade

Quelques propriétés :

- $H(\mathcal{O})$ est commutative but et non cocommutative en général ;
- $H(\mathcal{O})$ est libre en tant qu'algèbre associative et commutative ;
- les générateurs algébriques de $H(\mathcal{O})$ sont les $S_{\wr x \int}$, tels que $x \in \mathcal{O}^+$.

Cette construction a été considérée p.ex. dans

- [**van der Laan**, 2004] ;
- [**Chapoton, Livernet**, 2007] ;
- [**Frabetti**, 2008] ;
- [**Méndez, Liendo**, 2013].

Exemple : la bigèbre de Hopf naturelle d'As

Les bases de $H(\mathsf{As})$ sont indexées par les multiensembles finis sur As^+.

Exemple : la bigèbre de Hopf naturelle d'As

Les bases de $H(\mathsf{As})$ sont indexées par les multiensembles finis sur As^+.
On encode cela par des mots décroissants sur $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

Exemple

$$S_{\wr \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_4, \mathfrak{a}_5 \int} \quad \longleftrightarrow \quad S_{5422}$$

Exemple : la bigèbre de Hopf naturelle d'As

Les bases de $H(\mathsf{As})$ sont indexées par les multiensembles finis sur As^+.
On encode cela par des mots décroissants sur $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

Exemple

$$S_{\wr \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_4, \mathfrak{a}_5 \int} \quad \longleftrightarrow \quad S_{5422}$$

Degré	Éléments de base de $H(\mathsf{As})$
0	S_ϵ
1	S_2
2	$S_3, \quad S_{22}$
3	$S_4, \quad S_{32}, \quad S_{222}$
4	$S_5, \quad S_{42}, \quad S_{33}, \quad S_{322}, \quad S_{2222}$

Exemple : la bigèbre de Hopf naturelle d'As

Les bases de $H(\mathsf{As})$ sont indexées par les multiensembles finis sur As^+.
On encode cela par des mots décroissants sur $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

Exemple

$$S_{\wr \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_4, \mathfrak{a}_5 \int} \quad \longleftrightarrow \quad S_{5422}$$

Degré	Éléments de base de $H(\mathsf{As})$
0	S_ϵ
1	S_2
2	$S_3, \quad S_{22}$
3	$S_4, \quad S_{32}, \quad S_{222}$
4	$S_5, \quad S_{42}, \quad S_{33}, \quad S_{322}, \quad S_{2222}$

Exemple

$$S_{221} \cdot S_{32} = S_{32221}$$

Exemple : la bigèbre de Hopf naturelle d'As

Les bases de $H(\mathrm{As})$ sont indexées par les multiensembles finis sur As^+.
On encode cela par des mots décroissants sur $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

Exemple

$$S_{\wr \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_4, \mathfrak{a}_5 \int} \quad \longleftrightarrow \quad S_{5422}$$

Degré	Éléments de base de $H(\mathrm{As})$
0	S_ϵ
1	S_2
2	$S_3, \quad S_{22}$
3	$S_4, \quad S_{32}, \quad S_{222}$
4	$S_5, \quad S_{42}, \quad S_{33}, \quad S_{322}, \quad S_{2222}$

Exemple

$$S_{221} \cdot S_{32} = S_{32221}$$

Exemple

$$\Delta(S_4) = S_\epsilon \otimes S_4 + S_2 \otimes S_{22} + 2S_2 \otimes S_3 + 3S_3 \otimes S_2 + S_4 \otimes S_\epsilon$$

Exemple : la bigèbre de Hopf naturelle d'As

Les bases de $H(\mathrm{As})$ sont indexées par les multiensembles finis sur As^+.
On encode cela par des mots décroissants sur $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

Exemple

$$S_{\wr \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_4, \mathfrak{a}_5 \int} \quad \longleftrightarrow \quad S_{5422}$$

Degré	Éléments de base de $H(\mathrm{As})$
0	S_ϵ
1	S_2
2	$S_3, \quad S_{22}$
3	$S_4, \quad S_{32}, \quad S_{222}$
4	$S_5, \quad S_{42}, \quad S_{33}, \quad S_{322}, \quad S_{2222}$

Exemple

$$S_{221} \cdot S_{32} = S_{32221}$$

Exemple

$$\Delta(S_4) = S_\epsilon \otimes S_4 + S_2 \otimes S_{22} + 2S_2 \otimes S_3 + 3S_3 \otimes S_2 + S_4 \otimes S_\epsilon$$

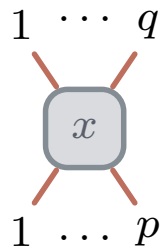
$H(\mathrm{As})$ est la bigèbre de Hopf de Faà di Bruno FdB.

Plan

Bigèbres de Hopf de pros

Biopérateurs

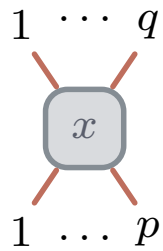
Un biopérateur est une entité ayant $p \geqslant 0$ entrées et $q \geqslant 0$ sorties.



Son arité d'entrée est p
et son arité de sortie est q.

Biopérateurs

Un biopérateur est une entité ayant $p \geqslant 0$ entrées et $q \geqslant 0$ sorties.

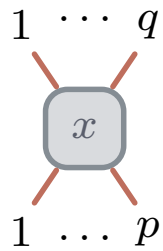


Son arité d'entrée est p
et son arité de sortie est q.

Il y a deux façons d'assembler des biopérateurs :

Biopérateurs

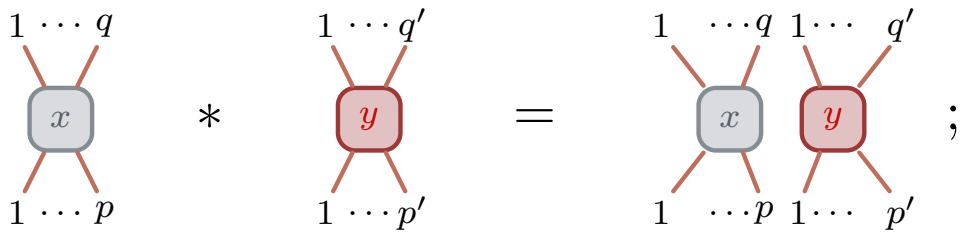
Un biopérateur est une entité ayant $p \geqslant 0$ entrées et $q \geqslant 0$ sorties.



Son arité d'entrée est p
et son arité de sortie est q.

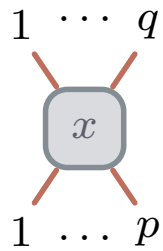
Il y a deux façons d'assembler des biopérateurs :

1. horizontalement :



Biopérateurs

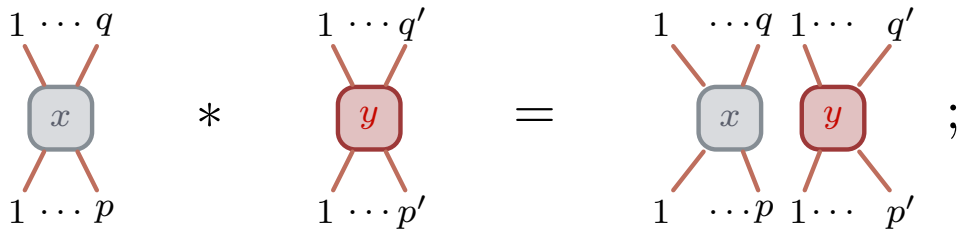
Un biopérateur est une entité ayant $p \geqslant 0$ entrées et $q \geqslant 0$ sorties.



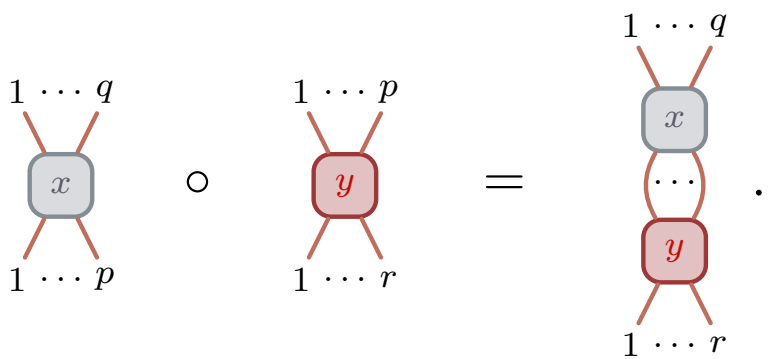
Son arité d'entrée est p
et son arité de sortie est q.

Il y a deux façons d'assembler des biopérateurs :

1. horizontalement :



2. verticalement :



Cette opération ∘ est
partiellement définie.

Pros

Les pros sont des structures algébriques formalisant la notion de biopérateur de leurs compositions.

Pros

Les pros sont des structures algébriques formalisant la notion de biopérateur de leurs compositions.

Un pro (*product category*) est un quadruplet $(\mathcal{P}, *, \circ, \mathbb{1}_p)$ tel que

1. $\mathcal{P}$ est un ensemble bigradué

$$\mathcal{P} := \bigsqcup_{p \geqslant 0} \bigsqcup_{q \geqslant 0} \mathcal{P}(p, q) \ ;$$

Pros

Les pros sont des structures algébriques formalisant la notion de biopérateur de leurs compositions.

Un pro (*product category*) est un quadruplet $(\mathcal{P}, *, \circ, \mathbb{1}_p)$ tel que

1. $\mathcal{P}$ est un ensemble bigradué

$$\mathcal{P} := \bigsqcup_{p \geqslant 0} \bigsqcup_{q \geqslant 0} \mathcal{P}(p, q) \; ;$$

2. $*$ est une application de composition horizontale

$$* : \mathcal{P}(p, q) \times \mathcal{P}(p', q') \to \mathcal{P}(p + p', q + q'), \qquad p, p', q, q' \geqslant 0 \; ;$$

Pros

Les pros sont des structures algébriques formalisant la notion de biopérateur de leurs compositions.

Un pro (*product category*) est un quadruplet $(\mathcal{P}, *, \circ, \mathbb{1}_p)$ tel que

1. $\mathcal{P}$ est un ensemble bigradué

$$\mathcal{P} := \bigsqcup_{p \geqslant 0} \bigsqcup_{q \geqslant 0} \mathcal{P}(p, q) \; ;$$

2. $*$ est une application de composition horizontale

$$* : \mathcal{P}(p, q) \times \mathcal{P}(p', q') \to \mathcal{P}(p + p', q + q'), \qquad p, p', q, q' \geqslant 0 \; ;$$

3. $\circ$ est une application de composition verticale

$$\circ : \mathcal{P}(p, q) \times \mathcal{P}(r, p) \to \mathcal{P}(r, q), \qquad p, q, r \geqslant 0 \; ;$$

Pros

Les pros sont des structures algébriques formalisant la notion de biopérateur de leurs compositions.

Un pro (*product category*) est un quadruplet $(\mathcal{P}, *, \circ, \mathbb{1}_p)$ tel que

1. $\mathcal{P}$ est un ensemble bigradué

$$\mathcal{P} := \bigsqcup_{p \geqslant 0} \bigsqcup_{q \geqslant 0} \mathcal{P}(p, q) \ ;$$

2. $*$ est une application de composition horizontale

$$* : \mathcal{P}(p, q) \times \mathcal{P}(p', q') \to \mathcal{P}(p + p', q + q'), \qquad p, p', q, q' \geqslant 0 \ ;$$

3. $\circ$ est une application de composition verticale

$$\circ : \mathcal{P}(p, q) \times \mathcal{P}(r, p) \to \mathcal{P}(r, q), \qquad p, q, r \geqslant 0 \ ;$$

4. $\mathbb{1}_p$ est pour tout $p \geqslant 0$ un élément de $\mathcal{P}(p, p)$, appelé unité d'arité p.

Pros

Les pros sont des structures algébriques formalisant la notion de biopérateur de leurs compositions.

Un pro (*product category*) est un quadruplet $(\mathcal{P}, *, \circ, \mathbb{1}_p)$ tel que

1. $\mathcal{P}$ est un ensemble bigradué

$$\mathcal{P} := \bigsqcup_{p \geqslant 0} \bigsqcup_{q \geqslant 0} \mathcal{P}(p, q) \ ;$$

2. $*$ est une application de composition horizontale

$$* : \mathcal{P}(p, q) \times \mathcal{P}(p', q') \to \mathcal{P}(p + p', q + q'), \qquad p, p', q, q' \geqslant 0 \ ;$$

3. $\circ$ est une application de composition verticale

$$\circ : \mathcal{P}(p, q) \times \mathcal{P}(r, p) \to \mathcal{P}(r, q), \qquad p, q, r \geqslant 0 \ ;$$

4. $\mathbb{1}_p$ est pour tout $p \geqslant 0$ un élément de $\mathcal{P}(p, p)$, appelé unité d'arité p.

Ces objets doivent vérifier des axiomes.

Axiomes des pros

Pour tous $x, y, z, t \in \mathcal{P}$, quand elles sont définies, les six relations suivantes doivent être vérifiées :

Axiomes des pros

Pour tous $x, y, z, t \in \mathcal{P}$, quand elles sont définies, les six relations suivantes doivent être vérifiées :

associativité horizontale :

$$(x * y) * z = x * (y * z) \ ;$$

Axiomes des pros

Pour tous $x, y, z, t \in \mathcal{P}$, quand elles sont définies, les six relations suivantes doivent être vérifiées :

associativité horizontale :

$$(x * y) * z = x * (y * z) \ ;$$

associativité verticale :

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z) \ ;$$

Axiomes des pros

Pour tous $x, y, z, t \in \mathcal{P}$, quand elles sont définies, les six relations suivantes doivent être vérifiées :

associativité horizontale :

$$(x * y) * z = x * (y * z) \ ;$$

associativité verticale :

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z) \ ;$$

règle du carré :

$$(x \circ y) * (z \circ t) = (x * z) \circ (y * t) \ ;$$

Axiomes des pros

Pour tous $x, y, z, t \in \mathcal{P}$, quand elles sont définies, les six relations suivantes doivent être vérifiées :

associativité horizontale :

$$(x * y) * z = x * (y * z) \ ;$$

associativité verticale :

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z) \ ;$$

règle du carré :

$$(x \circ y) * (z \circ t) = (x * z) \circ (y * t) \ ;$$

relations des fils :

$$\mathbb{1}_p * \mathbb{1}_q = \mathbb{1}_{p+q} \ ;$$

Axiomes des pros

Pour tous $x, y, z, t \in \mathcal{P}$, quand elles sont définies, les six relations suivantes doivent être vérifiées :

associativité horizontale :

$$(x * y) * z = x * (y * z) \ ;$$

associativité verticale :

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z) \ ;$$

règle du carré :

$$(x \circ y) * (z \circ t) = (x * z) \circ (y * t) \ ;$$

relations des fils :

$$\mathbb{1}_p * \mathbb{1}_q = \mathbb{1}_{p+q} \ ;$$

$$x * \mathbb{1}_0 = x = \mathbb{1}_0 * x \ ;$$

Axiomes des pros

Pour tous $x, y, z, t \in \mathcal{P}$, quand elles sont définies, les six relations suivantes doivent être vérifiées :

associativité horizontale :

$$(x * y) * z = x * (y * z) \ ;$$

associativité verticale :

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z) \ ;$$

règle du carré :

$$(x \circ y) * (z \circ t) = (x * z) \circ (y * t) \ ;$$

relations des fils :

$$\mathbb{1}_p * \mathbb{1}_q = \mathbb{1}_{p+q} \ ;$$

$$x * \mathbb{1}_0 = x = \mathbb{1}_0 * x \ ;$$

$$x \circ \mathbb{1}_p = x = \mathbb{1}_q \circ x.$$

Exemple : le pro des applications

Le pro des applications $\mathbf{Map}$ est défini par :

- $\mathbf{Map}(p, q)$ est l'ensemble des applications $x : [p] \to [q]$;

Exemple : le pro des applications

Le pro des applications $\mathbf{Map}$ est défini par :

- $\mathbf{Map}(p, q)$ est l'ensemble des applications $x : [p] \to [q]$;
- la composition horizontale est une concaténation décalée ;

Exemple

Soient $x := 3115 \in \mathbf{Map}(4, 5)$ et $y := 133 \in \mathbf{Map}(3, 9)$.

$$x * y = 3115688$$

Exemple : le pro des applications

Le pro des applications $\mathbf{Map}$ est défini par :

- $\mathbf{Map}(p, q)$ est l'ensemble des applications $x : [p] \to [q]$;
- la composition horizontale est une concaténation décalée ;
- la composition verticale est la composition des applications ;

Exemple

Soient $x := 3115 \in \mathbf{Map}(4, 5)$ et $y := 133 \in \mathbf{Map}(3, 9)$.

$$x * y = 3115688$$

Exemple

Soient $x := 1224244 \in \mathbf{Map}(7, 6)$ et $y := 3312 \in \mathbf{Map}(4, 7)$.

$$x \circ y = 2212$$

Exemple : le pro des applications

Le pro des applications $\mathbf{Map}$ est défini par :

- $\mathbf{Map}(p, q)$ est l'ensemble des applications $x : [p] \to [q]$;
- la composition horizontale est une concaténation décalée ;
- la composition verticale est la composition des applications ;
- l'unité est l'application $[1] \to [1]$.

Exemple

Soient $x := 3115 \in \mathbf{Map}(4, 5)$ et $y := 133 \in \mathbf{Map}(3, 9)$.

$$x * y = 3115688$$

Exemple

Soient $x := 1224244 \in \mathbf{Map}(7, 6)$ et $y := 3312 \in \mathbf{Map}(4, 7)$.

$$x \circ y = 2212$$

Exemple : le pro des permutations

Le pro des permutations $\mathbf{Per}$ est le sous-pro de $\mathbf{Map}$ restreint aux applications bijectives.

Exemple : le pro des permutations

Le pro des permutations $\mathbf{Per}$ est le sous-pro de $\mathbf{Map}$ restreint aux applications bijectives.

$\mathbf{Per}$ est engendré par $\mathfrak{s} := 21$ (**la** transposition simple).

Exemple : le pro des permutations

Le pro des permutations $\mathbf{Per}$ est le sous-pro de $\mathbf{Map}$ restreint aux applications bijectives.

$\mathbf{Per}$ est engendré par $\mathfrak{s} := 21$ (**la** transposition simple).

$\mathfrak{s}$ est soumis aux relations

$$\mathfrak{s} \circ \mathfrak{s} = \mathbb{1}_2$$

Exemple : le pro des permutations

Le pro des permutations $\mathbf{Per}$ est le sous-pro de $\mathbf{Map}$ restreint aux applications bijectives.

$\mathbf{Per}$ est engendré par $\mathfrak{s} := 21$ (**la** transposition simple).

$\mathfrak{s}$ est soumis aux relations

$$\mathfrak{s} \circ \mathfrak{s} = \mathbb{1}_2$$

et

$$(\mathfrak{s} * \mathbb{1}_1) \circ (\mathbb{1}_1 * \mathfrak{s}) \circ (\mathfrak{s} * \mathbb{1}_1) = (\mathbb{1}_1 * \mathfrak{s}) \circ (\mathfrak{s} * \mathbb{1}_1) \circ (\mathbb{1}_1 * \mathfrak{s}).$$

Exemple : le pro des permutations

Le pro des permutations **Per** est le sous-pro de **Map** restreint aux applications bijectives.

Per est engendré par $\mathfrak{s} := 21$ (**la** transposition simple).

$\mathfrak{s}$ est soumis aux relations

$$\mathfrak{s} \circ \mathfrak{s} = \mathbb{1}_2$$

et

$$(\mathfrak{s} * \mathbb{1}_1) \circ (\mathbb{1}_1 * \mathfrak{s}) \circ (\mathfrak{s} * \mathbb{1}_1) = (\mathbb{1}_1 * \mathfrak{s}) \circ (\mathfrak{s} * \mathbb{1}_1) \circ (\mathbb{1}_1 * \mathfrak{s}).$$

Per contient tous les groupes symétriques $\mathfrak{S}_n$, $n \geqslant 0$. Chaque générateur s_i de $\mathfrak{S}_n$ est codé par $\mathbb{1}_{i-1} * \mathfrak{s} * \mathbb{1}_{n-i-1}$.

Exemple : le pro des permutations

Le pro des permutations $\mathbf{Per}$ est le sous-pro de $\mathbf{Map}$ restreint aux applications bijectives.

$\mathbf{Per}$ est engendré par $\mathfrak{s} := 21$ (**la** transposition simple).

$\mathfrak{s}$ est soumis aux relations

$$\mathfrak{s} \circ \mathfrak{s} = \mathbb{1}_2$$

et

$$(\mathfrak{s} * \mathbb{1}_1) \circ (\mathbb{1}_1 * \mathfrak{s}) \circ (\mathfrak{s} * \mathbb{1}_1) = (\mathbb{1}_1 * \mathfrak{s}) \circ (\mathfrak{s} * \mathbb{1}_1) \circ (\mathbb{1}_1 * \mathfrak{s}).$$

$\mathbf{Per}$ contient tous les groupes symétriques $\mathfrak{S}_n$, $n \geqslant 0$. Chaque générateur s_i de $\mathfrak{S}_n$ est codé par $\mathbb{1}_{i-1} * \mathfrak{s} * \mathbb{1}_{n-i-1}$.

Les relations $s_i s_j = s_j s_i$ lorsque $|i - j| \geqslant 2$ sont une conséquence axiomatique des pros (règle du carré).

Pros libres

Soit $\mathfrak{G} := \sqcup_{p \geqslant 1} \sqcup_{q \geqslant 1} \mathfrak{G}(p, q)$ un ensemble bigradué.

Pros libres

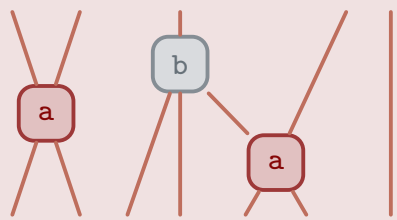
Soit $\mathfrak{G} := \sqcup_{p \geqslant 1} \sqcup_{q \geqslant 1} \mathfrak{G}(p, q)$ un ensemble bigradué.

Le pro libre sur $\mathfrak{G}$ est le pro $\mathrm{FP}(\mathfrak{G})$ tel que :

- $\mathrm{FP}(\mathfrak{G})(p, q)$ est l'ensemble des prographes sur $\mathfrak{G}$ à p entrées et q sorties ;

Exemple

Soit $\mathfrak{G} := \mathfrak{G}(2, 2) \sqcup \mathfrak{G}(3, 1)$ avec $\mathfrak{G}(2, 2) := \{\mathtt{a}\}$ et $\mathfrak{G}(3, 1) := \{\mathtt{b}\}$.



est un élément de $\mathrm{FP}(\mathfrak{G})(7, 5)$.

Pros libres

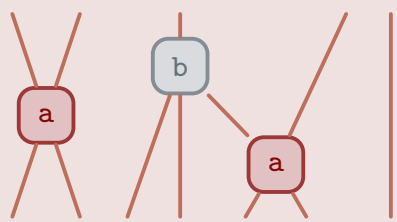
Soit $\mathfrak{G} := \sqcup_{p \geqslant 1} \sqcup_{q \geqslant 1} \mathfrak{G}(p, q)$ un ensemble bigradué.

Le pro libre sur $\mathfrak{G}$ est le pro $\mathrm{FP}(\mathfrak{G})$ tel que :

- $\mathrm{FP}(\mathfrak{G})(p, q)$ est l'ensemble des prographes sur $\mathfrak{G}$ à p entrées et q sorties ;
- la composition horizontale est l'assemblage horizontal des biopérateurs ;

Exemple

Soit $\mathfrak{G} := \mathfrak{G}(2, 2) \sqcup \mathfrak{G}(3, 1)$ avec $\mathfrak{G}(2, 2) := \{\mathtt{a}\}$ et $\mathfrak{G}(3, 1) := \{\mathtt{b}\}$.



est un élément de $\mathrm{FP}(\mathfrak{G})(7, 5)$.

Pros libres

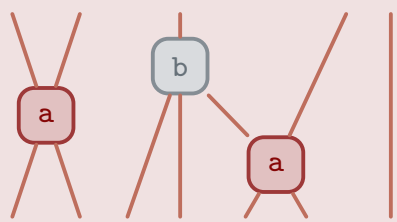
Soit $\mathfrak{G} := \sqcup_{p \geqslant 1} \sqcup_{q \geqslant 1} \mathfrak{G}(p, q)$ un ensemble bigradué.

Le pro libre sur $\mathfrak{G}$ est le pro $\mathrm{FP}(\mathfrak{G})$ tel que :

- $\mathrm{FP}(\mathfrak{G})(p, q)$ est l'ensemble des prographes sur $\mathfrak{G}$ à p entrées et q sorties ;
- la composition horizontale est l'assemblage horizontal des biopérateurs ;
- la composition verticale est l'assemblage vertical des biopérateurs ;

Exemple

Soit $\mathfrak{G} := \mathfrak{G}(2, 2) \sqcup \mathfrak{G}(3, 1)$ avec $\mathfrak{G}(2, 2) := \{\mathtt{a}\}$ et $\mathfrak{G}(3, 1) := \{\mathtt{b}\}$.



est un élément de $\mathrm{FP}(\mathfrak{G})(7, 5)$.

Pros libres

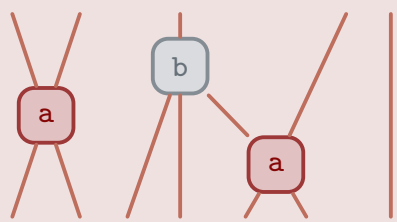
Soit $\mathfrak{G} := \sqcup_{p \geqslant 1} \sqcup_{q \geqslant 1} \mathfrak{G}(p, q)$ un ensemble bigradué.

Le pro libre sur $\mathfrak{G}$ est le pro $\mathrm{FP}(\mathfrak{G})$ tel que :

- $\mathrm{FP}(\mathfrak{G})(p, q)$ est l'ensemble des prographes sur $\mathfrak{G}$ à p entrées et q sorties ;
- la composition horizontale est l'assemblage horizontal des biopérateurs ;
- la composition verticale est l'assemblage vertical des biopérateurs ;
- l'unité est le fil $|$.

Exemple

Soit $\mathfrak{G} := \mathfrak{G}(2, 2) \sqcup \mathfrak{G}(3, 1)$ avec $\mathfrak{G}(2, 2) := \{\mathtt{a}\}$ et $\mathfrak{G}(3, 1) := \{\mathtt{b}\}$.



est un élément de $\mathrm{FP}(\mathfrak{G})(7, 5)$.

Décompositions maximales

Soit $\mathcal{P}$ un pro libre.

La décomposition maximale $\mathrm{dec}(x)$ de $x \in \mathcal{P}$ est le mot $(y_1, \ldots, y_\ell)$ tel que

$$x = y_1 * \cdots * y_\ell$$

avec ℓ maximal et $y_i \neq \mathbb{1}_0$ pour tout $i \in [\ell]$.

Décompositions maximales

Soit $\mathcal{P}$ un pro libre.

La décomposition maximale $\mathrm{dec}(x)$ de $x \in \mathcal{P}$ est le mot $(y_1, \ldots, y_\ell)$ tel que

$$x = y_1 * \cdots * y_\ell$$

avec ℓ maximal et $y_i \neq \mathbb{1}_0$ pour tout $i \in [\ell]$.

Comme $(\mathcal{P}, *, \mathbb{1}_0)$ est un monoïde libre, $\mathrm{dec}(x)$ est unique.

Décompositions maximales

Soit $\mathcal{P}$ un pro libre.

La décomposition maximale $\mathrm{dec}(x)$ de $x \in \mathcal{P}$ est le mot $(y_1, \ldots, y_\ell)$ tel que

$$x = y_1 * \cdots * y_\ell$$

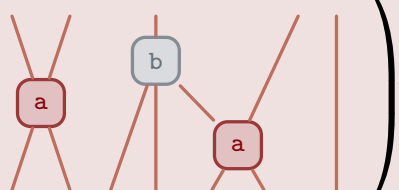
avec ℓ maximal et $y_i \neq \mathbb{1}_0$ pour tout $i \in [\ell]$.

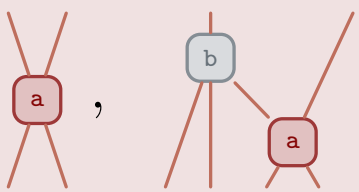
Comme $(\mathcal{P}, *, \mathbb{1}_0)$ est un monoïde libre, $\mathrm{dec}(x)$ est unique.

Exemple

$$\mathrm{dec}(\mathbb{1}_0) = \epsilon, \qquad \mathrm{dec}(\mathbb{1}_1) = (\mathbb{1}_1), \qquad \mathrm{dec}(\mathbb{1}_2) = (\mathbb{1}_1, \mathbb{1}_1)$$

$$\mathrm{dec}\left(\right) = \left(\, , \, , \, \right)$$





Éléments réduits et réduction

Soit $\mathcal{P}$ un pro libre.

$x \in \mathcal{P}$ est réduit si toutes les lettres de $\mathrm{dec}(x)$ sont différentes du fil $\mathbb{1}_1$.

Éléments réduits et réduction

Soit $\mathcal{P}$ un pro libre.

$x \in \mathcal{P}$ est réduit si toutes les lettres de $\mathrm{dec}(x)$ sont différentes du fil $\mathbb{1}_1$.

La réduction $\mathrm{red}(x)$ de x est l'élément de $\mathcal{P}$ définit par

$$\mathrm{red}(x) := z_1 * \cdots * z_k,$$

où $(z_1, \ldots, z_k)$ est le plus long sous-mot de $\mathrm{dec}(x)$ tel que $z_i \neq \mathbb{1}_1$, $i \in [k]$.

Éléments réduits et réduction

Soit $\mathcal{P}$ un pro libre.

$x \in \mathcal{P}$ est réduit si toutes les lettres de $\mathrm{dec}(x)$ sont différentes du fil $\mathbb{1}_1$.

La réduction $\mathrm{red}(x)$ de x est l'élément de $\mathcal{P}$ définit par

$$\mathrm{red}(x) := z_1 * \cdots * z_k,$$

où $(z_1, \ldots, z_k)$ est le plus long sous-mot de $\mathrm{dec}(x)$ tel que $z_i \neq \mathbb{1}_1$, $i \in [k]$.

Exemple

$\mathbb{1}_0$ est réduit ;

Éléments réduits et réduction

Soit $\mathcal{P}$ un pro libre.

$x \in \mathcal{P}$ est réduit si toutes les lettres de $\mathrm{dec}(x)$ sont différentes du fil $\mathbb{1}_1$.

La réduction $\mathrm{red}(x)$ de x est l'élément de $\mathcal{P}$ définit par

$$\mathrm{red}(x) := z_1 * \cdots * z_k,$$

où $(z_1, \ldots, z_k)$ est le plus long sous-mot de $\mathrm{dec}(x)$ tel que $z_i \neq \mathbb{1}_1$, $i \in [k]$.

Exemple

$\mathbb{1}_0$ est réduit ; $\mathbb{1}_1$ et $\mathbb{1}_2$ ne le sont pas ;

Éléments réduits et réduction

Soit $\mathcal{P}$ un pro libre.

$x \in \mathcal{P}$ est réduit si toutes les lettres de $\mathrm{dec}(x)$ sont différentes du fil $\mathbb{1}_1$.

La réduction $\mathrm{red}(x)$ de x est l'élément de $\mathcal{P}$ définit par

$$\mathrm{red}(x) := z_1 * \cdots * z_k,$$

où $(z_1, \ldots, z_k)$ est le plus long sous-mot de $\mathrm{dec}(x)$ tel que $z_i \neq \mathbb{1}_1$, $i \in [k]$.

Exemple

$\mathbb{1}_0$ est réduit ; $\mathbb{1}_1$ et $\mathbb{1}_2$ ne le sont pas ; $\mathrm{red}(\mathbb{1}_9) = \mathbb{1}_0$.

Éléments réduits et réduction

Soit $\mathcal{P}$ un pro libre.

$x \in \mathcal{P}$ est réduit si toutes les lettres de $\mathrm{dec}(x)$ sont différentes du fil $\mathbb{1}_1$.

La réduction $\mathrm{red}(x)$ de x est l'élément de $\mathcal{P}$ définit par

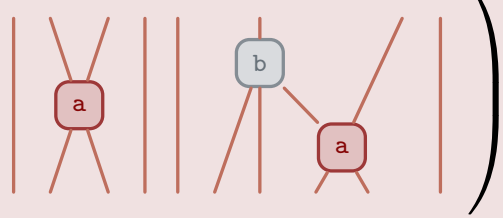
$$\mathrm{red}(x) := z_1 * \cdots * z_k,$$

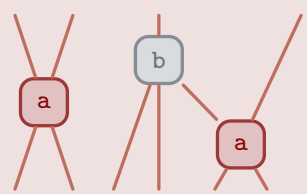
où $(z_1, \ldots, z_k)$ est le plus long sous-mot de $\mathrm{dec}(x)$ tel que $z_i \neq \mathbb{1}_1$, $i \in [k]$.

Exemple

$\mathbb{1}_0$ est réduit ; $\mathbb{1}_1$ et $\mathbb{1}_2$ ne le sont pas ; $\mathrm{red}(\mathbb{1}_9) = \mathbb{1}_0$.

$$\mathrm{red}\left(\right) =$$





La bigèbre naturelle d'un pro

Soit $\mathcal{P}$ un pro libre.

Soit $\mathrm{red}(\mathcal{P})$ l'ensemble des réduits de $\mathcal{P}$.

La bigèbre naturelle d'un pro

Soit $\mathcal{P}$ un pro libre.

Soit $\mathrm{red}(\mathcal{P})$ l'ensemble des réduits de $\mathcal{P}$.

La bigèbre naturelle $\mathsf{H}(\mathcal{P})$ de $\mathcal{P}$ est définie par :

- espace :

$$\mathsf{H}(\mathcal{P}) := \mathbb{K}\left\langle \{\mathbf{S}_x : x \in \mathrm{red}(\mathcal{P})\} \right\rangle \ ;$$

La bigèbre naturelle d'un pro

Soit $\mathcal{P}$ un pro libre.

Soit $\mathrm{red}(\mathcal{P})$ l'ensemble des réduits de $\mathcal{P}$.

La bigèbre naturelle $\mathsf{H}(\mathcal{P})$ de $\mathcal{P}$ est définie par :

- espace :
$$\mathsf{H}(\mathcal{P}) := \mathbb{K}\left\langle \{\mathbf{S}_x : x \in \mathrm{red}(\mathcal{P})\} \right\rangle \ ;$$
- produit :
$$\mathbf{S}_x \cdot \mathbf{S}_y := \mathbf{S}_{x*y} \ ;$$

La bigèbre naturelle d'un pro

Soit $\mathcal{P}$ un pro libre.

Soit $\mathrm{red}(\mathcal{P})$ l'ensemble des réduits de $\mathcal{P}$.

La bigèbre naturelle $\mathrm{H}(\mathcal{P})$ de $\mathcal{P}$ est définie par :

- espace :
$$\mathrm{H}(\mathcal{P}) := \mathbb{K}\left\langle \{\mathbf{S}_x : x \in \mathrm{red}(\mathcal{P})\} \right\rangle \ ;$$
- produit :
$$\mathbf{S}_x \cdot \mathbf{S}_y := \mathbf{S}_{x*y} \ ;$$
- coproduit :
$$\Delta\left(\mathbf{S}_x\right) := \sum_{\substack{y,z\in\mathcal{P}\\ x=y\circ z}} \mathbf{S}_{\mathrm{red}(y)} \otimes \mathbf{S}_{\mathrm{red}(z)}.$$

La bigèbre naturelle d'un pro

Soit $\mathcal{P}$ un pro libre.

Soit $\mathrm{red}(\mathcal{P})$ l'ensemble des réduits de $\mathcal{P}$.

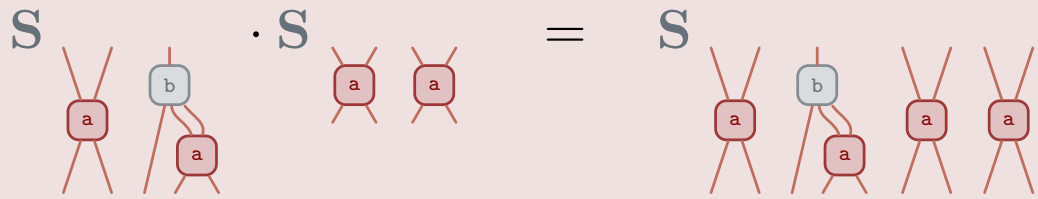
La bigèbre naturelle $\mathsf{H}(\mathcal{P})$ de $\mathcal{P}$ est définie par :

- espace :
$$\mathsf{H}(\mathcal{P}) := \mathbb{K}\left\langle \{\mathbf{S}_x : x \in \mathrm{red}(\mathcal{P})\} \right\rangle \ ;$$
- produit :
$$\mathbf{S}_x \cdot \mathbf{S}_y := \mathbf{S}_{x*y} \ ;$$
- coproduit :
$$\Delta\left(\mathbf{S}_x\right) := \sum_{\substack{y,z\in\mathcal{P}\\ x=y\circ z}} \mathbf{S}_{\mathrm{red}(y)} \otimes \mathbf{S}_{\mathrm{red}(z)}.$$

  Comparaison avec le coproduit de la bigèbre naturelle d'une opérade :
$$\Delta\left(S_{\wr x \int}\right) := \sum_{\substack{y,z_1,\ldots,z_\ell\in\mathcal{O}\\ x=y\circ[z_1,\ldots,z_\ell]}} S_{\wr y \int} \otimes S_{\wr z_1,\ldots,z_\ell \int}.$$

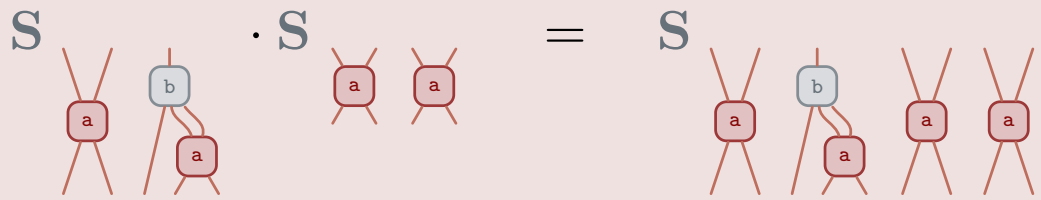
La bigèbre naturelle d'un pro

Exemple

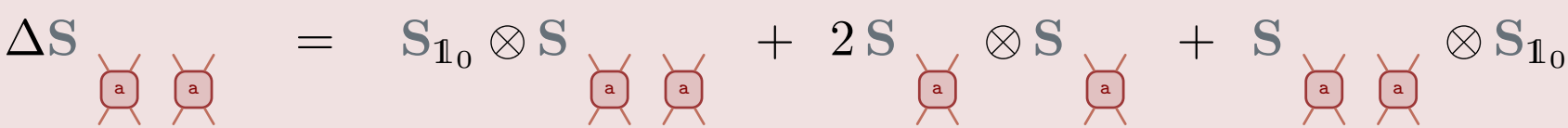


La bigèbre naturelle d'un pro

Exemple

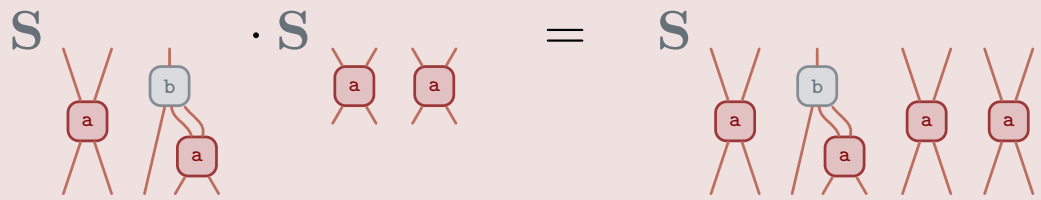


Exemple

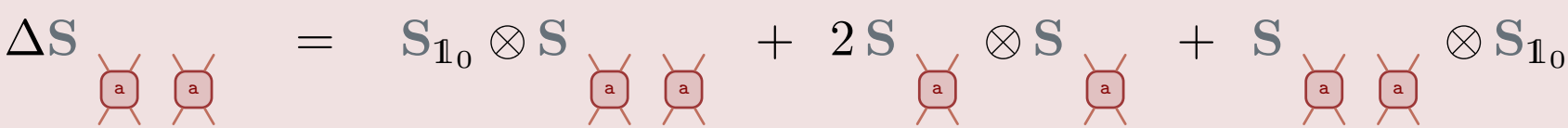


La bigèbre naturelle d'un pro

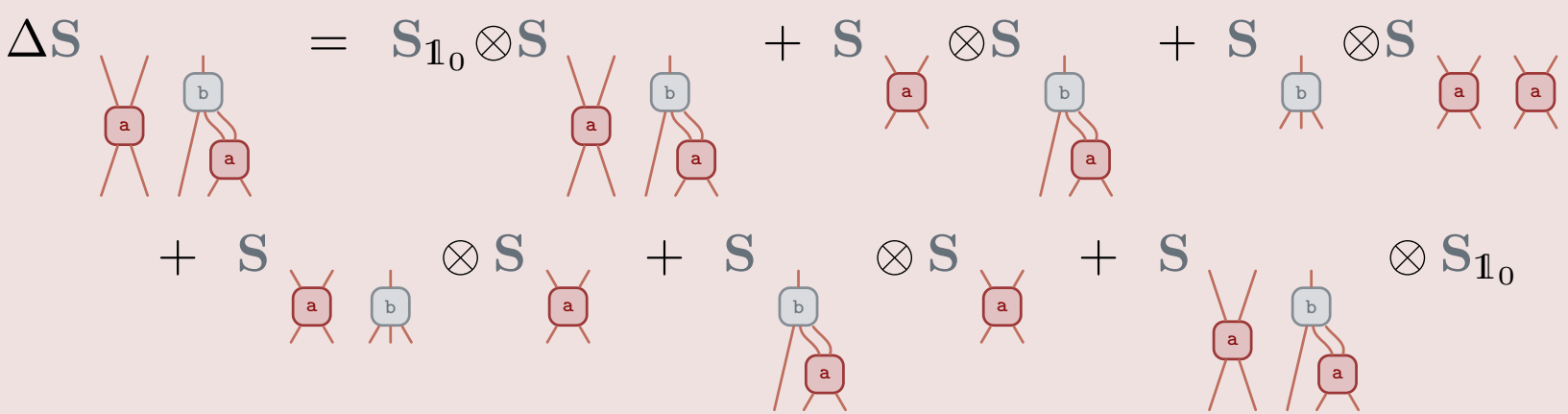
Exemple



Exemple



Exemple



Premières propriétés

Théorème

Pour tout pro libre $\mathcal{P}$, $\mathsf{H}(\mathcal{P})$ est une bigèbre de Hopf.

Premières propriétés

Théorème

Pour tout pro libre $\mathcal{P}$, $\mathsf{H}(\mathcal{P})$ est une bigèbre de Hopf.

Un élément $x \in \mathcal{P}$ est indécomposable si $|\operatorname{dec}(x)| = 1$.

Proposition

Soit $\mathcal{P}$ un pro libre. La bigèbre $\mathsf{H}(\mathcal{P})$ est engendrée librement, en tant qu'algèbre associative, par l'ensemble des $\mathbf{S}_x$ tels que $x \in \mathcal{P}$ est réduit et indécomposable.

Premières propriétés

Théorème

Pour tout pro libre $\mathcal{P}$, $\mathsf{H}(\mathcal{P})$ est une bigèbre de Hopf.

Un élément $x \in \mathcal{P}$ est indécomposable si $|\operatorname{dec}(x)| = 1$.

Proposition

Soit $\mathcal{P}$ un pro libre. La bigèbre $\mathsf{H}(\mathcal{P})$ est engendrée librement, en tant qu'algèbre associative, par l'ensemble des $\mathbf{S}_x$ tels que $x \in \mathcal{P}$ est réduit et indécomposable.

En général, $\mathsf{H}(\mathcal{P})$ n'est ni commutative ni cocommutative.

Premières propriétés

Théorème

Pour tout pro libre $\mathcal{P}$, $\mathsf{H}(\mathcal{P})$ est une bigèbre de Hopf.

Un élément $x \in \mathcal{P}$ est indécomposable si $|\operatorname{dec}(x)| = 1$.

Proposition

Soit $\mathcal{P}$ un pro libre. La bigèbre $\mathsf{H}(\mathcal{P})$ est engendrée librement, en tant qu'algèbre associative, par l'ensemble des $\mathbf{S}_x$ tels que $x \in \mathcal{P}$ est réduit et indécomposable.

En général, $\mathsf{H}(\mathcal{P})$ n'est ni commutative ni cocommutative.

Le coproduit de $\mathsf{H}(\mathcal{P})$ possède des multiplicités non triviales sur la base des $\mathbf{S}$.

Graduations

Soit $\mathcal{P} = \mathrm{FP}(\mathfrak{G})$ un pro libre et $w : \mathfrak{G} \to \mathbb{N}$ une application.

Graduations

Soit $\mathcal{P} = \mathrm{FP}(\mathfrak{G})$ un pro libre et $w : \mathfrak{G} \to \mathbb{N}$ une application.

Pour tout $x \in \mathcal{P}$, le w-poids de x est

$$\omega_w(x) := \sum_{g \in x} w(g).$$

Graduations

Soit $\mathcal{P} = \mathrm{FP}(\mathfrak{G})$ un pro libre et $w : \mathfrak{G} \to \mathbb{N}$ une application.

Pour tout $x \in \mathcal{P}$, le w-poids de x est

$$\omega_w(x) := \sum_{g \in x} w(g).$$

Proposition

Lorsque les deux assertions suivantes sont vraies :

1. pour tout $g \in \mathfrak{G}$, $w(g) \geqslant 1$;
2. pour tout $n \geqslant 1$, la fibre $w^{-1}(n)$ est finie,

alors $\mathsf{H}(\mathcal{P})$ muni de la graduation

$$\mathsf{H}(\mathcal{P}) = \bigoplus_{n \geqslant 0} \mathbb{K} \langle \{ \mathbf{S}_x : x \in \mathrm{red}(\mathcal{P}) \text{ et } \omega_w(x) = n \} \rangle$$

est une bigèbre de Hopf combinatoire.

Antipode

Proposition

Soit $\mathcal{P}$ un pro libre. Pour tout réduit $x \in \mathcal{P}$ tel que $x \neq \mathbb{1}_0$, l'antipode ν de $\mathsf{H}(\mathcal{P})$ vérifie

$$\nu(\mathbf{S}_x) = \sum_{\substack{x_1,\dots,x_\ell \in \mathcal{P}, \ell \geqslant 1 \\ x = x_1 \circ \cdots \circ x_\ell \\ \mathrm{red}(x_i) \neq \mathbb{1}_0, i \in [\ell]}} (-1)^\ell \, \mathbf{S}_{\mathrm{red}(x_1 * \cdots * x_\ell)}.$$

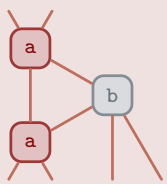
Antipode

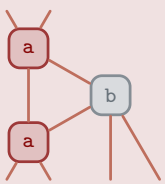
Proposition

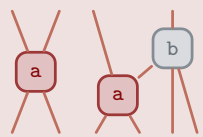
Soit $\mathcal{P}$ un pro libre. Pour tout réduit $x \in \mathcal{P}$ tel que $x \neq \mathbb{1}_0$, l'antipode ν de $\mathsf{H}(\mathcal{P})$ vérifie

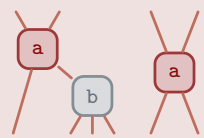
$$\nu(\mathbf{S}_x) = \sum_{\substack{x_1,\dots,x_\ell \in \mathcal{P}, \ell \geqslant 1 \\ x = x_1 \circ \cdots \circ x_\ell \\ \mathrm{red}(x_i) \neq \mathbb{1}_0, i \in [\ell]}} (-1)^\ell \, \mathbf{S}_{\mathrm{red}(x_1 * \cdots * x_\ell)}.$$

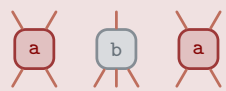
Exemple

$\nu\mathbf{S}$ 

$= -\mathbf{S}$ 

$+ \mathbf{S}$ 

$+ \mathbf{S}$ 

$- \mathbf{S}$ 

Congruences de pros

Soit $\mathcal{P}$ un pro.

Une congruence de pro est une relation d'équivalence $\equiv$ sur $\mathcal{P}$ telle que

1. $x \equiv x'$ et $x \in \mathcal{P}(p, q)$ implique $x' \in \mathcal{P}(p, q)$;
2. $x \equiv x'$ et $y \equiv y'$ implique $x * y \equiv x' * y'$;
3. $x \equiv x'$ et $y \equiv y'$ et $x \circ y$ défini implique $x \circ y \equiv x' \circ y'$.

On note $\mathcal{P}/_{\equiv}$ le quotient de $\mathcal{P}$ par $\equiv$.

Congruences de pros

Soit $\mathcal{P}$ un pro.

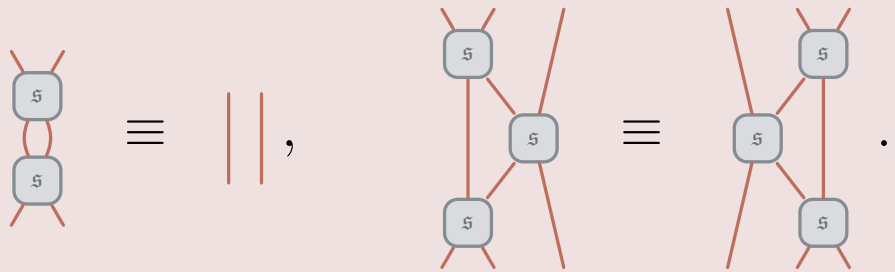
Une congruence de pro est une relation d'équivalence $\equiv$ sur $\mathcal{P}$ telle que

1. $x \equiv x'$ et $x \in \mathcal{P}(p,q)$ implique $x' \in \mathcal{P}(p,q)$;
2. $x \equiv x'$ et $y \equiv y'$ implique $x * y \equiv x' * y'$;
3. $x \equiv x'$ et $y \equiv y'$ et $x \circ y$ défini implique $x \circ y \equiv x' \circ y'$.

On note $\mathcal{P}/_{\equiv}$ le quotient de $\mathcal{P}$ par $\equiv$.

Exemple

Per est le quotient de $\mathrm{FP}(\mathfrak{G})$, tel que $\mathfrak{G} := \mathfrak{G}(2,2) := \{\mathfrak{s}\}$, par la congruence $\equiv$ la plus fine vérifiant



Congruences rigides

Soit $\mathcal{P}$ un pro libre.

Une congruence rigide de $\mathcal{P}$ est une congruence $\equiv$ de $\mathcal{P}$ telle que, pour tous $x, y \in \mathcal{P}$,

1. si x est réduit, $[x]_{\equiv}$ est fini ;

Congruences rigides

Soit $\mathcal{P}$ un pro libre.

Une congruence rigide de $\mathcal{P}$ est une congruence $\equiv$ de $\mathcal{P}$ telle que, pour tous $x, y \in \mathcal{P}$,

1. si x est réduit, $[x]_{\equiv}$ est fini ;
2. si x est réduit, $[x]_{\equiv}$ ne contient que des réduits ;

Congruences rigides

Soit $\mathcal{P}$ un pro libre.

Une congruence rigide de $\mathcal{P}$ est une congruence $\equiv$ de $\mathcal{P}$ telle que, pour tous $x, y \in \mathcal{P}$,

1. si x est réduit, $[x]_{\equiv}$ est fini ;
2. si x est réduit, $[x]_{\equiv}$ ne contient que des réduits ;
3. si $x \equiv y$, on a $|\operatorname{dec}(x)| = |\operatorname{dec}(y)|$ et $\operatorname{dec}(x)_i \equiv \operatorname{dec}(y)_i$ pour tout i.

Congruences rigides

Soit $\mathcal{P}$ un pro libre.

Une congruence rigide de $\mathcal{P}$ est une congruence $\equiv$ de $\mathcal{P}$ telle que, pour tous $x, y \in \mathcal{P}$,

1. si x est réduit, $[x]_{\equiv}$ est fini ;
2. si x est réduit, $[x]_{\equiv}$ ne contient que des réduits ;
3. si $x \equiv y$, on a $|\operatorname{dec}(x)| = |\operatorname{dec}(y)|$ et $\operatorname{dec}(x)_i \equiv \operatorname{dec}(y)_i$ pour tout i.

Un pro rigide est un pro $\mathcal{Q}$ quotient d'un pro libre par une congruence rigide.

Congruences rigides

Soit $\mathcal{P}$ un pro libre.

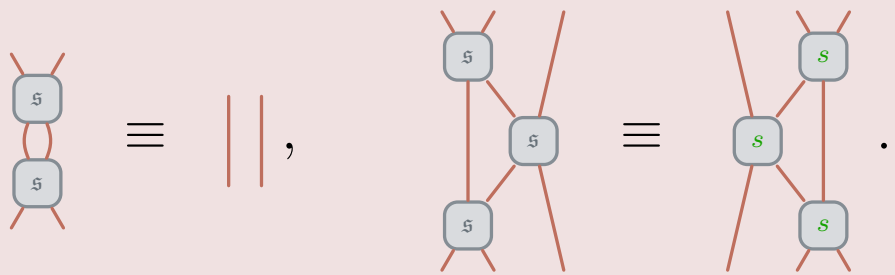
Une congruence rigide de $\mathcal{P}$ est une congruence $\equiv$ de $\mathcal{P}$ telle que, pour tous $x, y \in \mathcal{P}$,

1. si x est réduit, $[x]_{\equiv}$ est fini ;
2. si x est réduit, $[x]_{\equiv}$ ne contient que des réduits ;
3. si $x \equiv y$, on a $|\operatorname{dec}(x)| = |\operatorname{dec}(y)|$ et $\operatorname{dec}(x)_i \equiv \operatorname{dec}(y)_i$ pour tout i.

Un pro rigide est un pro $\mathcal{Q}$ quotient d'un pro libre par une congruence rigide.

Exemple

Per est le quotient de $\mathrm{FP}(\mathfrak{G})$, tel que $\mathfrak{G} := \mathfrak{G}(2,2) := \{\mathfrak{s}\}$, par la congruence $\equiv$ la plus fine vérifiant



Per n'est pas un PRO rigide puisque $\equiv$ ne vérifie pas 2.

La bigèbre naturelle d'un pro rigide

Soient $\mathcal{P}$ un pro libre et $\equiv$ une congruence rigide de $\mathcal{P}$.

La bigèbre naturelle d'un pro rigide

Soient $\mathcal{P}$ un pro libre et $\equiv$ une congruence rigide de $\mathcal{P}$.

Pour tout $x \in \mathrm{red}(\mathcal{P})$, soit

$$\mathbf{T}_{[x]_\equiv} := \sum_{y \in [x]_\equiv} \mathbf{S}_y.$$

La bigèbre naturelle d'un pro rigide

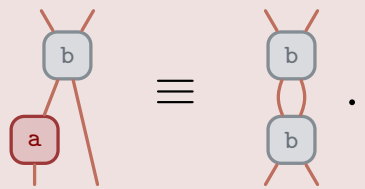
Soient $\mathcal{P}$ un pro libre et $\equiv$ une congruence rigide de $\mathcal{P}$.

Pour tout $x \in \mathrm{red}(\mathcal{P})$, soit

$$\mathbf{T}_{[x]_\equiv} := \sum_{y \in [x]_\equiv} \mathbf{S}_y.$$

Exemple

Soit $\mathcal{Q}$ le quotient du pro libre $\mathrm{FP}(\mathfrak{G})$, tel que $\mathfrak{G} := \mathfrak{G}(1,1) \sqcup \mathfrak{G}(2,2)$ avec $\mathfrak{G}(1,1) := \{\mathtt{a}\}$ et $\mathfrak{G}(2,2) := \{\mathtt{b}\}$, par la congruence $\equiv$ la plus fine vérifiant



.

La bigèbre naturelle d'un pro rigide

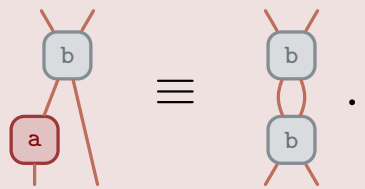
Soient $\mathcal{P}$ un pro libre et $\equiv$ une congruence rigide de $\mathcal{P}$.

Pour tout $x \in \mathrm{red}(\mathcal{P})$, soit

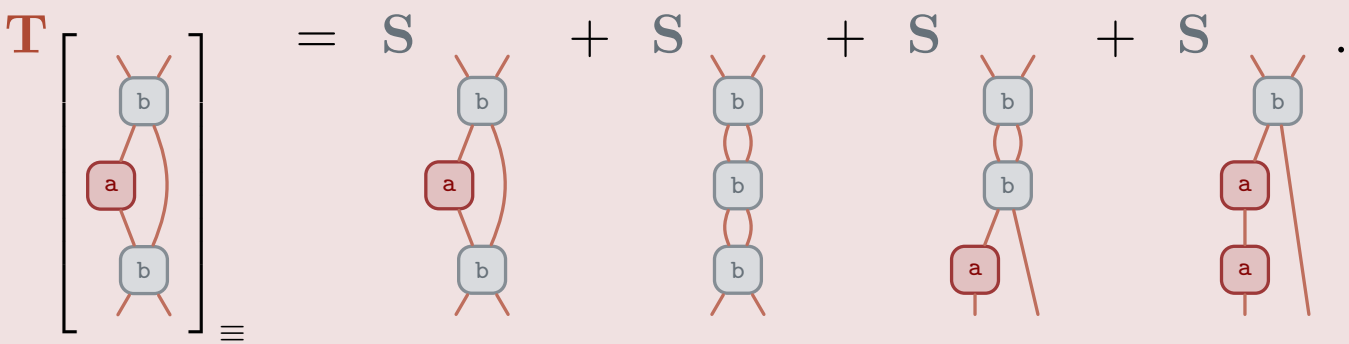
$$\mathbf{T}_{[x]_\equiv} := \sum_{y \in [x]_\equiv} \mathbf{S}_y.$$

Exemple

Soit $\mathcal{Q}$ le quotient du pro libre $\mathrm{FP}(\mathfrak{G})$, tel que $\mathfrak{G} := \mathfrak{G}(1,1) \sqcup \mathfrak{G}(2,2)$ avec $\mathfrak{G}(1,1) := \{\mathtt{a}\}$ et $\mathfrak{G}(2,2) := \{\mathtt{b}\}$, par la congruence $\equiv$ la plus fine vérifiant



Alors,



La bigèbre naturelle d'un pro rigide

Théorème

Soient $\mathcal{P}$ un pro libre et $\equiv$ une congruence rigide de $\mathcal{P}$. Alors, la famille

$$\left\{\mathbf{T}_{[x]_\equiv} : x \in \mathrm{red}(\mathcal{P})\right\}$$

engendre une sous-bigèbre de Hopf de $\mathsf{H}(\mathcal{P})$, notée $\mathsf{H}\left(\mathcal{P}/_\equiv\right)$.

La bigèbre naturelle d'un pro rigide

Théorème

Soient $\mathcal{P}$ un pro libre et $\equiv$ une congruence rigide de $\mathcal{P}$. Alors, la famille

$$\left\{\mathbf{T}_{[x]_\equiv} : x \in \mathrm{red}(\mathcal{P})\right\}$$

engendre une sous-bigèbre de Hopf de $\mathsf{H}(\mathcal{P})$, notée $\mathsf{H}\left(\mathcal{P}/_\equiv\right)$.

Premières propriétés :

- en tant qu'algèbre associative, $\mathsf{H}\left(\mathcal{P}/_\equiv\right)$ est librement engendrée par les $\mathbf{T}_{[x]_\equiv}$, où les $[x]_\equiv$ sont des classes de réduits et indécomposables ;

La bigèbre naturelle d'un pro rigide

Théorème

Soient $\mathcal{P}$ un pro libre et $\equiv$ une congruence rigide de $\mathcal{P}$. Alors, la famille

$$\left\{\mathbf{T}_{[x]_\equiv} : x \in \mathrm{red}(\mathcal{P})\right\}$$

engendre une sous-bigèbre de Hopf de $\mathsf{H}(\mathcal{P})$, notée $\mathsf{H}\left(\mathcal{P}/_\equiv\right)$.

Premières propriétés :

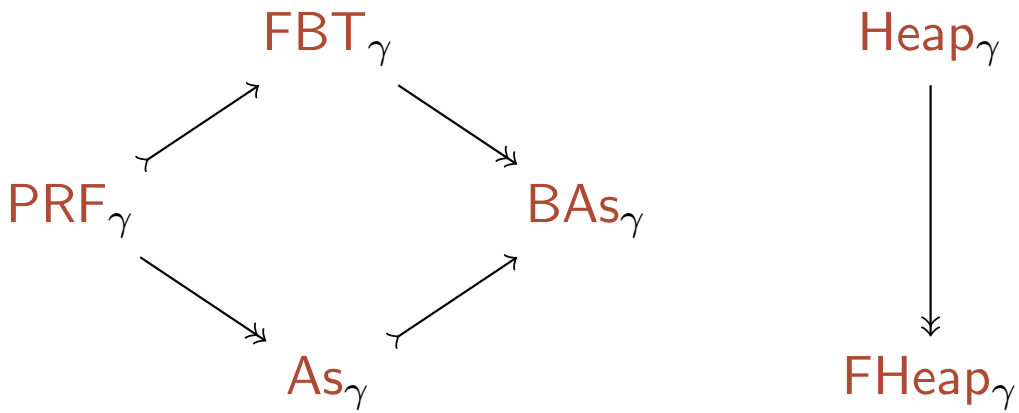
- en tant qu'algèbre associative, $\mathsf{H}\left(\mathcal{P}/_\equiv\right)$ est librement engendrée par les $\mathbf{T}_{[x]_\equiv}$, où les $[x]_\equiv$ sont des classes de réduits et indécomposables ;
- si $\mathsf{H}(\mathcal{P})$ est graduée et tous les réduits de $[x]_\equiv$ ont le même degré, $\mathsf{H}\left(\mathcal{P}/_\equiv\right)$ est graduée.

Plan

Exemples de constructions

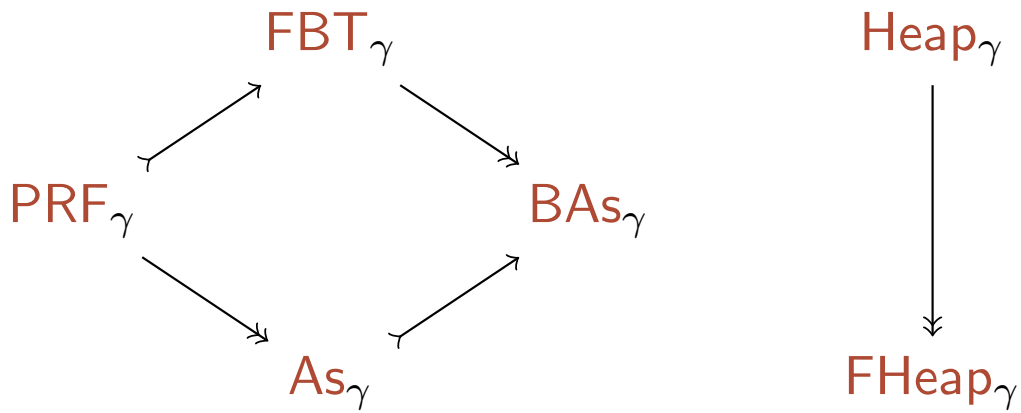
Un diagramme de bigèbres de Hopf

Pour tout $\gamma \in \mathbb{N}$, le diagramme de pros, où $\rightarrowtail$ (resp. $\twoheadrightarrow$) désigne un morphisme injectif (resp. surjectif),

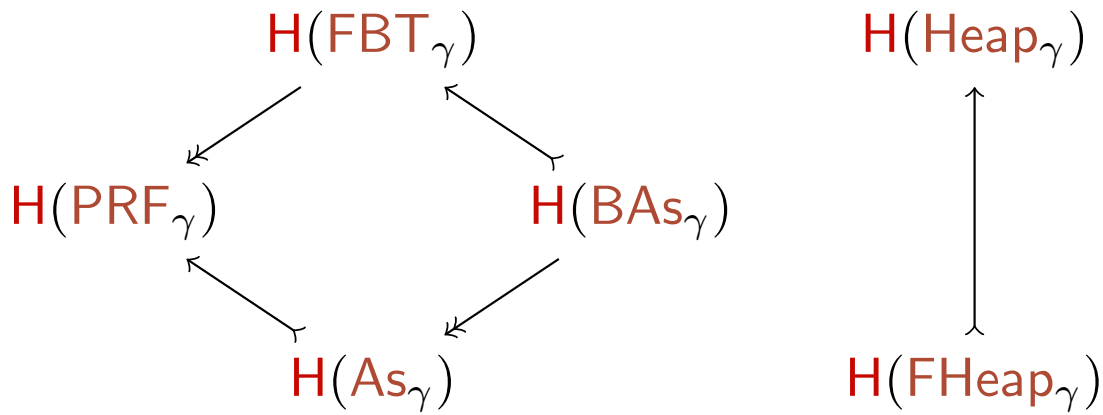


Un diagramme de bigèbres de Hopf

Pour tout $\gamma \in \mathbb{N}$, le diagramme de pros, où $\rightarrowtail$ (resp. $\twoheadrightarrow$) désigne un morphisme injectif (resp. surjectif),



donne lieu au diagramme



de bigèbres de Hopf.

Le pro des forêts planes

Soit PRF_γ le pro libre engendré par $\mathfrak{G} := \mathfrak{G}(\gamma + 1, 1) := \{\mathtt{a}\}$.

Le pro des forêts planes

Soit PRF_γ le pro libre engendré par $\mathfrak{G} := \mathfrak{G}(\gamma+1, 1) := \{\mathtt{a}\}$.

Les éléments de PRF_γ sont des forêts d'arbres dont les nœuds internes sont d'arité $\gamma + 1$.

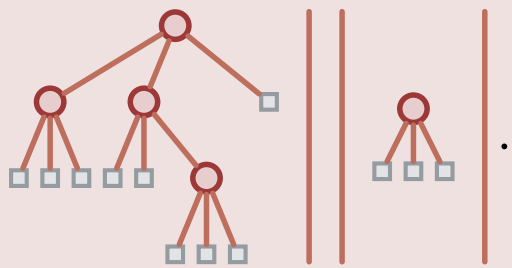
Le pro des forêts planes

Soit PRF_γ le pro libre engendré par $\mathfrak{G} := \mathfrak{G}(\gamma+1, 1) := \{\mathtt{a}\}$.

Les éléments de PRF_γ sont des forêts d'arbres dont les nœuds internes sont d'arité $\gamma + 1$.

Exemple

Un élément de PRF_2 :



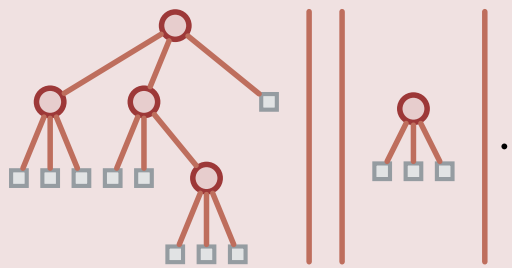
Le pro des forêts planes

Soit PRF_γ le pro libre engendré par $\mathfrak{G} := \mathfrak{G}(\gamma+1, 1) := \{\mathtt{a}\}$.

Les éléments de PRF_γ sont des forêts d'arbres dont les nœuds internes sont d'arité $\gamma + 1$.

Exemple

Un élément de PRF_2 :



Les réduits de PRF_γ sont les forêts sans arbre vide.

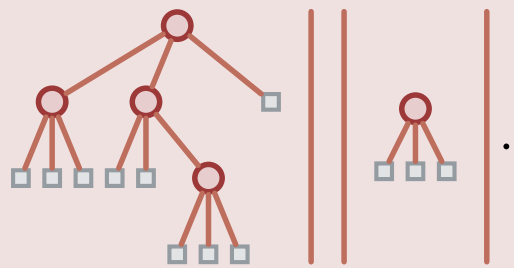
Le pro des forêts planes

Soit PRF_γ le pro libre engendré par $\mathfrak{G} := \mathfrak{G}(\gamma+1, 1) := \{\mathtt{a}\}$.

Les éléments de PRF_γ sont des forêts d'arbres dont les nœuds internes sont d'arité $\gamma + 1$.

Exemple

Un élément de PRF_2 :



Les réduits de PRF_γ sont les forêts sans arbre vide.

La graduation donnée par $w(\mathtt{a}) := 1$ implique que le degré d'une forêt est son nombre de nœuds internes.

La bigèbre de Hopf des forêts planes

Soit $\mathsf{H}(\mathsf{PRF}_\gamma)$ la bigèbre de Hopf des forêts planes.

La bigèbre de Hopf des forêts planes

Soit $\mathsf{H}(\mathsf{PRF}_\gamma)$ la bigèbre de Hopf des forêts planes.

Degré	Éléments de base de $\mathsf{H}(\mathsf{PRF}_1)$
0	$\mathbf{S}_\emptyset$
1	$\mathbf{S}$
2	$\mathbf{S}$, $\mathbf{S}$, $\mathbf{S}$

La bigèbre de Hopf des forêts planes

Soit $\mathsf{H}(\mathsf{PRF}_\gamma)$ la bigèbre de Hopf des forêts planes.

Degré	Éléments de base de $\mathsf{H}(\mathsf{PRF}_1)$
0	$\mathbf{S}_\emptyset$
1	$\mathbf{S}$
2	$\mathbf{S}$, $\mathbf{S}$, $\mathbf{S}$

Dimensions de $\mathsf{H}(\mathsf{PRF}_0)$: $1, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots$.

Dimensions de $\mathsf{H}(\mathsf{PRF}_1)$: $1, 1, 3, 10, 35, 126, 462, 1716, \ldots$.

Dimensions de $\mathsf{H}(\mathsf{PRF}_2)$: $1, 4, 19, 98, 531, 2974, 17060, 99658, \ldots$.

$\mathsf{H}(\mathsf{PRF}_0)$ est $\mathbf{Sym}$ dans la base des $\mathbf{S}$.

La bigèbre de Hopf des forêts planes

Soit $\mathsf{H}(\mathsf{PRF}_\gamma)$ la bigèbre de Hopf des forêts planes.

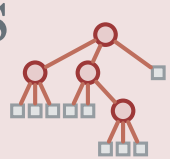
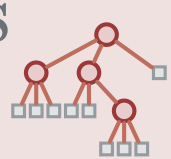
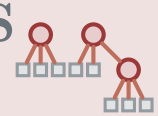
Degré	Éléments de base de $\mathsf{H}(\mathsf{PRF}_1)$
0	$\mathbf{S}_\emptyset$
1	$\mathbf{S}$
2	$\mathbf{S}$, $\mathbf{S}$, $\mathbf{S}$

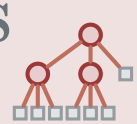
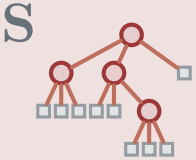
Dimensions de $\mathsf{H}(\mathsf{PRF}_0)$: $1, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots$.

Dimensions de $\mathsf{H}(\mathsf{PRF}_1)$: $1, 1, 3, 10, 35, 126, 462, 1716, \ldots$.

Dimensions de $\mathsf{H}(\mathsf{PRF}_2)$: $1, 4, 19, 98, 531, 2974, 17060, 99658, \ldots$.

Exemple

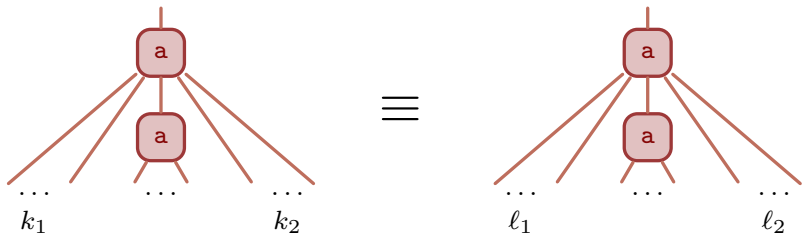
$\Delta\mathbf{S}$  $= \mathbf{S}_\emptyset \otimes \mathbf{S}$  $+ \mathbf{S}$ $\otimes \mathbf{S}$  $+ \mathbf{S}$ $\otimes \mathbf{S}$

$+ \mathbf{S}$ $\otimes \mathbf{S}$ $+ \mathbf{S}$  $\otimes \mathbf{S}$ $+ \mathbf{S}$ $\otimes \mathbf{S}$ $+ \mathbf{S}$  $\otimes \mathbf{S}_\emptyset$.

$\mathsf{H}(\mathsf{PRF}_0)$ est **Sym** dans la base des $\mathbf{S}$.

Le pro associatif

Soit As_γ le quotient de PRF_γ par la congruence $\equiv$ la plus fine vérifiant

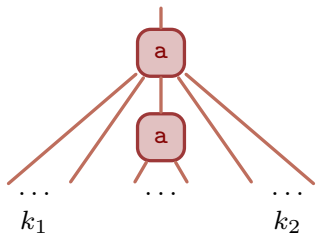


$$\equiv \quad , \qquad k_1 + k_2 = \gamma, \ell_1 + \ell_2 = \gamma.$$

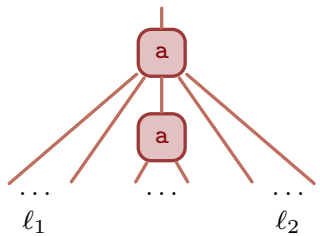
Ceci est une congruence rigide.

Le pro associatif

Soit As_γ le quotient de PRF_γ par la congruence $\equiv$ la plus fine vérifiant



$\equiv$



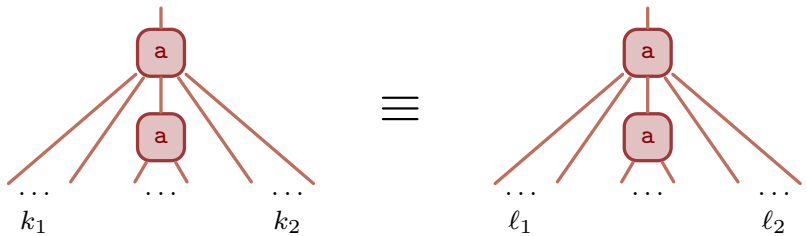
, $\qquad k_1 + k_2 = \gamma, \ell_1 + \ell_2 = \gamma.$

Ceci est une congruence rigide.

Les éléments x de As_γ sont codés par des mots $u_1 \dots u_\ell \in \mathbb{N}^*$ tels que u_i est le degré de la i^{e} composante connexe de x.

Le pro associatif

Soit As_γ le quotient de PRF_γ par la congruence $\equiv$ la plus fine vérifiant



$$, \qquad k_1 + k_2 = \gamma, \ell_1 + \ell_2 = \gamma.$$

Ceci est une congruence rigide.

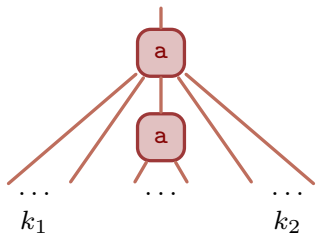
Les éléments x de As_γ sont codés par des mots $u_1 \dots u_\ell \in \mathbb{N}^*$ tels que u_i est le degré de la i^{e} composante connexe de x.

Exemple

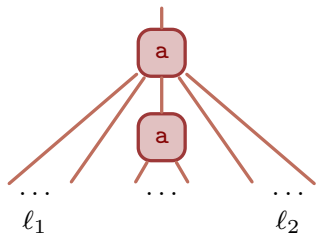
Le mot 30020 est un élément de As_2. Son arité entrante est 15 et son arité sortante est 5.

Le pro associatif

Soit As_γ le quotient de PRF_γ par la congruence $\equiv$ la plus fine vérifiant



$\equiv$



, $\qquad k_1 + k_2 = \gamma, \ell_1 + \ell_2 = \gamma.$

Ceci est une congruence rigide.

Les éléments x de As_γ sont codés par des mots $u_1 \dots u_\ell \in \mathbb{N}^*$ tels que u_i est le degré de la i^{e} composante connexe de x.

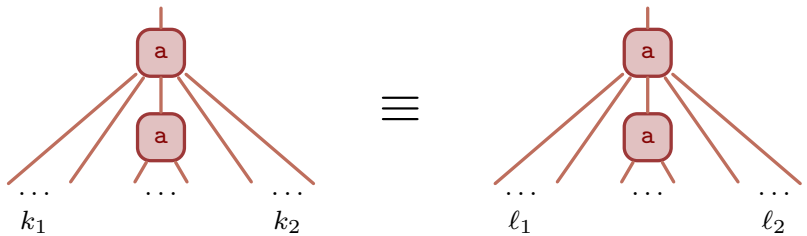
Exemple

Le mot 30020 est un élément de As_2. Son arité entrante est 15 et son arité sortante est 5.

Les réduits de As_γ sont les mots sans 0.

Le pro associatif

Soit As_γ le quotient de PRF_γ par la congruence $\equiv$ la plus fine vérifiant



$$, \qquad k_1 + k_2 = \gamma, \ell_1 + \ell_2 = \gamma.$$

Ceci est une congruence rigide.

Les éléments x de As_γ sont codés par des mots $u_1 \dots u_\ell \in \mathbb{N}^*$ tels que u_i est le degré de la i^{e} composante connexe de x.

Exemple

Le mot 30020 est un élément de As_2. Son arité entrante est 15 et son arité sortante est 5.

Les réduits de As_γ sont les mots sans 0.

La graduation donnée par $w(\mathsf{a}) := 1$ implique que le degré d'un mot est la somme de ses lettres.

La bigèbre de Hopf des mots d'entiers

Soit $\mathsf{H}(\mathsf{As}_\gamma)$ la bigèbre de Hopf des mots d'entiers.

La bigèbre de Hopf des mots d'entiers

Soit $\mathsf{H}(\mathsf{As}_\gamma)$ la bigèbre de Hopf des mots d'entiers.

Degré	Éléments de base de $\mathsf{H}(\mathsf{As}_\gamma)$ (pour γ quelconque)
0	$\mathbf{T}_\epsilon$
1	$\mathbf{T}_1$
2	$\mathbf{T}_{11}, \mathbf{T}_2$
3	$\mathbf{T}_{111}, \mathbf{T}_{12}, \mathbf{T}_{21}, \mathbf{T}_3$

La bigèbre de Hopf des mots d'entiers

Soit $\mathsf{H}(\mathsf{As}_\gamma)$ la bigèbre de Hopf des mots d'entiers.

Degré	Éléments de base de $\mathsf{H}(\mathsf{As}_\gamma)$ (pour γ quelconque)
0	$\mathbf{T}_\epsilon$
1	$\mathbf{T}_1$
2	$\mathbf{T}_{11}, \mathbf{T}_2$
3	$\mathbf{T}_{111}, \mathbf{T}_{12}, \mathbf{T}_{21}, \mathbf{T}_3$

Dimensions de $\mathsf{H}(\mathsf{As}_\gamma)$: $1, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots$.

La bigèbre de Hopf des mots d'entiers

Soit $\mathsf{H}(\mathsf{As}_\gamma)$ la bigèbre de Hopf des mots d'entiers.

Degré	Éléments de base de $\mathsf{H}(\mathsf{As}_\gamma)$ (pour γ quelconque)
0	$\mathbf{T}_\epsilon$
1	$\mathbf{T}_1$
2	$\mathbf{T}_{11}, \mathbf{T}_2$
3	$\mathbf{T}_{111}, \mathbf{T}_{12}, \mathbf{T}_{21}, \mathbf{T}_3$

Dimensions de $\mathsf{H}(\mathsf{As}_\gamma)$: $1, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots$.

En tant qu'algèbres associatives, $\mathsf{H}(\mathsf{As}_\gamma) \simeq \mathsf{H}(\mathsf{As}_{\gamma'})$ pour tous $\gamma, \gamma' \in \mathbb{N}$.

La bigèbre de Hopf des mots d'entiers

Soit $\mathsf{H}(\mathsf{As}_\gamma)$ la bigèbre de Hopf des mots d'entiers.

Degré	Éléments de base de $\mathsf{H}(\mathsf{As}_\gamma)$ (pour γ quelconque)
0	$\mathbf{T}_\epsilon$
1	$\mathbf{T}_1$
2	$\mathbf{T}_{11}, \mathbf{T}_2$
3	$\mathbf{T}_{111}, \mathbf{T}_{12}, \mathbf{T}_{21}, \mathbf{T}_3$

Dimensions de $\mathsf{H}(\mathsf{As}_\gamma)$: $1, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots$.

En tant qu'algèbres associatives, $\mathsf{H}(\mathsf{As}_\gamma) \simeq \mathsf{H}(\mathsf{As}_{\gamma'})$ pour tous $\gamma, \gamma' \in \mathbb{N}$.

$\mathsf{H}(\mathsf{As}_\gamma)$ est isomorphe à $\mathbf{FdB}_\gamma$ [**Foissy**, 2008].

La bigèbre de Hopf des mots d'entiers

Soit $\mathsf{H}(\mathsf{As}_\gamma)$ la bigèbre de Hopf des mots d'entiers.

Degré	Éléments de base de $\mathsf{H}(\mathsf{As}_\gamma)$ (pour γ quelconque)
0	$\mathbf{T}_\epsilon$
1	$\mathbf{T}_1$
2	$\mathbf{T}_{11}, \mathbf{T}_2$
3	$\mathbf{T}_{111}, \mathbf{T}_{12}, \mathbf{T}_{21}, \mathbf{T}_3$

Dimensions de $\mathsf{H}(\mathsf{As}_\gamma)$: $1, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots$.

En tant qu'algèbres associatives, $\mathsf{H}(\mathsf{As}_\gamma) \simeq \mathsf{H}(\mathsf{As}_{\gamma'})$ pour tous $\gamma, \gamma' \in \mathbb{N}$.

$\mathsf{H}(\mathsf{As}_\gamma)$ est isomorphe à $\mathbf{FdB}_\gamma$ [**Foissy**, 2008].

Le coproduit dépend de γ :

Exemple

Dans $\mathsf{H}(\mathsf{As}_1)$:

$$\Delta(\mathbf{T}_3) = \mathbf{T}_\epsilon \otimes \mathbf{T}_3 + 2\,\mathbf{T}_1 \otimes \mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_1 \otimes \mathbf{T}_{11} + 3\,\mathbf{T}_2 \otimes \mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_3 \otimes \mathbf{T}_\epsilon,$$

Dans $\mathsf{H}(\mathsf{As}_2)$:

$$\Delta(\mathbf{T}_3) = \mathbf{T}_\epsilon \otimes \mathbf{T}_3 + 3\,\mathbf{T}_1 \otimes \mathbf{T}_2 + 3\,\mathbf{T}_1 \otimes \mathbf{T}_{11} + 5\,\mathbf{T}_2 \otimes \mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_3 \otimes \mathbf{T}_\epsilon.$$

Le pro des biforêts planes

Soit FBT_γ le pro libre engendré par $\mathfrak{G} := \mathfrak{G}(\gamma+1,1) \sqcup \mathfrak{G}(1,\gamma+1)$ où $\mathfrak{G}(\gamma+1,1) := \{\mathtt{a}\}$ et $\mathfrak{G}(1,\gamma+1) := \{\mathtt{b}\}$.

Le pro des biforêts planes

Soit FBT_γ le pro libre engendré par $\mathfrak{G} := \mathfrak{G}(\gamma+1,1) \sqcup \mathfrak{G}(1,\gamma+1)$ où $\mathfrak{G}(\gamma+1,1) := \{\mathtt{a}\}$ et $\mathfrak{G}(1,\gamma+1) := \{\mathtt{b}\}$.

Les éléments de FBT_γ sont des biforêts dont les nœuds internes sont d'arité $\gamma+1$.

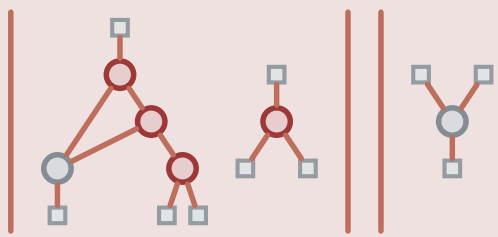
Le pro des biforêts planes

Soit FBT_γ le pro libre engendré par $\mathfrak{G} := \mathfrak{G}(\gamma+1,1) \sqcup \mathfrak{G}(1,\gamma+1)$ où $\mathfrak{G}(\gamma+1,1) := \{\mathtt{a}\}$ et $\mathfrak{G}(1,\gamma+1) := \{\mathtt{b}\}$.

Les éléments de FBT_γ sont des biforêts dont les nœuds internes sont d'arité $\gamma+1$.

Exemple

Un élément de FBT_1 :



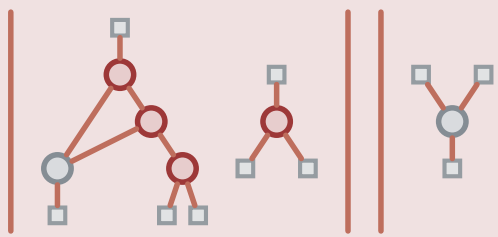
Le pro des biforêts planes

Soit FBT_γ le pro libre engendré par $\mathfrak{G} := \mathfrak{G}(\gamma+1,1) \sqcup \mathfrak{G}(1,\gamma+1)$ où $\mathfrak{G}(\gamma+1,1) := \{\mathtt{a}\}$ et $\mathfrak{G}(1,\gamma+1) := \{\mathtt{b}\}$.

Les éléments de FBT_γ sont des biforêts dont les nœuds internes sont d'arité $\gamma+1$.

Exemple

Un élément de FBT_1 :



Les réduits de FBT_γ sont les biforêts sans arbre vide.

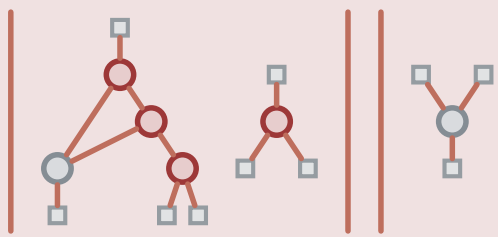
Le pro des biforêts planes

Soit FBT_γ le pro libre engendré par $\mathfrak{G} := \mathfrak{G}(\gamma+1,1) \sqcup \mathfrak{G}(1,\gamma+1)$ où $\mathfrak{G}(\gamma+1,1) := \{\mathtt{a}\}$ et $\mathfrak{G}(1,\gamma+1) := \{\mathtt{b}\}$.

Les éléments de FBT_γ sont des biforêts dont les nœuds internes sont d'arité $\gamma+1$.

Exemple

Un élément de FBT_1 :



Les réduits de FBT_γ sont les biforêts sans arbre vide.

La graduation donnée par $w(\mathtt{a}) := w(\mathtt{b}) := 1$ implique que le degré d'une biforêt est son nombre de nœuds internes.

La bigèbre de Hopf des biforêts planes

Soit $\mathsf{H}(\mathsf{FBT}_\gamma)$ la bigèbre de Hopf des biforêts planes.

La bigèbre de Hopf des biforêts planes

Soit $\mathsf{H}(\mathsf{FBT}_\gamma)$ la bigèbre de Hopf des biforêts planes.

Exemple

Dans $\mathsf{H}(\mathsf{FBT}_1)$,

$$\Delta \mathbf{S}\left(\begin{array}{c}\bullet\\ \bullet\\ \bullet\quad\bullet\end{array}\right) = \mathbf{S}_\emptyset \otimes \mathbf{S}\left(\begin{array}{c}\bullet\\ \bullet\\ \bullet\quad\bullet\end{array}\right) + \mathbf{S}\left(\begin{array}{c}\bullet\\ \bullet\end{array}\right) \otimes \mathbf{S}\left(\begin{array}{c}\bullet\\ \bullet\\ \bullet\quad\bullet\end{array}\right) + \mathbf{S}\left(\begin{array}{c}\bullet\\ \bullet\\ \bullet\quad\bullet\end{array}\right) \otimes \mathbf{S}\left(\begin{array}{c}\bullet\\ \bullet\quad\bullet\end{array}\right)$$
$$+ \mathbf{S}\left(\begin{array}{c}\bullet\\ \bullet\\ \bullet\quad\bullet\end{array}\right) \otimes \mathbf{S}\left(\begin{array}{c}\bullet\\ \bullet\end{array}\right) + \mathbf{S}\left(\begin{array}{c}\bullet\\ \bullet\\ \bullet\quad\bullet\end{array}\right) \otimes \mathbf{S}\left(\begin{array}{c}\bullet\quad\bullet\\ \bullet\end{array}\right) + \mathbf{S}\left(\begin{array}{c}\bullet\\ \bullet\\ \bullet\quad\bullet\end{array}\right) \otimes \mathbf{S}_\emptyset .$$

Le pro des empilements

Soit Heap_γ le pro libre engendré par $\mathfrak{G} := \mathfrak{G}(\gamma+1, \gamma+1) := \{\mathtt{a}\}$.

Le pro des empilements

Soit Heap_γ le pro libre engendré par $\mathfrak{G} := \mathfrak{G}(\gamma+1, \gamma+1) := \{\mathtt{a}\}$.

Les éléments de Heap_γ sont des empilements de pièces de largeur $\gamma + 1$.

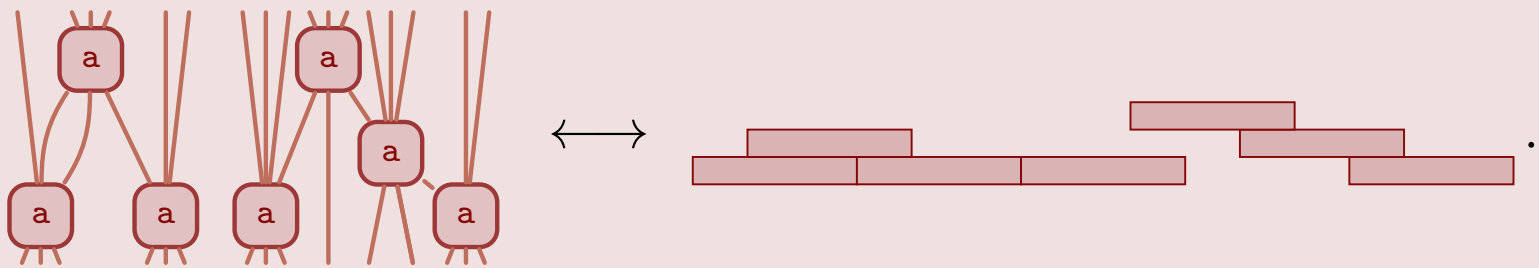
Le pro des empilements

Soit Heap_γ le pro libre engendré par $\mathfrak{G} := \mathfrak{G}(\gamma+1, \gamma+1) := \{\mathtt{a}\}$.

Les éléments de Heap_γ sont des empilements de pièces de largeur $\gamma+1$.

Exemple

Un élément de Heap_2 :



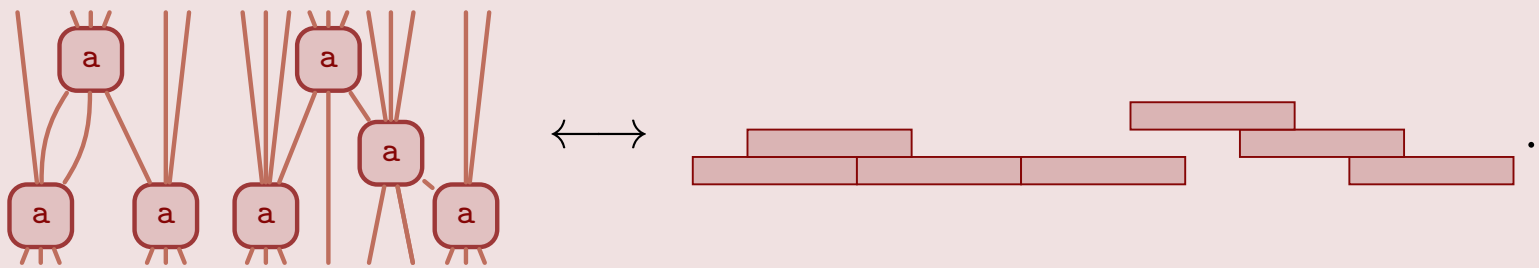
Le pro des empilements

Soit Heap_γ le pro libre engendré par $\mathfrak{G} := \mathfrak{G}(\gamma+1, \gamma+1) := \{\mathtt{a}\}$.

Les éléments de Heap_γ sont des empilements de pièces de largeur $\gamma + 1$.

Exemple

Un élément de Heap_2 :



Les réduits de Heap_γ sont les empilements sans fils.

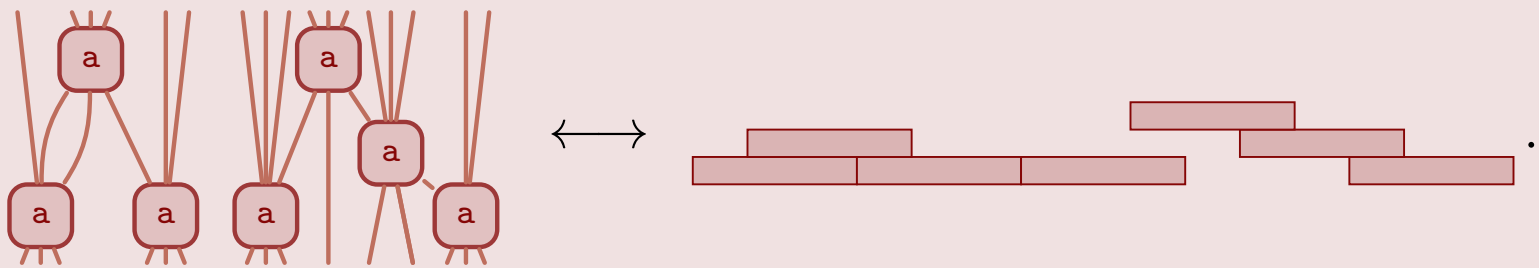
Le pro des empilements

Soit Heap_γ le pro libre engendré par $\mathfrak{G} := \mathfrak{G}(\gamma+1, \gamma+1) := \{\mathtt{a}\}$.

Les éléments de Heap_γ sont des empilements de pièces de largeur $\gamma + 1$.

Exemple

Un élément de Heap_2 :



Les réduits de Heap_γ sont les empilements sans fils.

La graduation donnée par $w(\mathtt{a}) := 1$ implique que le degré d'un empilement est son nombre de boîtes.

La bigèbre de Hopf des empilements

Soit $\mathsf{H}(\mathsf{Heap}_\gamma)$ la bigèbre de Hopf des empilements.

La bigèbre de Hopf des empilements

Soit $\mathsf{H}(\mathsf{Heap}_\gamma)$ la bigèbre de Hopf des empilements.

Proposition

La série de Hilbert $C_\gamma(t)$ de $\mathsf{H}(\mathsf{Heap}_\gamma)$ vérifie $C_\gamma(t) = \sum_{n \geqslant 0} C_{\gamma,n}(t)$, où

$$C_{\gamma,n}(t) := P_{\gamma,n}(t) - \sum_{k=0}^{n-1} C_{\gamma,k}(t) P_{\gamma,n-k-1}(t), \qquad P_{\gamma,n}(t) := \frac{1}{F_{\gamma,n}(t)},$$

et

$$F_{\gamma,n}(t) := \begin{cases} 1 & \text{si } n \leqslant \gamma, \\ F_{\gamma,n-1}(t) - t F_{\gamma,n-\gamma-1}(t) & \text{sinon.} \end{cases}$$

La bigèbre de Hopf des empilements

Soit $\mathsf{H}(\mathsf{Heap}_\gamma)$ la bigèbre de Hopf des empilements.

Proposition

La série de Hilbert $C_\gamma(t)$ de $\mathsf{H}(\mathsf{Heap}_\gamma)$ vérifie $C_\gamma(t) = \sum_{n \geqslant 0} C_{\gamma,n}(t)$, où

$$C_{\gamma,n}(t) := P_{\gamma,n}(t) - \sum_{k=0}^{n-1} C_{\gamma,k}(t) P_{\gamma,n-k-1}(t), \qquad P_{\gamma,n}(t) := \frac{1}{F_{\gamma,n}(t)},$$

et

$$F_{\gamma,n}(t) := \begin{cases} 1 & \text{si } n \leqslant \gamma, \\ F_{\gamma,n-1}(t) - t F_{\gamma,n-\gamma-1}(t) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dimensions de $\mathsf{H}(\mathsf{Heap}_1)$: $1, 1, 4, 18, 85, 411, 2014, 9950, \ldots$.

Dimensions de $\mathsf{H}(\mathsf{Heap}_2)$: $1, 1, 6, 42, 313, 2407, 18848, 149271, \ldots$.

La bigèbre de Hopf des empilements

Soit $\mathsf{H}(\mathsf{Heap}_\gamma)$ la bigèbre de Hopf des empilements.

Proposition

La série de Hilbert $C_\gamma(t)$ de $\mathsf{H}(\mathsf{Heap}_\gamma)$ vérifie $C_\gamma(t) = \sum_{n \geqslant 0} C_{\gamma,n}(t)$, où

$$C_{\gamma,n}(t) := P_{\gamma,n}(t) - \sum_{k=0}^{n-1} C_{\gamma,k}(t) P_{\gamma,n-k-1}(t), \qquad P_{\gamma,n}(t) := \frac{1}{F_{\gamma,n}(t)},$$

et

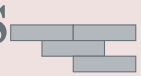
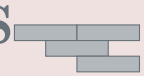
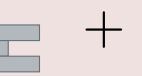
$$F_{\gamma,n}(t) := \begin{cases} 1 & \text{si } n \leqslant \gamma, \\ F_{\gamma,n-1}(t) - t F_{\gamma,n-\gamma-1}(t) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dimensions de $\mathsf{H}(\mathsf{Heap}_1)$: $1, 1, 4, 18, 85, 411, 2014, 9950, \ldots$.

Dimensions de $\mathsf{H}(\mathsf{Heap}_2)$: $1, 1, 6, 42, 313, 2407, 18848, 149271, \ldots$.

Exemple

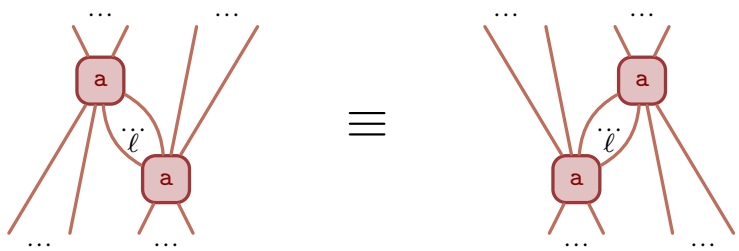
Dans $\mathsf{H}(\mathsf{Heap}_1)$,

$\Delta \mathrm{S}$  $= \mathrm{S}_\emptyset \otimes \mathrm{S}$  $+ \mathrm{S}$ $\otimes \mathrm{S}$  $+ \mathrm{S}$ $\otimes \mathrm{S}$

$+ \mathrm{S}$ $\otimes \mathrm{S}$ $+ \mathrm{S}$ $\otimes \mathrm{S}_\emptyset$.

Le pro des empilements friables

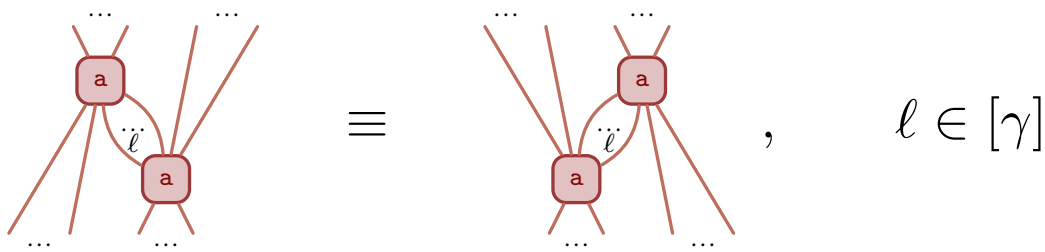
Soit FHeap_γ le quotient de Heap_γ par la congruence $\equiv$ la plus fine vérifiant



$$\ell \in [\gamma].$$

Le pro des empilements friables

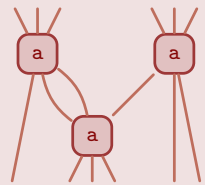
Soit FHeap_γ le quotient de Heap_γ par la congruence $\equiv$ la plus fine vérifiant



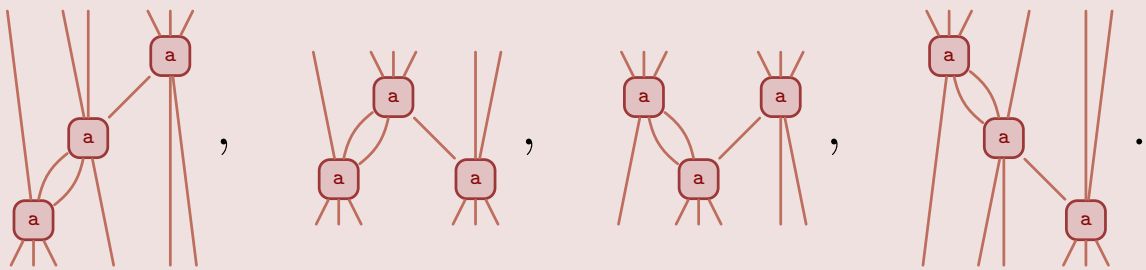
$$\ell \in [\gamma].$$

Exemple

Dans FHeap_2, la classe d'équivalence de



contient exactement



Le pro des empilements friables

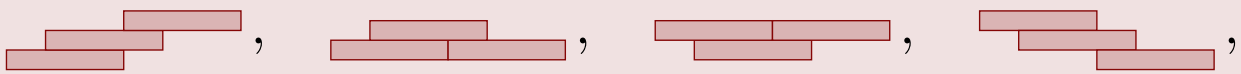
Les éléments de FHeap_γ sont des empilements friables de pièces de largeur $\gamma + 1$.

Le pro des empilements friables

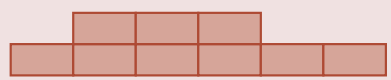
Les éléments de FHeap_γ sont des empilements friables de pièces de largeur $\gamma + 1$.

Exemple

La classe d'équivalence d'empilements précédente



est représentée par l'empilement de pièces friables

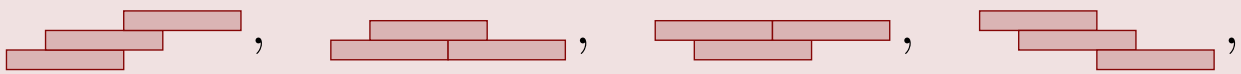


Le pro des empilements friables

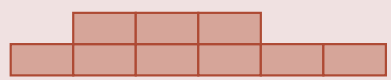
Les éléments de FHeap_γ sont des empilements friables de pièces de largeur $\gamma + 1$.

Exemple

La classe d'équivalence d'empilements précédente



est représentée par l'empilement de pièces friables



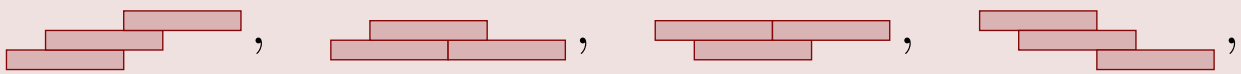
Les réduits de FHeap_γ sont les empilements friables sans fils.

Le pro des empilements friables

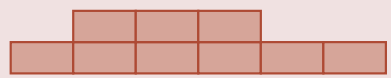
Les éléments de FHeap_γ sont des empilements friables de pièces de largeur $\gamma + 1$.

Exemple

La classe d'équivalence d'empilements précédente



est représentée par l'empilement de pièces friables



Les réduits de FHeap_γ sont les empilements friables sans fils.

La graduation donnée par $w(\mathsf{a}) := 1$ implique que le degré d'un empilement friable est $\frac{k}{\gamma+1}$ où k est le nombre de ses pièces friables.

La bigèbre de Hopf des empilements friables

Soit $\mathsf{H}(\mathsf{FHeap}_\gamma)$ la bigèbre de Hopf des empilements friables.

La bigèbre de Hopf des empilements friables

Soit $\mathsf{H}(\mathsf{FHeap}_\gamma)$ la bigèbre de Hopf des empilements friables.

Proposition

Pour tout $n \geqslant 1$, $\dim \mathsf{H}(\mathsf{FHeap}_\gamma)_n = (\gamma+2)^{n-1}$.

La bigèbre de Hopf des empilements friables

Soit $\mathsf{H}(\mathsf{FHeap}_\gamma)$ la bigèbre de Hopf des empilements friables.

Proposition

Pour tout $n \geqslant 1$, $\dim \mathsf{H}(\mathsf{FHeap}_\gamma)_n = (\gamma+2)^{n-1}$.

Exemple

Dans $\mathsf{H}(\mathsf{FHeap}_1)$,

$$\mathbf{T}_{\blacksquare\blacksquare\blacksquare\blacksquare} = \mathbf{S}_{\blacksquare\blacksquare\blacksquare} + \mathbf{S}_{\blacksquare\blacksquare\blacksquare} + \mathbf{S}_{\blacksquare\blacksquare\blacksquare},$$

La bigèbre de Hopf des empilements friables

Soit $\mathsf{H}(\mathsf{FHeap}_\gamma)$ la bigèbre de Hopf des empilements friables.

Proposition

Pour tout $n \geqslant 1$, $\dim \mathsf{H}(\mathsf{FHeap}_\gamma)_n = (\gamma+2)^{n-1}$.

Exemple

Dans $\mathsf{H}(\mathsf{FHeap}_1)$,