Arbres binaires de recherche : algorithmique et algèbre

Samuele Giraudo

Université de Marne-la-Vallée
École doctorale MSTIC

10 juin 2010

Concepts de base

- Algorithmique

- Algèbre

Concepts de base

- Algorithmique : science de la définition, de la conception et de l'analyse des algorithmes.
  $\rightsquigarrow$ Algorithme : liste finie d'instructions qui permet la résolution d'un problème donné.

- Algèbre

Concepts de base

- Algorithmique : science de la définition, de la conception et de l'analyse des algorithmes.
  $\rightsquigarrow$ Algorithme : liste finie d'instructions qui permet la résolution d'un problème donné.

- Algèbre : branche des mathématiques qui porte sur l'étude des structures algébriques.
  $\rightsquigarrow$ Structure algébrique : ensemble muni de lois de composition.

Buts de l'exposé

- Introduire les arbres binaires.

Buts de l'exposé

- Introduire les arbres binaires.
- Présenter quelques algorithmes basés sur les arbres binaires de recherche.

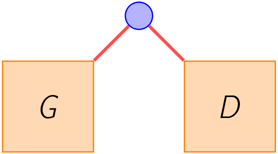
Buts de l'exposé

- Introduire les arbres binaires.
- Présenter quelques algorithmes basés sur les arbres binaires de recherche.
- Glisser vers le coté algébrique des arbres binaires.

Arbres binaires

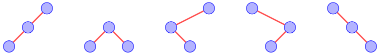
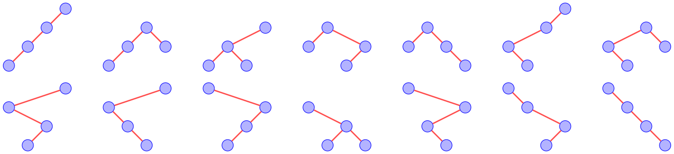
Un arbre binaire est

- soit l'arbre vide $\emptyset$;
- soit un nœud  attaché par des arêtes  à deux autres arbres binaires :



où G (resp. D) est le sous-arbre gauche (resp. droit) de l'arbre binaire.

Quelques arbres binaires

Taille	Arbres binaires
0	$\emptyset$
1	
2	
3	
4	

Un problème d'algorithmique

Soit E un ensemble. On souhaite répondre aux problèmes suivants.

Un problème d'algorithmique

Soit E un ensemble. On souhaite répondre aux problèmes suivants.

- Appartenance : étant donné un élément x, a-t-on $x \in E$?

Un problème d'algorithmique

Soit E un ensemble. On souhaite répondre aux problèmes suivants.

- Appartenance : étant donné un élément x, a-t-on $x \in E$?
- Minimum (resp. maximum) : calcul de $\min E$ (resp. $\max E$).

Un problème d'algorithmique

Soit E un ensemble. On souhaite répondre aux problèmes suivants.

- Appartenance : étant donné un élément x, a-t-on $x \in E$?
- Minimum (resp. maximum) : calcul de $\min E$ (resp. $\max E$).
- Ajout : placer un élément x dans E.

Un problème d'algorithmique

Soit E un ensemble. On souhaite répondre aux problèmes suivants.

- Appartenance : étant donné un élément x, a-t-on $x \in E$?
- Minimum (resp. maximum) : calcul de $\min E$ (resp. $\max E$).
- Ajout : placer un élément x dans E.
- Suppression : supprimer un élément x de E.

Un problème d'algorithmique

Soit E un ensemble. On souhaite répondre aux problèmes suivants.

- Appartenance : étant donné un élément x, a-t-on $x \in E$?
- Minimum (resp. maximum) : calcul de $\min E$ (resp. $\max E$).
- Ajout : placer un élément x dans E.
- Suppression : supprimer un élément x de E.

Unique hypothèse : il est possible de comparer toute paire d'éléments de E.

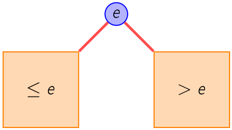
Une réponse algorithmique : les ABR

Les arbres binaires de recherche (ABR) sont d'excellents objets pour répondre à ces problèmes !

Une réponse algorithmique : les ABR

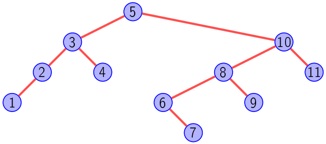
Les arbres binaires de recherche (ABR) sont d'excellents objets pour répondre à ces problèmes !

ABR : arbre binaire dont les nœuds sont étiquetés par les éléments de E avec la contrainte :

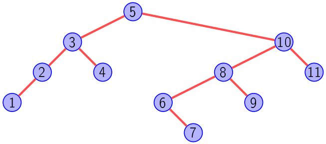


Pour tout nœud e, les éléments de son sous-arbre gauche (resp. droit) sont tous $\leq e$ (resp. $> e$).

Exemples d'ABR

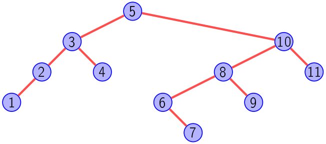


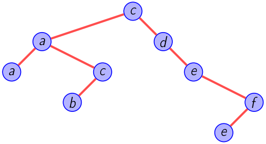
Exemples d'ABR



correct

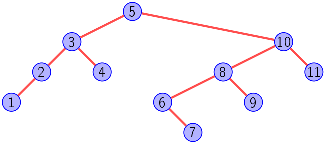
Exemples d'ABR



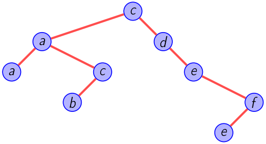


correct

Exemples d'ABR

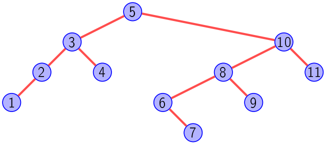


correct

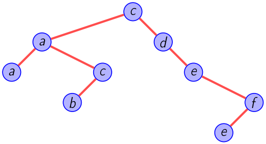


correct

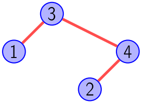
Exemples d'ABR



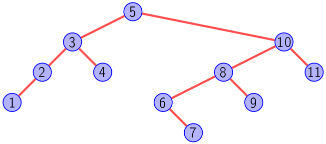
correct



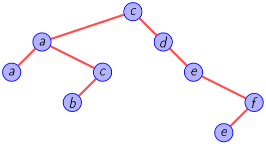
correct



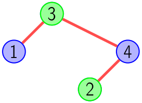
Exemples d'ABR



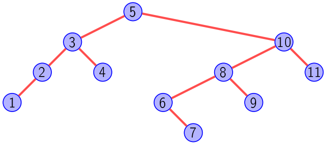
correct



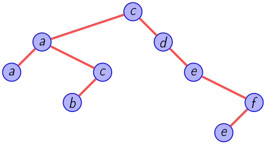
correct



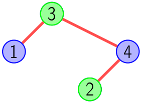
Exemples d'ABR



correct

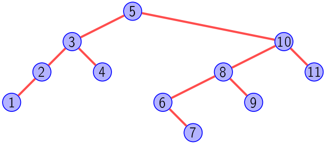


correct

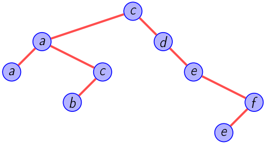


non correct

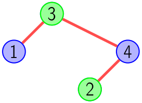
Exemples d'ABR



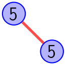
correct



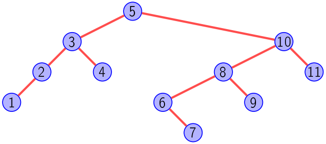
correct



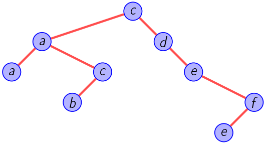
non correct



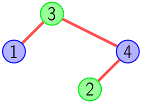
Exemples d'ABR



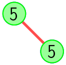
correct



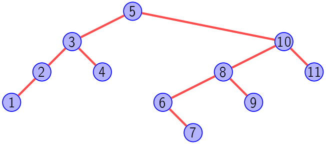
correct



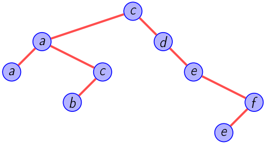
non correct



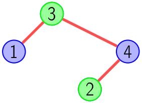
Exemples d'ABR



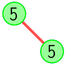
correct



correct



non correct



non correct

Insertion dans un ABR

Soit $\sigma = 271849365$ une permutation qui encode les éléments de l'ensemble à représenter.

Insertion dans un ABR

Soit $\sigma = 271849365$ une permutation qui encode les éléments de l'ensemble à représenter.
$\rightsquigarrow$ On construit l'ABR de σ en insérant ses éléments de droite à gauche :

Insertion dans un ABR

Soit $\sigma = 27184936\textcolor{red}{5}$ une permutation qui encode les éléments de l'ensemble à représenter.
$\rightsquigarrow$ On construit l'ABR de σ en insérant ses éléments de droite à gauche :

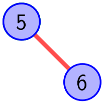
Insertion dans un ABR

Soit $\sigma = 2718493{\color{red}6}{\color{gray}5}$ une permutation qui encode les éléments de l'ensemble à représenter.

$\rightsquigarrow$ On construit l'ABR de σ en insérant ses éléments de droite à gauche :

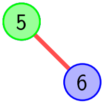
Insertion dans un ABR

Soit $\sigma = 2718493\textcolor{gray}{65}$ une permutation qui encode les éléments de l'ensemble à représenter.
$\rightsquigarrow$ On construit l'ABR de σ en insérant ses éléments de droite à gauche :



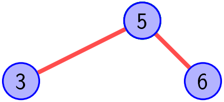
Insertion dans un ABR

Soit $\sigma = 271849365$ une permutation qui encode les éléments de l'ensemble à représenter.
$\rightsquigarrow$ On construit l'ABR de σ en insérant ses éléments de droite à gauche :



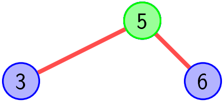
Insertion dans un ABR

Soit $\sigma = 271849365$ une permutation qui encode les éléments de l'ensemble à représenter.
$\rightsquigarrow$ On construit l'ABR de σ en insérant ses éléments de droite à gauche :



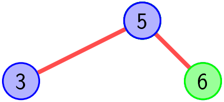
Insertion dans un ABR

Soit $\sigma = 271849365$ une permutation qui encode les éléments de l'ensemble à représenter.
$\rightsquigarrow$ On construit l'ABR de σ en insérant ses éléments de droite à gauche :



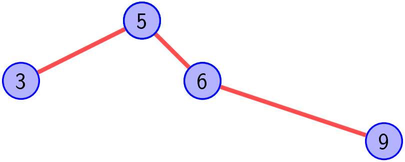
Insertion dans un ABR

Soit $\sigma = 271849365$ une permutation qui encode les éléments de l'ensemble à représenter.
$\rightsquigarrow$ On construit l'ABR de σ en insérant ses éléments de droite à gauche :



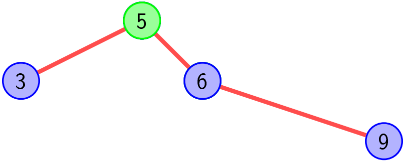
Insertion dans un ABR

Soit $\sigma = 2718493365$ une permutation qui encode les éléments de l'ensemble à représenter.
$\rightsquigarrow$ On construit l'ABR de σ en insérant ses éléments de droite à gauche :



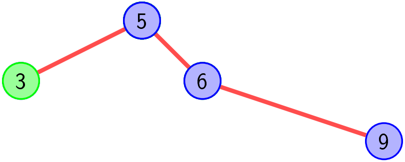
Insertion dans un ABR

Soit $\sigma = 2718{\color{red}4}{\color{gray}9365}$ une permutation qui encode les éléments de l'ensemble à représenter.
$\rightsquigarrow$ On construit l'ABR de σ en insérant ses éléments de droite à gauche :



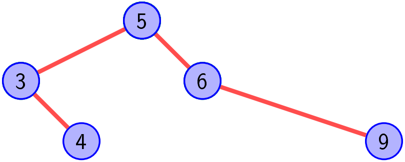
Insertion dans un ABR

Soit $\sigma = 271849365$ une permutation qui encode les éléments de l'ensemble à représenter.
$\rightsquigarrow$ On construit l'ABR de σ en insérant ses éléments de droite à gauche :



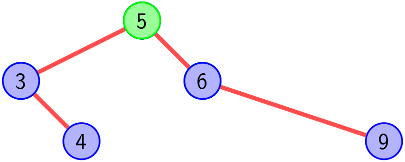
Insertion dans un ABR

Soit $\sigma = 271849365$ une permutation qui encode les éléments de l'ensemble à représenter.
$\rightsquigarrow$ On construit l'ABR de σ en insérant ses éléments de droite à gauche :



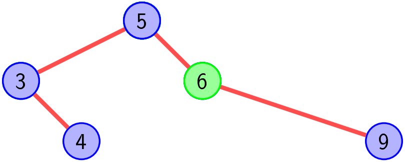
Insertion dans un ABR

Soit $\sigma = 271849365$ une permutation qui encode les éléments de l'ensemble à représenter.
$\rightsquigarrow$ On construit l'ABR de σ en insérant ses éléments de droite à gauche :



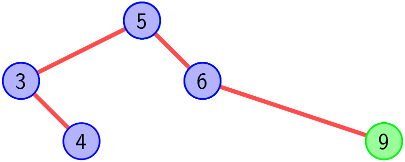
Insertion dans un ABR

Soit $\sigma = 271849365$ une permutation qui encode les éléments de l'ensemble à représenter.
$\rightsquigarrow$ On construit l'ABR de σ en insérant ses éléments de droite à gauche :



Insertion dans un ABR

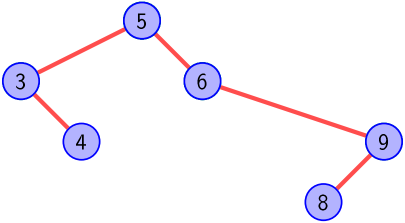
Soit $\sigma = 271849365$ une permutation qui encode les éléments de l'ensemble à représenter.
$\rightsquigarrow$ On construit l'ABR de σ en insérant ses éléments de droite à gauche :



Insertion dans un ABR

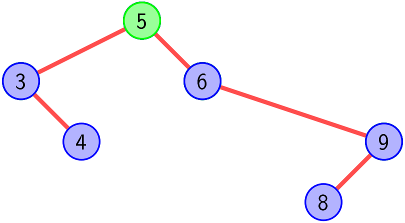
Soit $\sigma = 271849365$ une permutation qui encode les éléments de l'ensemble à représenter.

$\rightsquigarrow$ On construit l'ABR de σ en insérant ses éléments de droite à gauche :



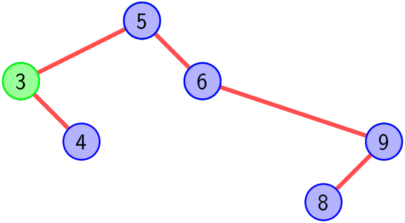
Insertion dans un ABR

Soit $\sigma = 271849365$ une permutation qui encode les éléments de l'ensemble à représenter.
$\rightsquigarrow$ On construit l'ABR de σ en insérant ses éléments de droite à gauche :



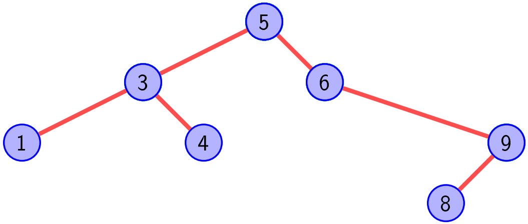
Insertion dans un ABR

Soit $\sigma = 271849365$ une permutation qui encode les éléments de l'ensemble à représenter.
$\rightsquigarrow$ On construit l'ABR de σ en insérant ses éléments de droite à gauche :



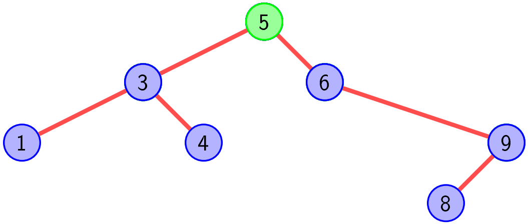
Insertion dans un ABR

Soit $\sigma = 27\color{gray}{1849365}$ une permutation qui encode les éléments de l'ensemble à représenter.
$\rightsquigarrow$ On construit l'ABR de σ en insérant ses éléments de droite à gauche :



Insertion dans un ABR

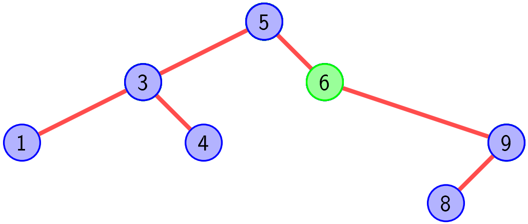
Soit $\sigma = 271849365$ une permutation qui encode les éléments de l'ensemble à représenter.
$\rightsquigarrow$ On construit l'ABR de σ en insérant ses éléments de droite à gauche :



Insertion dans un ABR

Soit $\sigma = 2\textcolor{gray}{71849365}$ une permutation qui encode les éléments de l'ensemble à représenter.

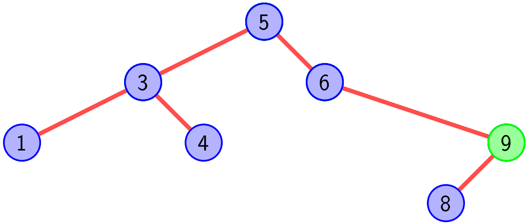
$\rightsquigarrow$ On construit l'ABR de σ en insérant ses éléments de droite à gauche :



Insertion dans un ABR

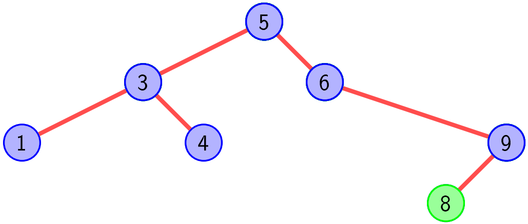
Soit $\sigma = 271849365$ une permutation qui encode les éléments de l'ensemble à représenter.

$\rightsquigarrow$ On construit l'ABR de σ en insérant ses éléments de droite à gauche :



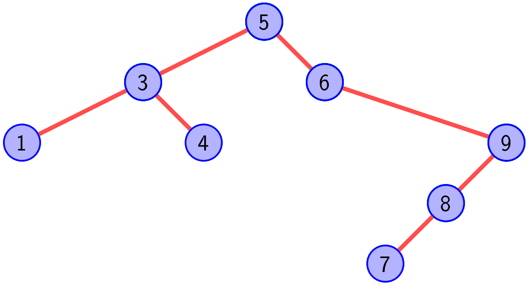
Insertion dans un ABR

Soit $\sigma = 271849365$ une permutation qui encode les éléments de l'ensemble à représenter.
$\rightsquigarrow$ On construit l'ABR de σ en insérant ses éléments de droite à gauche :



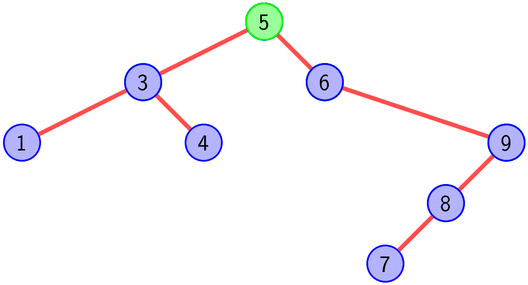
Insertion dans un ABR

Soit $\sigma = 271849365$ une permutation qui encode les éléments de l'ensemble à représenter.
$\rightsquigarrow$ On construit l'ABR de σ en insérant ses éléments de droite à gauche :



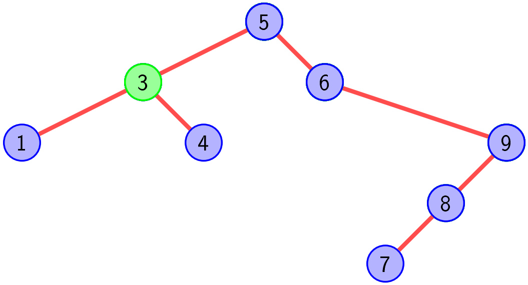
Insertion dans un ABR

Soit $\sigma = 271849365$ une permutation qui encode les éléments de l'ensemble à représenter.
$\rightsquigarrow$ On construit l'ABR de σ en insérant ses éléments de droite à gauche :



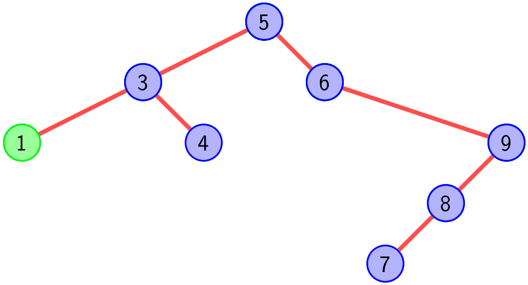
Insertion dans un ABR

Soit $\sigma = 271849365$ une permutation qui encode les éléments de l'ensemble à représenter.
$\rightsquigarrow$ On construit l'ABR de σ en insérant ses éléments de droite à gauche :



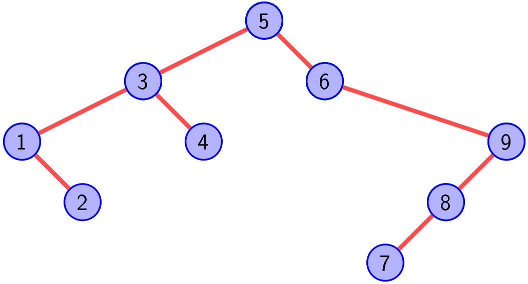
Insertion dans un ABR

Soit $\sigma = 271849365$ une permutation qui encode les éléments de l'ensemble à représenter.
$\rightsquigarrow$ On construit l'ABR de σ en insérant ses éléments de droite à gauche :



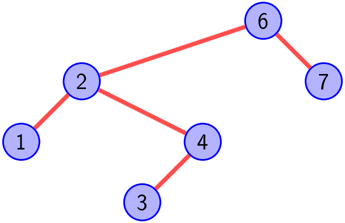
Insertion dans un ABR

Soit $\sigma = 271849365$ une permutation qui encode les éléments de l'ensemble à représenter.
$\rightsquigarrow$ On construit l'ABR de σ en insérant ses éléments de droite à gauche :



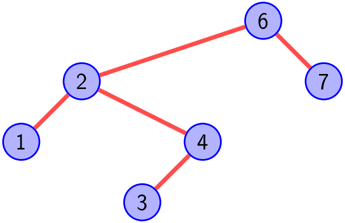
Recherche dans un ABR

Soit l'ABR qui représente l'ensemble $E = \{1, 2, 3, 4, 6, 7\}$ construit à partir de la permutation $\sigma = 341276$:



Recherche dans un ABR

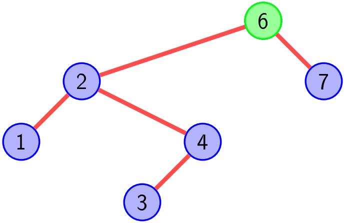
Soit l'ABR qui représente l'ensemble $E = \{1, 2, 3, 4, 6, 7\}$ construit à partir de la permutation $\sigma = 341276$:



Est-ce que l'élément 4 appartient à E ?

Recherche dans un ABR

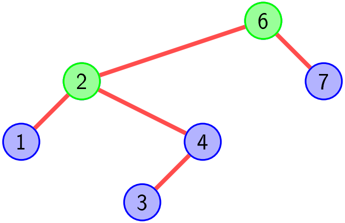
Soit l'ABR qui représente l'ensemble $E = \{1, 2, 3, 4, 6, 7\}$ construit à partir de la permutation $\sigma = 341276$:



Est-ce que l'élément 4 appartient à E ?

Recherche dans un ABR

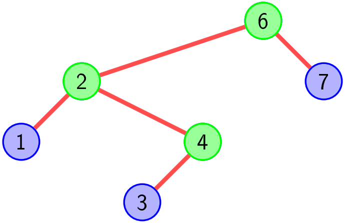
Soit l'ABR qui représente l'ensemble $E = \{1, 2, 3, 4, 6, 7\}$ construit à partir de la permutation $\sigma = 341276$:



Est-ce que l'élément 4 appartient à E ?

Recherche dans un ABR

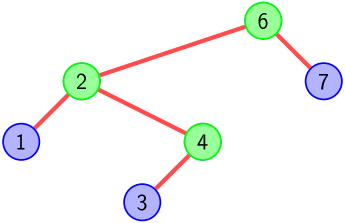
Soit l'ABR qui représente l'ensemble $E = \{1, 2, 3, 4, 6, 7\}$ construit à partir de la permutation $\sigma = 341276$:



Est-ce que l'élément 4 appartient à E ?

Recherche dans un ABR

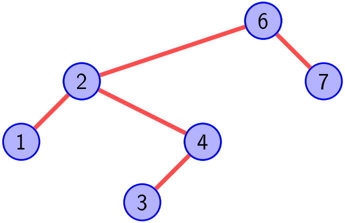
Soit l'ABR qui représente l'ensemble $E = \{1, 2, 3, 4, 6, 7\}$ construit à partir de la permutation $\sigma = 341276$:



Est-ce que l'élément 4 appartient à E ? $\Rightarrow$ oui !

Recherche dans un ABR

Soit l'ABR qui représente l'ensemble $E = \{1, 2, 3, 4, 6, 7\}$ construit à partir de la permutation $\sigma = 341276$:

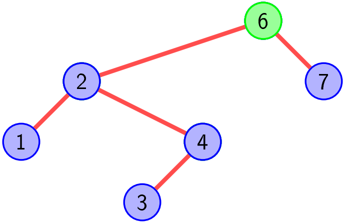


Est-ce que l'élément 4 appartient à E ? $\Rightarrow$ oui !

Est-ce que l'élément 8 appartient à E ?

Recherche dans un ABR

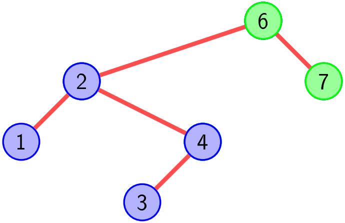
Soit l'ABR qui représente l'ensemble $E = \{1, 2, 3, 4, 6, 7\}$ construit à partir de la permutation $\sigma = 341276$:



Est-ce que l'élément 4 appartient à E ? $\Rightarrow$ oui !
Est-ce que l'élément 8 appartient à E ?

Recherche dans un ABR

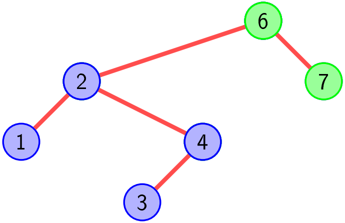
Soit l'ABR qui représente l'ensemble $E = \{1, 2, 3, 4, 6, 7\}$ construit à partir de la permutation $\sigma = 341276$:



Est-ce que l'élément 4 appartient à E ? $\Rightarrow$ oui !
Est-ce que l'élément 8 appartient à E ?

Recherche dans un ABR

Soit l'ABR qui représente l'ensemble $E = \{1, 2, 3, 4, 6, 7\}$ construit à partir de la permutation $\sigma = 341276$:



Est-ce que l'élément 4 appartient à E ? $\Rightarrow$ oui !
Est-ce que l'élément 8 appartient à E ? $\Rightarrow$ non.

Une première propriété combinatoire

Soit $\sigma = 4312$ et $\nu = 2143$ deux permutations.
L'ABR correspondant à σ est

$$T = \qquad ,$$

celui de ν est

$$U = \qquad .$$

Une première propriété combinatoire

Soit $\sigma = 4312$ et $\nu = 2143$ deux permutations.
L'ABR correspondant à σ est

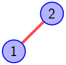
$$T = \qquad\qquad\qquad ,$$

celui de ν est

$$U = \qquad\qquad\qquad .$$

Une première propriété combinatoire

Soit $\sigma = 4312$ et $\nu = 2143$ deux permutations.
L'ABR correspondant à σ est



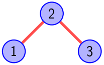
$$T = \qquad ,$$

celui de ν est

$$U = \qquad .$$

Une première propriété combinatoire

Soit $\sigma = 4312$ et $\nu = 2143$ deux permutations.
L'ABR correspondant à σ est

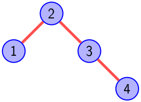
$T =$  ,

celui de ν est

$U =$.

Une première propriété combinatoire

Soit $\sigma = 4312$ et $\nu = 2143$ deux permutations.
L'ABR correspondant à σ est

$T =$ 

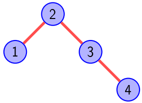
,

celui de ν est

$$U = \quad .$$

Une première propriété combinatoire

Soit $\sigma = 4312$ et $\nu = 2143$ deux permutations.
L'ABR correspondant à σ est

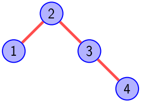
$T =$  ,

celui de ν est

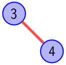
$U =$  .

Une première propriété combinatoire

Soit $\sigma = 4312$ et $\nu = 2143$ deux permutations.
L'ABR correspondant à σ est

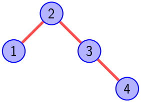
$T =$  ,

celui de ν est

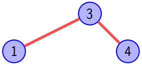
$U =$  .

Une première propriété combinatoire

Soit $\sigma = 4312$ et $\nu = 2143$ deux permutations.
L'ABR correspondant à σ est

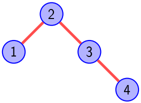
$T =$  ,

celui de ν est

$U =$  .

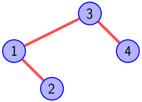
Une première propriété combinatoire

Soit $\sigma = 4312$ et $\nu = 2143$ deux permutations.
L'ABR correspondant à σ est

$T =$ 

,

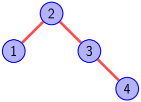
celui de ν est

$U =$ 

.

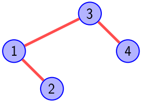
Une première propriété combinatoire

Soit $\sigma = 4312$ et $\nu = 2143$ deux permutations.
L'ABR correspondant à σ est

$T =$ 

,

celui de ν est

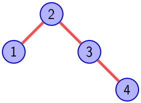
$U =$ 

.

Clairement, T et U représentent le même ensemble, mais $T \neq U$.

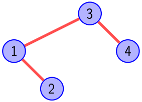
Une première propriété combinatoire

Soit $\sigma = 4312$ et $\nu = 2143$ deux permutations.
L'ABR correspondant à σ est

$T =$ 

,

celui de ν est

$U =$ 

.

Clairement, T et U représentent le même ensemble, mais $T \neq U$.

Conclusion $\Rightarrow$ les forme des ABR dépend de l'ordre dans lequel les éléments sont insérés.

Une seconde propriété combinatoire

Soit $\sigma = 346125$ et $\nu = 613425$ deux permutations.
L'ABR correspondant à σ est

$$T = \qquad ,$$

L'ABR correspondant à ν est

$$U = \qquad .$$

Une seconde propriété combinatoire

Soit $\sigma = 346125$ et $\nu = 613425$ deux permutations.
L'ABR correspondant à σ est

$T =$  ,

L'ABR correspondant à ν est

$U =$  .

Une seconde propriété combinatoire

Soit $\sigma = 346125$ et $\nu = 613425$ deux permutations.
L'ABR correspondant à σ est

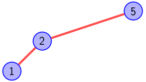
$T =$  ,

L'ABR correspondant à ν est

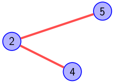
$U =$  .

Une seconde propriété combinatoire

Soit $\sigma = 346125$ et $\nu = 613425$ deux permutations.
L'ABR correspondant à σ est

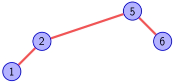
$T =$  ,

L'ABR correspondant à ν est

$U =$  .

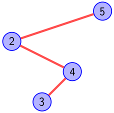
Une seconde propriété combinatoire

Soit $\sigma = 346125$ et $\nu = 613425$ deux permutations.
L'ABR correspondant à σ est

$T =$ 

,

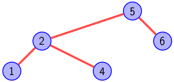
L'ABR correspondant à ν est

$U =$ 

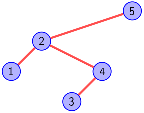
.

Une seconde propriété combinatoire

Soit $\sigma = 346125$ et $\nu = 613425$ deux permutations.
L'ABR correspondant à σ est

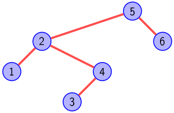
$T =$  ,

L'ABR correspondant à ν est

$U =$  .

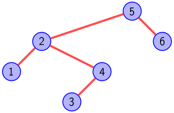
Une seconde propriété combinatoire

Soit $\sigma = 346125$ et $\nu = 613425$ deux permutations.
L'ABR correspondant à σ est

$T =$ 

,

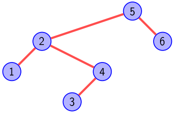
L'ABR correspondant à ν est

$U =$ 

.

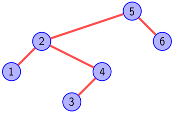
Une seconde propriété combinatoire

Soit $\sigma = 346125$ et $\nu = 613425$ deux permutations.
L'ABR correspondant à σ est

$T =$ 

,

L'ABR correspondant à ν est

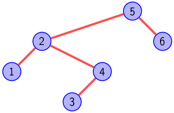
$U =$ 

.

Les éléments ont été insérés dans un ordre différent mais $T = U$.

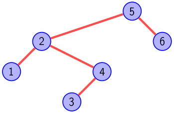
Une seconde propriété combinatoire

Soit $\sigma = 346125$ et $\nu = 613425$ deux permutations.
L'ABR correspondant à σ est

$T =$ 

,

L'ABR correspondant à ν est

$U =$ 

.

Les éléments ont été insérés dans un ordre différent mais $T = U$.

Conclusion $\Rightarrow$ deux permutations différentes peuvent donner le même ABR.

Un pas vers l'algèbre des arbres binaires

Soit

$$\mathbf{F}_T = \sum_{\sigma \in P} \sigma$$

où P est l'ensemble des permutations qui, insérées selon l'algorithme ABR donnent l'arbre binaire T.

Un pas vers l'algèbre des arbres binaires

Soit

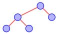
$$\mathbf{F}_T = \sum_{\sigma \in P} \sigma$$

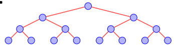
où P est l'ensemble des permutations qui, insérées selon l'algorithme ABR donnent l'arbre binaire T.

Par exemple :

$\mathbf{F}$  $=$

$\mathbf{F}$  $=$

$\mathbf{F}$  $=$

$\mathbf{F}$  $=$

Un pas vers l'algèbre des arbres binaires

Soit

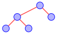
$$\mathbf{F}_T = \sum_{\sigma \in P} \sigma$$

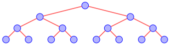
où P est l'ensemble des permutations qui, insérées selon l'algorithme ABR donnent l'arbre binaire T.

Par exemple :

$\mathbf{F}$  $= 132 + 312$

$\mathbf{F}$  $=$

$\mathbf{F}$  $=$

$\mathbf{F}$  $=$

Un pas vers l'algèbre des arbres binaires

Soit

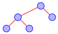
$$\mathbf{F}_T = \sum_{\sigma \in P} \sigma$$

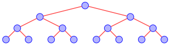
où P est l'ensemble des permutations qui, insérées selon l'algorithme ABR donnent l'arbre binaire T.

Par exemple :

$\mathbf{F}$  $=\ 132 + 312$

$\mathbf{F}$  $=\ 321$

$\mathbf{F}$  $=$

$\mathbf{F}$  $=$

Un pas vers l'algèbre des arbres binaires

Soit

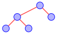
$$\mathbf{F}_T = \sum_{\sigma \in P} \sigma$$

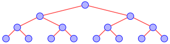
où P est l'ensemble des permutations qui, insérées selon l'algorithme ABR donnent l'arbre binaire T.

Par exemple :

F  $= 132 + 312$

F  $= 321$

F  $= 13254 + 13524 + 15324 + 31254 + 31524 + 35124 + 51324 + 53124$

F  $=$

Un pas vers l'algèbre des arbres binaires

Soit

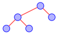
$$\mathbf{F}_T = \sum_{\sigma \in P} \sigma$$

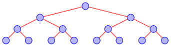
où P est l'ensemble des permutations qui, insérées selon l'algorithme ABR donnent l'arbre binaire T.

Par exemple :

F  $= 132 + 312$

F  $= 321$

F  $= 13254 + 13524 + 15324 + 31254 + 31524 + 35124 + 51324 + 53124$

F  $=$ environ 21 millions de permutations !

Un produit sur les arbres binaires

- Notion de produit sur les arbres binaires.

Un produit sur les arbres binaires

- Notion de produit sur les arbres binaires.
- L'idée : assembler deux éléments pour en former des plus gros.

Un produit sur les arbres binaires

- Notion de produit sur les arbres binaires.
- L'idée : assembler deux éléments pour en former des plus gros.
- Défini par :

$$\mathbf{F}_{T_0} \,.\, \mathbf{F}_{T_1} = \sum_{T \in M} \mathbf{F}_T$$

où

$$M = \{T = \mathrm{ABR}(\sigma) | \sigma \in \mu \,\overline{\sqcup\!\sqcup}\, \nu,\ \mathrm{ABR}(\mu) = T_0, \mathrm{ABR}(\nu) = T_1\}$$

et $\overline{\sqcup\!\sqcup}$ dénote le produit de mélange décalé.

Un exemple de produit (1)

F  **. F**  $=$

Un exemple de produit (1)

$\mathbf{F}$ $.\,\mathbf{F}$ $= (132 + 312) \;\overline{\sqcup\!\sqcup}\; 12$

Un exemple de produit (1)

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_{\wedge} \,.\, \mathbf{F}_{/} &= (132 + 312)\ \overline{\sqcup\mkern-3mu\sqcup}\ 12 \\
&= 132\ \overline{\sqcup\mkern-3mu\sqcup}\ 12 + 312\ \overline{\sqcup\mkern-3mu\sqcup}\ 12
\end{aligned}$$

Un exemple de produit (1)

F **.** **F**

$$
\begin{aligned}
&= (132 + 312) \mathbin{\overline{\sqcup\!\sqcup}} 12 \\
&= 132 \mathbin{\overline{\sqcup\!\sqcup}} 12 + 312 \mathbin{\overline{\sqcup\!\sqcup}} 12 \\
&= 132 \sqcup\!\sqcup 45 + 312 \sqcup\!\sqcup 45
\end{aligned}
$$

Un exemple de produit (1)

$$
\begin{aligned}
\mathbf{F} \,.\, \mathbf{F} &= (132 + 312) \,\overline{\sqcup\!\sqcup}\, 12 \\
&= 132 \,\overline{\sqcup\!\sqcup}\, 12 + 312 \,\overline{\sqcup\!\sqcup}\, 12 \\
&= {\color{blue}132} \sqcup\!\sqcup {\color{red}45} + {\color{green}312} \sqcup\!\sqcup {\color{red}45}
\end{aligned}
$$

Un exemple de produit (1)

$$
\begin{aligned}
\mathbf{F}_{\wedge} \,.\, \mathbf{F}_{/} &= (132 + 312) \,\overline{\sqcup\!\sqcup}\, 12 \\
&= 132 \,\overline{\sqcup\!\sqcup}\, 12 + 312 \,\overline{\sqcup\!\sqcup}\, 12 \\
&= 132 \sqcup\!\sqcup 45 + 312 \sqcup\!\sqcup 45 \\
&= 13245 + 13425 + 13452 + 14325 + 14352 + \\
&\quad\; 14532 + 41325 + 41352 + 41532 + 45132 + \\
&\quad\; 31245 + 31425 + 31452 + 34125 + 34152 + \\
&\quad\; 34512 + 43125 + 43152 + 43512 + 45312
\end{aligned}
$$

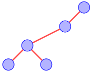
Un exemple de produit (1)

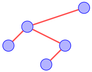
$\mathbf{F}$ $\mathbf{.}$ $\mathbf{F}$

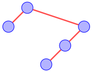
$$
\begin{aligned}
&= (132 + 312) \,\overline{\sqcup\!\sqcup}\, 12 \\
&= 132 \,\overline{\sqcup\!\sqcup}\, 12 + 312 \,\overline{\sqcup\!\sqcup}\, 12 \\
&= 132 \sqcup\!\sqcup 45 + 312 \sqcup\!\sqcup 45 \\
&= 13245 + 13425 + 13452 + 14325 + 14352 + \\
&\quad 14532 + 41325 + 41352 + 41532 + 45132 + \\
&\quad 31245 + 31425 + 31452 + 34125 + 34152 + \\
&\quad 34512 + 43125 + 43152 + 43512 + 45312
\end{aligned}
$$

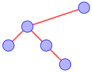
Il ne reste plus qu'a déterminer les ABR qui correspondent à ces permutations !

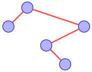
Un exemple de produit (2)

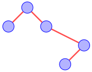
13245, 31245 $\longrightarrow$ 

13425, 31425, 34125 $\longrightarrow$ 

13452, 31452, 34152, 34512 $\longrightarrow$ 

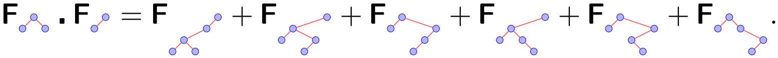
14325, 41325, 43125 $\longrightarrow$ 

14352, 41352, 43152, 43512 $\longrightarrow$ 

14532, 41532, 45132, 45312 $\longrightarrow$ 

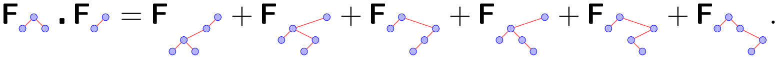
Un exemple de produit (3)

Et finalement :



Un exemple de produit (3)

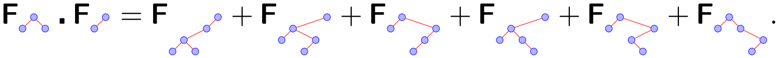
Et finalement :



- Calcul difficilement praticable !

Un exemple de produit (3)

Et finalement :



- Calcul difficilement praticable !
- Il existe cependant d'autres descriptions du produit d'ABR, moins directes, mais avec l'avantage de fournir un procédé de calcul beaucoup plus simple.

Quelques références

- A Aho and J. Ullman, Foundation of Computer Science, W. H. Freeman, 1994
- T. Cormen, C. Leiserson, R. Rivest and C. Stein, Introduction to algorithms, McGraw-Hill, 2003
- J.-L. Loday and M. Ronco, Hopf algebra on the planar binary trees, Advances in Mathematics 139, 293-309, 1998
- F. Hivert, J.-C. Novelli and J.-Y. Thibon, The algebra of binary search trees, arXiv :math/0401089v2 [math.CO], 2004