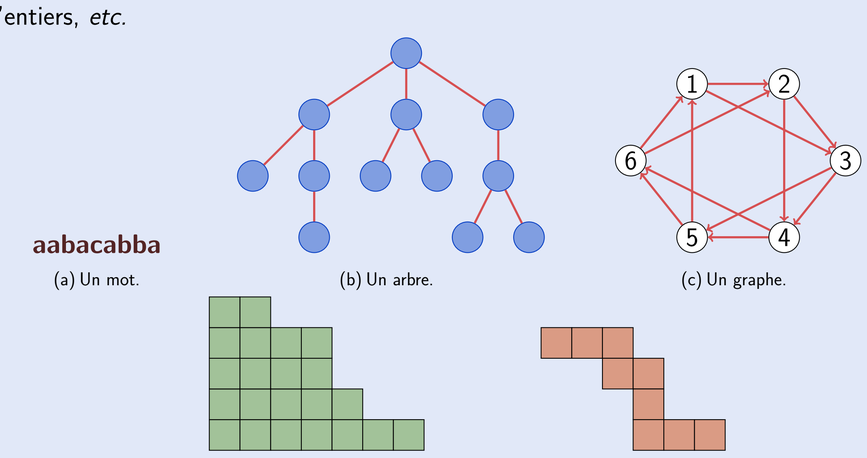
Objets combinatoires, assemblages et désassemblages

Samuele Giraudo

Laboratoire d'Informatique Gaspard-Monge – Université Paris-Est Marne-la-Vallée
5 bd Descartes – 77454 Marne-la-Vallée Cedex 2 – France

Objets combinatoires et algèbres de Hopf combinatoires

- La combinatoire est la branche des mathématiques qui s'intéresse à l'étude des structures discrètes, également appelées objets combinatoires.
- Il existe une très grande variété d'objets combinatoires : les mots, les arbres, les graphes, les partitions d'entiers, les compositions d'entiers, *etc.*



(a) Un mot. (b) Un arbre. (c) Un graphe.

(d) Une partition. (e) Une composition.

FIGURE: Quelques objets combinatoires.

- Une question naturelle en combinatoire est de compter (*i.e.* trouver une formule pour) le nombre d'objets d'une taille donnée. On cherche également à écrire des algorithmes pour les énumérer mais aussi pour les générer de manière aléatoire.
- Nous pouvons remarquer que les objets combinatoires présentés ici sont en fait des assemblages de briques de base :

Objets	Briques de base
Mots	Lettres
Arbres	Nœuds et arêtes
Graphes	Sommets et arcs
Partitions	Blocs
Compositions	Blocs

- Nous allons nous intéresser ici à l'assemblage et au désassemblage d'objets combinatoires.
- La structure algébrique adaptée pour étudier l'assemblage et le désassemblage d'objets combinatoires est la structure d'algèbre de Hopf combinatoire.
- Soit C un ensemble d'objets combinatoires muni d'une application $t : C \to \mathbb{N}$ qui associe à chaque objet sa taille (*e.g.* son nombre de lettres, de nœuds, de blocs, *etc.*). Nous considérerons les triplets du type $(H, \cdot, \Delta)$ où
  1. H est le $\mathbb{Z}$-module engendré par les éléments de C ;
  2. $\cdot : H \otimes H \to H$ est une application linéaire, le produit, qui permet d'assembler deux objets en un seul ;
  3. $\Delta : H \to H \otimes H$ est une application linéaire, le coproduit, qui permet de désassembler un objet en deux parties.
- Les conditions naturelles suivantes doivent être respectées :

(i) $\cdot$ doit être associatif, *i.e.*, pour tout $x, y, z \in C$,

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) ;$$

(ii) Δ doit être coassociatif, *i.e.*, pour tout $x \in C$,

$$(\Delta \otimes I)(\Delta(x)) = (I \otimes \Delta)(\Delta(x)),$$

où $I : H \to H$ est l'application identité ;

(iii) la fonction d'assemblage $\cdot$ respecte les tailles des objets, *i.e.*, pour tout $x \in C$,

$$t(x \cdot y) = t(x) + t(y) ;$$

(iv) la fonction de désassemblage Δ respecte les tailles des objets, *i.e.*, pour tout $x \in C$ et pour tout élément $y \otimes z$ apparaissant dans $\Delta(x)$,

$$t(y) + t(z) = t(x) ;$$

(v) l'assemblage et le désassemblage des objets sont compatibles entre eux, en ce sens que c'est la même chose, étant donnés $x, y \in C$, que de désassembler l'assemblage de x et de y que d'assembler les désassemblages de x et de y. Cette condition se note de la manière suivante :

$$\Delta(x \cdot y) = \Delta(x) \cdot \Delta(y).$$

Mots, mélanges et déconcaténations

- Nous considérons dans cet exemple la classe combinatoire des mots sur l'alphabet $A := \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$.
- La taille d'un mot est sa longueur. Par exemple, $t(\mathbf{bab}) = 3$. On note ϵ l'unique mot de taille zéro.
- Pour assembler deux mots u et v, on mélange les lettres du mot u avec celles du mot v. On peut obtenir plusieurs possibilités. La condition est que l'on doit pouvoir retrouver les mots u et v dans chacune d'entre-elles.
- Par exemple,

$$\begin{aligned}\mathbf{aba} \cdot \mathbf{ca} &= \mathbf{abaca} + \mathbf{abcaa} + \mathbf{abcaa} + \mathbf{acbaa} + \mathbf{acbaa} + \mathbf{acaba} + \mathbf{cabaa} + \mathbf{cabaa} + \mathbf{caaba} + \mathbf{caaba},\\ &= \mathbf{abaca} + 2\mathbf{abcaa} + 2\mathbf{acbaa} + \mathbf{acaba} + 2\mathbf{cabaa} + 2\mathbf{caaba}.\end{aligned}$$

Comme le montre cet exemple, il est possible d'assembler les mots **aba** et **ca** de différentes façons. De ce fait, on note, séparés par des $\ll + \gg$, les éléments que l'on peut obtenir. De plus, un même mot peut être obtenu à partir de plusieurs assemblages différents. Cette information est représentée par les multiplicités associées aux éléments obtenus.

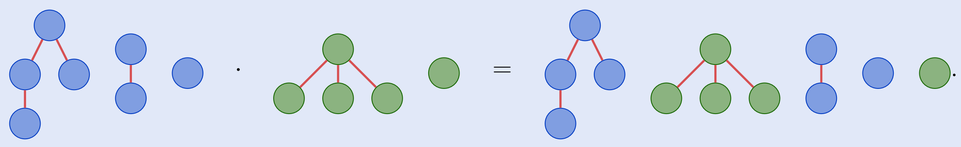
- Pour désassembler un mot u, on sépare u en deux parties : un préfixe v et un suffixe w tel que $u = vw$.
- Par exemple,

$$\begin{aligned}\Delta(\mathbf{bbabcaba}) =& \epsilon \otimes \mathbf{bbabcaba} + \mathbf{b} \otimes \mathbf{babcaba} + \mathbf{bb} \otimes \mathbf{abcaba} + \mathbf{bba} \otimes \mathbf{bcaba} + \mathbf{bbab} \otimes \mathbf{caba}\\ &+ \mathbf{bbabc} \otimes \mathbf{aba} + \mathbf{bbabca} \otimes \mathbf{ba} + \mathbf{bbabcab} \otimes \mathbf{a} + \mathbf{bbabcaba} \otimes \epsilon.\end{aligned}$$

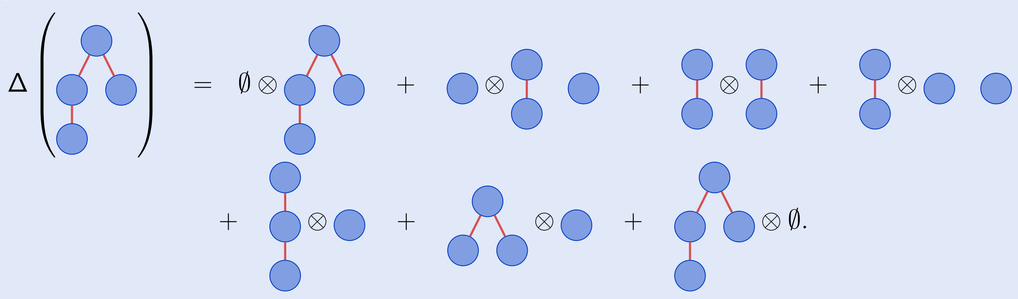
De la même façon que pour le produit, les différentes possibilités de désassemblage sont séparées par le symbole $\ll + \gg$. De plus, on note séparées par des $\ll \otimes \gg$ les deux parties obtenues par le désassemblage du mot.

Forêts, unions et élagages

- La classe combinatoire considérée est celle des forêts d'arbres enracinés. Une forêt est un multi-ensemble d'arbres.
- La taille d'une forêt est le nombre de nœuds qu'elle comporte. On note par $\emptyset$ l'unique forêt de taille zéro.
- L'assemblage de deux forêts est très simple : il s'agit simplement de réunir les arbres des deux forêts en une unique forêt. Notons que l'ordre dans lequel les arbres sont dessinés n'est pas significatif.
- Par exemple,

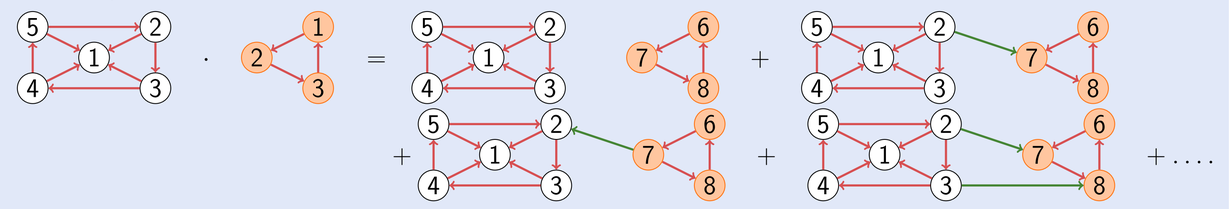


- Le désassemblage d'une forêt F est un peu plus complexe. On s'autorise à couper des arêtes de F avec l'unique condition qu'il est interdit de réaliser deux coupes sur deux arêtes qui se trouvent sur une même branche (*i.e.* chemin depuis la racine). On obtient ainsi deux nouvelles forêts R et L où R contient les morceaux des arbres qui ont les mêmes racines que dans F et L contient les nouveaux arbres créés par les coupes. Cet élément est noté $R \otimes L$.
- Par exemple,

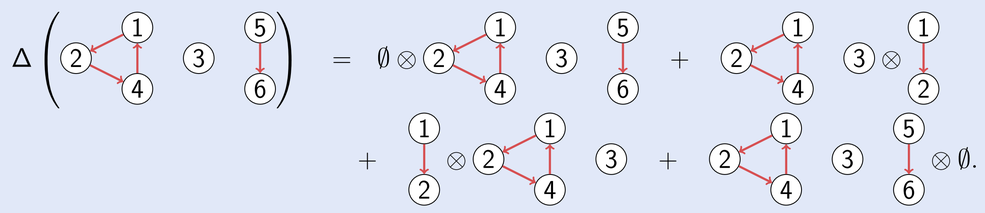


Graphes, mélanges et scissions

- Cet exemple porte sur la classe combinatoire des graphes orientés dont les sommets sont étiquetés bijectivement par les entiers de 1 à n où n est le nombre de sommets du graphe.
- La taille d'un graphe est le nombre de sommets qu'il contient. L'unique graphe de taille zéro est noté $\emptyset$.
- On assemble deux graphes G_1 et G_2 de la manière suivante : on commence par modifier les sommets de G_2 en incrémentant leurs étiquettes de $t(G_1)$. Ensuite, on ajoute un nombre quelconque d'arcs reliant des sommets de G_1 avec des sommets de G_2.
- Par exemple,

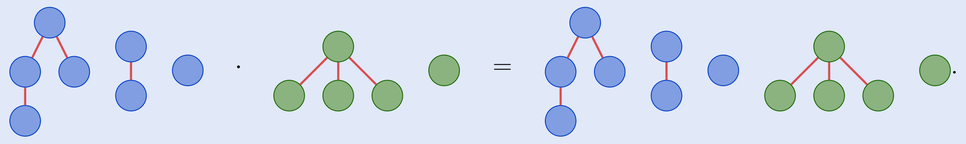


- Un graphe G se désassemble en le séparant en deux parties G_1 et G_2 à condition que G_1 et G_2 soient des unions de composantes connexes de G et que leurs étiquettes forment un intervalle d'entiers.
- Par exemple,

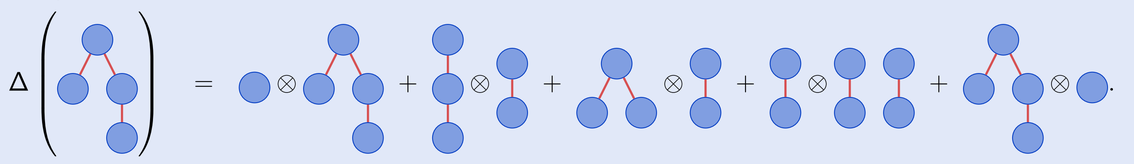


Forêts ordonnées, collages et coloriages

- Dans ce dernier exemple, on considère la classe combinatoire des forêts ordonnées d'arbres plans enracinés.
- La taille d'une forêt est le nombre d'arêtes qu'elle possède. La forêt de taille zéro est donc la forêt composée d'un unique nœud ●.
- L'assemblage des forêts consiste à les coller bout à bout, mais cette fois-ci, en respectant l'ordre dans lequel les arbres sont représentés.
- Par exemple,



- On désassemble une forêt F de la manière suivante. On colorie des arêtes de F avec la condition que si une arête est coloriée, alors toutes ses arêtes mères et ses arêtes sœurs droites le sont également. On note R (resp. L) la sous-forêt induite par les arêtes coloriées (resp. non coloriées). Cet élément est noté $R \otimes L$.
- Par exemple,



Conclusion et références

- Comme nous avons pu le voir dans ces exemples, l'assemblage et le désassemblage d'objets combinatoires possèdent une description combinatoire mais surtout algorithmique.
- Il existe une algèbre de Hopf combinatoire qui joue un rôle particulier : l'algèbre de Hopf des fonctions symétriques. Nous pouvons voir les algèbres de Hopf combinatoires comme des généralisations de cette dernière.
- Il est possible d'établir des liens entre algèbres de Hopf combinatoires par le biais de morphismes de Hopf. Ces derniers peuvent mettre en évidence des propriétés combinatoires des objets.
- Certaines algèbres de Hopf combinatoires son utilisées en physique et notamment en théorie de la renormalisation.
- Quelques références :

FLORENT HIVERT, *An Introduction to Combinatorial Hopf Algebras*, IOS Press, 2003

PAWEL BLASIAK, *Combinatorial Route to Algebra : The Art of Composition & Decomposition*, DMTCS, 2010

ALAIN CONNES, DIRK KREIMER, *Hopf Algebras, Renormalization and Noncommutative Geometry*, Comm. Math. Phys, 1998

Troisième édition de la *Conférence de l'École Doctorale MSTIC* de l'Université Paris-Est, 22 juin 2011